найдется множество $F \in \{F\}$, такое, что $x \in F \subseteq U$. Это утверждение можно доказать следующим образом. При любом заданном $\varepsilon > 0$ множество M^a, поскольку оно вполне ограничено, можно покрыть конечной системой открытых шаров радиуса ε с центрами, принадлежащими M^a. Полагая последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ и рассматривая счетное семейство соответствующих конечных систем открытых шаров, мы и получим требуемое семейство $\{F\}$ открытых множеств.

Пусть $\{U\}$ — любая система открытых множеств, покрывающая M^a. Через $\{F^*\}$ мы обозначим подсемейство семейства $\{F\}$, определенное следующим условием: $F \in \{F^*\}$ в том и только в том случае, когда $F \in \{F\}$ и существует множество $U \in \{U\}$, такое, что $F \subseteq U$. Из этого свойства семейства $\{F^*\}$ и того факта, что система $\{U\}$ покрывает множество M^a, мы можем заключить, что счетное семейство открытых множеств $\{F^*\}$ покрывает M^a. Построим теперь подсистему $\{U^*\}$ системы $\{U\}$, а именно выберем для каждого из множеств $F \in \{F^*\}$ ровно по одному множеству $U^* \in \{U\}$, такому, что $F \subseteq U^*$. Тогда $\{U^*\}$ — счетное семейство открытых множеств, покрывающее M^a. Мы должны показать, что некоторая конечная подсистема системы $\{U^*\}$ покрывает множество M^a. Пусть множества семейства $\{U^*\}$ занумерованы в последовательность $U_1, U_2, \ldots$. Допустим, что ни при каком значении n конечное объединение $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ не покрывает множество M^a. В таком случае при каждом n должна существовать точка $x_n \in \left(M - \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k\right)$. Как было показано выше, последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{(n)'}\}$, сходящуюся к некоторой точке, скажем x_∞, множества M^a. Тогда $x_\infty \in U_N$ при некотором N, и поэтому $x_n \in U_N$ для бесконечного числа значений n и, в частности, для некоторого $n > N$. Но это противоречит тому, что по построению $x_n \in \left(M - \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k\right)$. Итак, мы доказали, что множество M^a бикомпактно.

3. Пространства с мерой

Меры

Определение. Пусть S — некоторое множество. Пара вида $(S, \mathfrak{B})$ называется *σ-алгеброй* [1]) или *σ-аддитивным семейством* подмножеств множества S, если $\mathfrak{B}$ — семейство подмножеств множества S,

[1]) Говорят также „σ-кольцо“ или „σ-поле“. — *Прим. перев.*

удовлетворяющее следующим условиям:

$$S \in \mathfrak{B}; \tag{1}$$

$$\text{если} \quad B \in \mathfrak{B}, \quad \text{то} \quad B^C = (S - B) \in \mathfrak{B}; \tag{2}$$

$$\text{если} \quad B_j \in \mathfrak{B} (j = 1, 2, \ldots), \quad \text{то} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{B} \ (\sigma\text{-}\textit{аддитивность})^{1)}. \tag{3}$$

Пусть $(S, \mathfrak{B})$ есть σ-алгебра подмножеств множества S.

Тогда тройка $(S, \mathfrak{B}, m)$ называется *пространством с мерой*, если m — неотрицательная σ-аддитивная мера, т. е. функция, определенная на $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$m(B) \geqslant 0 \quad \text{для всякого } B \in \mathfrak{B}; \tag{4}$$

$m\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} m(B_j)$ для всякой последовательности $\{B_j\}$ попарно непересекающихся подмножеств из $\mathfrak{B}$ (свойство *счетной аддитивности*, или *σ-аддитивности*, меры m); (5)

множество S можно представить в виде счетного объединения множеств $B_j \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (свойство *σ-финитности*). (6)

Значение $m(B)$ называется *m-мерой* множества B, а множества $B \in \mathfrak{B}$ называются *$\mathfrak{B}$-измеримыми*.

