нуль, то говорят, что это условие справедливо почти всюду по мере m (m-п. в.). На функцию, которая m-п. в. совпадает с бэровской функцией, можно также распространить понятие интегрируемости.

4. Линейные пространства

Линейные пространства

Определение. Множество X называется *линейным пространством* над некоторым полем K, если выполняются следующие условия:

X — аддитивная абелева группа; (1)

определена операция *умножения на скаляр*: каждому элементу $x \in X$ и всякому $\alpha \in K$ поставлен в соответствие некоторый элемент множества X, обозначаемый αx, причем

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\alpha \in K;\ x,\ y \in X), \tag{2}$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),$$
$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),$$
$1 \cdot x = x$ (1 обозначает здесь единичный элемент поля K).

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные пространства только над полем R^1 вещественных чисел или над полем C^1 комплексных чисел и в зависимости от этого соответствующее линейное пространство будет называться *вещественным* или *комплексным*. Итак, далее мы под линейным пространством понимаем вещественное или комплексное линейное пространство. Элементы поля коэффициентов мы будем обозначать греческими буквами, а элементы пространства X — латинскими. Нулевой элемент пространства X (так мы называем нулевой элемент аддитивной абелевой группы X) и число нуль обозначаются одним и тем же символом 0; это не вызывает никаких неудобств, поскольку $0 \cdot x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0$. Элемент аддитивной абелевой группы X, являющийся *обратным* для элемента x, обозначается $-x$; легко видеть, что $-x = (-1)x$.

Определение. Элементы линейного пространства X называются также векторами этого пространства. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства X называются *линейно независимыми*, если из соотношения $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Векторы называются *линейно зависимыми*, если это соотношение выполняется, когда хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от 0. Если в X имеется n линейно независимых векторов, но любые

$n+1$ векторов линейно зависимы, то пространство X называется *n-мерным*. Если же число линейно независимых векторов бесконечно, то говорят, что X — бесконечномерное пространство. Всякая совокупность n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства X называется его *базисом*; при этом всякий вектор x из X единственным образом представляется в виде $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис пространства X. Подмножество M линейного пространства X называется *линейным подпространством* или, короче, *подпространством*, если при любых $x, y \in M$ всякая линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ также принадлежит M. Множество M является, следовательно, линейным пространством над тем же полем коэффициентов, что и пространство X.

Линейные операторы и линейные функционалы

Определение. Пусть X, Y — линейные пространства над одним и тем же полем коэффициентов K. Отображение $T : x \to y = T(x) \equiv Tx$, определенное на некотором линейном подпространстве D пространства X и принимающее значения из Y, называется *линейным*, если

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(Tx_1) + \beta(Tx_2).$$

В частности, из этого определения следует, что

$$T \cdot 0 = 0, \qquad T(-x) = -(Tx).$$

Введем следующие обозначения:

$$D = D(T); \quad \{y \in Y;\ y = Tx,\ x \in D(T)\} = R(T);$$
$$\{x \in D(T);\ Tx = 0\} = N(T).$$

Множества $D(T)$, $R(T)$ и $N(T)$ называются соответственно *областью определения, областью значений и нуль-подпространством* (*ядром*) отображения T. Отображение T называется также *линейным оператором*, действующим из области $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, или *линейным преобразованием* области $D(T)$ в область $R(T) \in Y$, или, несколько грубо, *линейным оператором из X в Y*. Если область значений $R(T)$ содержится в скалярном поле K, то T называется *линейным функционалом*, заданным на $D(T)$. Если линейный оператор T отображает $D(T)$ на $R(T)$ взаимно однозначно, то *обратное отображение* T^{-1} определяется как линейное отображение области $R(T)$ на $D(T)$, удовлетворяющее условиям

$$T^{-1}Tx = x \quad \text{для} \quad x \in D(T); \quad TT^{-1}y = y \quad \text{для} \quad y \in R(T);$$

T^{-1} называется также *обратным оператором* или *обращением* оператора T. Поскольку $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2$, справедливо следующее утверждение.

Предложение. Линейный оператор T имеет обратный оператор T^{-1} тогда и только тогда, когда из соотношения $Tx=0$ следует, что $x=0$.

Определение. Пусть T_1 и T_2 — линейные операторы, причем их области определения $D(T_1)$ и $D(T_2)$ принадлежат линейному пространству X, а области значений $R(T_1)$ и $R(T_2)$ содержатся в линейном пространстве Y. Тогда по определению $T_1=T_2$ в том и только в том случае, когда $D(T_1)=D(T_2)$ и $T_1x=T_2x$ для всех $x\in D(T_1)=D(T_2)$. Если $D(T_1)\subseteq D(T_2)$ и $T_1x=T_2x$ для всех $x\in D(T_1)$, то оператор T_2 называется *расширением*, или *продолжением*, оператора T_1, а T_1 называется *сужением* T_2; в этом случае мы будем писать $T_1\subseteq T_2$.

Замечание по поводу обозначений. Численное значение $T(x)$ линейного функционала T в некоторой точке $x\in D(T)$ мы иногда будем обозначать через $\langle x, T\rangle$, т. е.

$$T(x)\equiv\langle x, T\rangle.$$

Факторпространства

Предложение. Пусть M — некоторое линейное подпространство линейного пространства X. Два вектора x_1, $x_2\in X$ называются *эквивалентными относительно подпространства* M (или *сравнимыми по модулю* M), если $(x_1-x_2)\in M$; в этом случае мы пишем $x_1\equiv x_2 \pmod M$. Из этого определения вытекают следующие свойства:

(1) $x\equiv x \pmod M$;

(2) если $x_1\equiv x_2 \pmod M$, то $x_2\equiv x_1 \pmod M$;

(3) если $x_1\equiv x_2 \pmod M$ и $x_2\equiv x_3 \pmod M$, то $x_1\equiv x_3 \pmod M$.

Доказательство. Свойство (1) очевидно, так как $x-x=0\in M$. Утверждение (2) следует из того, что если $(x_1-x_2)\in M$, то $(x_2-x_1)=-(x_1-x_2)\in M$. Наконец, (3) справедливо потому, что если $(x_1-x_2)\in M$ и $(x_2-x_3)\in M$, то $(x_1-x_3)=(x_1-x_2)+(x_2-x_3)\in M$.

Совокупность всех векторов пространства X, сравнимых по модулю M с некоторым фиксированным вектором x, мы будем обозначать через ξ_x. Тогда в соответствии со свойствами (2) и (3) все векторы из ξ_x взаимно сравнимы по модулю M. Множество ξ_x называется *классом эквивалентности по модулю* M, а каждый отдельный вектор из ξ_x называется *представителем* класса ξ_x. Класс полностью определяется любым из своих представителей, т. е. из соотношения $y\in\xi_x$ вытекает, что $\xi_x=\xi_y$. Следовательно, всякие два класса ξ_x, ξ_y либо не пересекаются (если $y\notin\xi_x$), либо совпадают (если $y\in\xi_x$). Таким образом, все пространство X разбивается на классы ξ_x векторов, взаимно эквивалентных по модулю M.

Теорема. Если в совокупности всех классов эквивалентности определить сложение классов и умножение класса на скаляр формулами

$$\xi_x + \xi_y = \xi_{x+y}, \qquad \alpha\xi_x = \xi_{\alpha x},$$

то это множество классов можно рассматривать как новое линейное пространство.

Доказательство. Приведенные выше определения операций над классами не зависят от выбора представителей x, y соответственно классов ξ_x, ξ_y. В самом деле, если $(x_1 - x) \in M$, $(y_1 - y) \in M$, то

$$(x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y) \in M,$$
$$(\alpha x_1 - \alpha x) = \alpha (x_1 - x) \in M.$$

Таким образом, мы показали, что $\xi_{x_1+y_1} = \xi_{x+y}$ и $\xi_{\alpha x_1} = \xi_{\alpha x}$.

Итак, вышеуказанные операции определены однозначно, и при этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Определение. Линейное пространство, построенное таким способом (пространство классов эквивалентности), называется *фактор-пространством* пространства X по подпространству M и обозначается X/M.

Литература

Топологические пространства: Александров — Хопф [1], Бурбаки [1], Келли [1].

Пространства с мерой: Халмош [1], Сакс [1].