Измеримые функции

Определение. Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная на множестве S, называется *$\mathfrak{B}$-измеримой* (или, короче, *измеримой*), если выполняется следующее условие:

для всякого открытого множества G вещественной прямой R^1 (или комплексной плоскости C^1) множество $\{s;\ x(s) \in G\}$ принадлежит $\mathfrak{B}$. (7)

Функция $x(s)$ может принимать значение ∞.

Определение. Говорят, что некоторое свойство P, относящееся к точкам s множества S, выполняется *почти всюду* по мере m (сокращенно *m-п. в.*), если оно выполняется для всех s, за исключением

---

[1]) Из (1), (2), (3) следует, что пересечение счетного числа множеств $B_j \in \mathfrak{B}$ тоже входит в $\mathfrak{B}$: $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j^C\right)^C \in \mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

некоторого множества, принадлежащего семейству $\mathfrak{B}$ и имеющего m-меру нуль.

Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная m-п. в. на множестве S и удовлетворяющая условию (7), называется *$\mathfrak{B}$-измеримой функцией, заданной m-п. в. на множестве S* или, короче, *$\mathfrak{B}$-измеримой функцией*.

Теорема Егорова. Если B — такое $\mathfrak{B}$-измеримое множество, что $m(B) < \infty$, и если $\{f_n(s)\}$ — некоторая последовательность $\mathfrak{B}$-измеримых функций, принимающих конечные значения m-п. в. на B, сходящаяся m-п. в. на B к конечной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(s)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\mathfrak{B}$-измеримое подмножество $E \subseteq B$, такое, что $m(B - E) \leqslant \varepsilon$, и на множестве E последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к $f(s)$ равномерно.

Доказательство. Удаляя, если это окажется необходимым, из множества B некоторое множество m-меры нуль, мы можем считать, что функции $f_n(s)$ принимают конечные значения и последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к $f(s)$ всюду на B.

Множество $B_n = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{s \in B;\ |f(s) - f_k(s)| < \varepsilon\}$ является $\mathfrak{B}$-измеримым, и $B_n \subseteq B_k$, если $n < k$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ на B, мы имеем $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Поэтому в силу σ-аддитивности меры m

$$\begin{aligned} m(B) &= m\{B_1 + (B_2 - B_1) + (B_3 - B_2) + \ldots\} = \\ &= m(B_1) + m(B_2 - B_1) + m(B_3 - B_2) + \ldots = \\ &= m(B_1) + (m(B_2) - m(B_1)) + (m(B_3) - m(B_2)) + \ldots = \\ &= \lim_{n\to\infty} m(B_n). \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} m(B - B_n) = 0$, и поэтому для любого произвольно заданного положительного числа η существует достаточно большой номер k_0, такой, что $m(B - B_k) < \eta$ при $k \geqslant k_0$.

Таким образом, для всякого положительного целого числа k существуют множество $C_k \subseteq B$, такое, что $m(C_k) \leqslant \varepsilon/2^k$, и такой номер N_k, что

$$|f(s) - f_n(s)| < \frac{1}{2^k} \text{ для всех } n > N_k \text{ и } s \in B - C_k.$$

Положим $E = B - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Тогда мы получим

$$m(B - E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

и при этом на множестве E последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится равномерно.

Интегралы

Определение. Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная на множестве S, называется *простой*, если она принимает конечное отличное от нуля постоянное значение на каждом из некоторого конечного числа, скажем n, попарно непересекающихся $\mathfrak{B}$-измеримых множеств B_j и равна нулю на $S - \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Значение простой функции $x(s)$ на B_j обозначим через x_j. Простая функция $x(s)$ называется *m-интегрируемой* на множестве S, если $\sum_{j=1}^{n} |x_j| m(B_j) < \infty$; величина $\sum_{j=1}^{n} x_j m(B_j)$ называется *m-интегралом* функции $x(s)$ по множеству S. Этот интеграл мы будем обозначать через $\int_S x(s) m(ds)$, или, короче, $\int_S x(s)$, или $\int x(s)$ в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению. Произвольная вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, заданная m-п. в. на множестве S, называется *m-интегрируемой* по S, если существует последовательность $\{x_n(s)\}$ простых интегрируемых функций, сходящаяся m-п. в. к функции $x(s)$, и при этом

$$\lim_{n, k \to \infty} \int_S |x_n(s) - x_k(s)| m(ds) = 0.$$

Нетрудно показать, что при этих условиях существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \int_S x_n(s) m(ds)$, который не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{x_n(s)\}$. По определению за интеграл функции $x(s)$ по S относительно меры m принимается предел $\lim_{n \to \infty} \int_S x_n(s) m(ds)$. Этот интеграл мы будем обозначать через $\int_S x(s) m(ds)$; иногда будем использовать сокращенные обозначения $\int x(s) m(ds)$ или $\int x(s)$.

Свойства интеграла

(1) Если $x(s)$ и $y(s)$ интегрируемы, то функция $\alpha x(s)+\beta y(s)$ также интегрируема и

$$\int\limits_S (\alpha x(s)+\beta y(s))\, m(ds) = \alpha \int\limits_S x(s)\, m(ds) + \beta \int\limits_S y(s)\, m(ds).$$

(2) Функция $x(s)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема функция $|x(s)|$.

(3) Если $x(s)$ интегрируема и $x(s)\geqslant 0$ m-п. в., то $\int\limits_S x(s)\, m(ds)\geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда m-п. в. $x(s)=0$.

(4) Если функция $x(s)$ интегрируема, то для произвольного множества $B\in\mathfrak{B}$ за m-интеграл $\int\limits_B x(s)\, m(ds)$ по B принимается величина

$$\int\limits_B x(s)\, m(ds) \equiv \int\limits_S C_B(s)\, x(s)\, m(ds),$$

где $C_B(s)$ — *характеристическая функция* множества B, т. е.

$$C_B(s)=1 \text{ для } s\in B \text{ и } C_B(s)=0 \text{ для } s\in S-B.$$

При этом функция $X(B)\equiv\int\limits_B x(s)\, m(ds)$, определенная на множествах $B\in\mathfrak{B}$, является σ-аддитивной, т. е. для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{B_j\}$, принадлежащих $\mathfrak{B}$, справедливо равенство

$$X\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} X(B_j).$$

(5) Функция $X(B)$, определенная выше, *абсолютно непрерывна* относительно меры m, т. е. если $m(B)=0$, то $X(B)=0$. Это условие эквивалентно требованию $\lim\limits_{m(B)\to 0} X(B)=0$, причем сходимость равномерна по $B\in\mathfrak{B}$.

Лемма Лебега — Фату. Пусть $\{x_n(s)\}$ — некоторая последовательность вещественных интегрируемых функций. Если существует вещественная интегрируемая функция $x(s)$, такая, что $x(s)\geqslant x_n(s)$ почти всюду для $n=1, 2, \ldots$ (или $x(s)\leqslant x_n(s)$ почти всюду для

$n = 1, 2, \ldots$), то

$$\int_S \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(s) \right) m(ds) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S x_n(s)\, m(ds)$$

$$\left(\text{или} \int_S \left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(s) \right) m(ds) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_S x_n(s)\, m(ds) \right);$$

в случае когда функция $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n(s)$ $\left(\text{или } \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n(s)\right)$ неинтегрируема, мы полагаем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_S x_n(s)\, m(ds) = -\infty$ $\left(\text{или } \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_S x_n(s)\, m(ds) = \infty\right)$.

Определение. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ и $(S', \mathfrak{B}', m')$ — два пространства с мерой. Обозначим через $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ наименьшую σ-алгебру подмножеств множества $S \times S'$, содержащую все множества вида $B \times B'$, где $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}'$. Доказано, что существует единственная σ-финитная σ-аддитивная неотрицательная мера $m \times m'$, определенная на $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$, такая, что

$$(m \times m')(B \times B') = m(B)\, m'(B').$$

Мера $m \times m'$ называется *произведением мер* m и m'. Далее можно обычным способом определить $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$-измеримые функции $x(s, s')$, заданные на множестве $S \times S'$, и $m \times m'$-интегрируемые функции $x(s, s')$. Величина интеграла по $S \times S'$ от $m \times m'$-интегрируемой функции $x(s, s')$ будет обозначаться через

$$\iint\limits_{S\times S'} x(s, s')(m \times m')(ds\, ds') \quad \text{или} \quad \iint\limits_{S\times S'} x(s, s')\, m(ds)\, m'(ds').$$

Теорема Фубини—Тонелли. Некоторая $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$-измеримая функция $x(s, s')$ тогда и только тогда $m \times m'$-интегрируема по $S \times S'$, когда по крайней мере один из повторных интегралов

$$\int_{S'} \left\{ \int_S |x(s, s')|\, m(ds) \right\} m'(ds') \quad \text{или} \quad \int_S \left\{ \int_{S'} |x(s, s')|\, m'(ds') \right\} m(ds)$$

конечен, причем в этом случае

$$\iint\limits_{S\times S'} x(s, s')\, m(ds)\, m'(ds') = \int_{S'} \left\{ \int_S x(s, s')\, m(ds) \right\} m'(ds') =$$
$$= \int_S \left\{ \int_{S'} x(s, s')\, m'(ds') \right\} m(ds).$$

Топологические меры

Определение. Пусть S — некоторое локально бикомпактное пространство, например n-мерное евклидово пространство R^n или какое-нибудь его замкнутое подмножество. *Бэровскими подмножествами* пространства S называются элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные G_δ-множества этого пространства, т. е. все его бикомпактные множества, являющиеся пересечениями счетного числа открытых множеств этого пространства. *Борелевскими подмножествами* пространства S называются элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные множества этого пространства.

Если S — некоторое замкнутое подмножество евклидова пространства R^n, то его бэровские и борелевские подмножества совпадают, так как в R^n всякое бикомпактное (замкнутое ограниченное) множество представляет собой G_δ-множество. Если, в частности, S — это вещественная прямая R^1 или замкнутый интервал из R^1, то бэровские (борелевские) подмножества можно определить как элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все полуоткрытые интервалы вида $(a, b] \in S$.

Определение. Пусть S — локально бикомпактное пространство. Неотрицательной *мерой Бэра* (*Бореля*) на S называется σ-аддитивная мера, определенная для всех бэровских (борелевских) подмножеств пространства S таким образом, что мера каждого бикомпактного множества конечна. Мера Бореля m называется *регулярной*, если для каждого борелевского множества B справедливо соотношение

$$m(B) = \inf_{U \supseteq B} m(U),$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам U, содержащим B. Таким же образом можно определить регулярность меры Бэра, но при этом оказывается, что она всегда регулярна. Доказано, что всякая мера Бэра может быть единственным образом продолжена до некоторой регулярной меры Бореля. Поэтому мы будем далее рассматривать лишь меры Бэра.

Определение. Комплексная функция $f(s)$, заданная на локально бикомпактном пространстве S, называется *бэровской функцией* на этом пространстве, если для каждого бэровского множества B комплексной плоскости C^1 множество $f^{-1}(B)$ является бэровским множеством в S. Если S представляется в виде счетного объединения бикомпактных множеств, то всякая непрерывная функция оказывается бэровской. Всякая бэровская функция измерима по отношению к σ-алгебре всех бэровских подмножеств пространства S.

Мера Лебега

Определение. Предположим, что S — вещественная прямая R^1 или какой-нибудь ее замкнутый интервал. Пусть $F(x)$ — некоторая монотонная неубывающая функция на S, непрерывная справа:

$F(x) = \inf\limits_{x<y} F(y)$. На полуоткрытых интервалах $(a, b]$ определим функцию m соотношением $m((a, b]) = F(b) - F(a)$. Такая функция m может быть единственным образом продолжена до некоторой неотрицательной меры Бэра на S. Продолженная мера m оказывается конечной (т. е. $m(S) < \infty$) тогда и только тогда, когда функция F ограничена. Если m — мера Бэра, определенная таким способом с помощью функции $F(s) = s$, то она называется *мерой Лебега*. Мера Лебега в пространстве R^n строится из n одномерных мер Лебега при помощи образования произведения мер.

Для меры Лебега и соответствующего ей *интеграла Лебега* справедливы следующие две важные теоремы.

Теорема 1. Пусть M — бэровское множество в пространстве R^n с конечной мерой Лебега $|M|$. Обозначим через $B \ominus C$ множество $B \ominus C = B \cup C - B \cap C$, которое называется *симметрической разностью* множеств B и C. Тогда

$$\lim_{|h|\to 0} |(M+h) \ominus M| = 0,$$

где $M + h = \{x \in R^n;\ x = m + h,\ m \in M\}$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $m + h = (m_1 + h_1, \ldots, m_n + h_n)$ и $|h| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} h_j^2\right)^{1/2}$.

Теорема 2. Пусть G — открытое множество из R^n. Для любой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, заданной на G, и произвольного $\varepsilon > 0$ существует определенная в G непрерывная функция $C_\varepsilon(x)$, такая, что множество $\{x \in G;\ C_\varepsilon(x) \neq 0\}^a$ представляет собой бикомпактное подмножество множества G и

$$\int_G |f(x) - C_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon\ ^{1)}.$$

Замечание. Пусть m — некоторая мера Бэра на локально бикомпактном пространстве S. Подмножество Z пространства S называется множеством *m-меры нуль*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое бэровское множество B, содержащее Z, что $m(B) < \varepsilon$. Меру m можно распространить на класс *m-измеримых множеств* (так мы будем называть множества, отличающиеся от бэровских множеством m-меры нуль). Если некоторое условие выполняется во всех точках, кроме тех, которые образуют множество m-меры

---

[1]) Интеграл $\int\limits_G \varphi(x)\, dx$ обозначает здесь и далее интеграл Лебега. — *Прим. перев.*

нуль, то говорят, что это условие справедливо почти всюду по мере m (m-п. в.). На функцию, которая m-п. в. совпадает с бэровской функцией, можно также распространить понятие интегрируемости.

4. *Линейные пространства*

Линейные пространства

Определение. Множество X называется *линейным пространством* над некоторым полем K, если выполняются следующие условия:

$$X \text{ — аддитивная абелева группа;} \tag{1}$$

определена операция *умножения на скаляр*: каждому элементу $x \in X$ и всякому $\alpha \in K$ поставлен в соответствие некоторый элемент множества X, обозначаемый αx, причем

$$\begin{aligned} &\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\alpha \in K;\ x,\ y \in X),\\ &(\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),\\ &(\alpha\beta)\,x = \alpha(\beta x) \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),\\ &1 \cdot x = x \quad (1 \text{ обозначает здесь единичный элемент поля } K). \end{aligned} \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные пространства только над полем R^1 вещественных чисел или над полем C^1 комплексных чисел и в зависимости от этого соответствующее линейное пространство будет называться *вещественным* или *комплексным.* Итак, далее мы под линейным пространством понимаем вещественное или комплексное линейное пространство. Элементы поля коэффициентов мы будем обозначать греческими буквами, а элементы пространства X — латинскими. Нулевой элемент пространства X (так мы называем нулевой элемент аддитивной абелевой группы X) и число нуль обозначаются одним и тем же символом 0; это не вызывает никаких неудобств, поскольку $0 \cdot x = (\alpha - \alpha)\,x = \alpha x - \alpha x = 0$. Элемент аддитивной абелевой группы X, являющийся *обратным* для элемента x, обозначается $-x$; легко видеть, что $-x = (-1)\,x$.

Определение. Элементы линейного пространства X называются также векторами этого пространства. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства X называются *линейно независимыми*, если из соотношения $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Векторы называются *линейно зависимыми*, если это соотношение выполняется, когда хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от 0. Если в X имеется n линейно независимых векторов, но любые