11.76. На фотографии, полученной в камере Вильсона, траектория электрона в однородном магнитном поле представляет собой дугу окружности радиусом $R = 10$ см. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Найти энергию электрона W (в электрон-вольтах).

Решение:

Имеем $W = \dfrac{e^2 B^2 R^2}{2m}$ (см. задачу 11.73). Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}4 \cdot 10^{-14}$ Дж или $W = \dfrac{1{,}4 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} =$ $= 88 \cdot 10^3$ эВ.

11.77. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью $v = 10^6$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 0{,}3$ Тл. Радиус окружности $R = 4$ см. Найти заряд q частицы, если известно, что ее энергия $W = 12$ кэВ.

Решение:

В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ — (1). Поскольку частица движется по окружности, следовательно, векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Тогда уравнение (1) можно записать в скалярном виде: $F = qvB$. Сила Лоренца сообщает частице постоянное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Следовательно, $qvB = \dfrac{mv^2}{2}$ — (2). Энергия частицы $W = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $mv^2 = 2W$ — (3). Подставляя (3) в (2) и выражая из полученного уравнения заряд частицы q, получим $q = \dfrac{2W}{vBR} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

11.78. Протон и α-частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Во сколько раз период обращения T_1 протона в магнитном поле больше периода обращения T_2 α-частицы?

Решение:

Период обращения протона равен $T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}$, где v_1 — скорость его движения и $R_1 = \frac{m_p v_1}{eB}$ (см. задачу 11.74). Отсюда $T_1 = \frac{2\pi m_p}{eB}$, т. е. период не зависит от скорости. Поскольку заряд α-частицы равен $2e$, то период ее обращения равен $T_2 = \frac{\pi m_\alpha}{eB}$. Отсюда отношение $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2m_p}{m_\alpha} = 0,5$.

11.79. α-частица, кинетическая энергия которой $W = 500$ эВ, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее движению. Индукция магнитного поля $B = 0,1$ Тл. Найти силу F, действующую на α-частицу, радиус R окружности, по которой движется α-частица, и период обращения T α-частицы.

Решение:

В магнитном поле на α-частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$. Поскольку векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, то в скалярном виде $F = qvB\sin\alpha = qvB$ — (1). Кинетическая энергия частицы $W = \frac{mv^2}{2}$ — (2), откуда $v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$ — (3). Подставляя (3) в (1), получим $F = qB\sqrt{\frac{2W}{m}} = 5 \cdot 10^{-15}$ Н. Сила Лоренца сообщает α-частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, следовательно, $F = m\frac{v^2}{R}$. Из (2) имеем $mv^2 = 2W$, тогда $F = \frac{2W}{R}$, откуда радиус окружности $R = \frac{2W}{F} = 0{,}032$ м. Период обращения α-частицы равен $T = \frac{\pi m_\alpha}{eB}$ (см. задачу 11.78). Подставляя числовые данные, получим $T = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

11.80. α-частица, момент импульса которой $M = 1{,}33 \times \times 10^{-22}$ кг·м²/с, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению ее движения. Индукция магнитного поля $B = 25$ мТл. Найти кинетическую энергию W α-частицы.

Решение:

Момент импульса α-частицы $\vec{M} = m[\vec{v}, \vec{R}]$ или $M = mvR\sin\alpha = mvR$ — (1) (поскольку $\alpha = 90°$). На частицу действует сила Лоренца $F = m\frac{v^2}{R}$ или $qvB = m\frac{v^2}{R}$ — (2). Из (1) имеем $R = \frac{M}{mv}$. Подставляя это выражение в (2), найдем $mv^2 = qB\frac{M}{m}$ — (3). Поскольку кинетическая энергия частицы равна $W = \frac{mv^2}{2}$, то, с учетом (3), получим $W = \frac{qBM}{2m} = 500$ эВ.

11.81. Однозарядные ионы изотопов калия с относительными атомными массами 39 и 41 ускоряются разностью потенциалов

$U = 300$ В; затем они попадают в однородное магнитное п
перпендикулярное направлению их движения. Индукция
нитного поля $B = 0{,}08$ Тл. Найти радиусы кривизны R_1 и
траекторий этих ионов.

Решение:

Потенциальная энергия ускоренных ионов $W_п = qU$ и т
по условию ионы однозарядные, то $q = |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$

Эта энергия переходит в кинетическую $W_к = \frac{mv^2}{2}$ и

закону сохранения энергии $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда скоро

движения ионов $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (1). В магнитном поле
ионы действует сила Лоренца $F = evB\sin\alpha$, но т. к.
условию поле перпендикулярно направлению движения
$\sin\alpha = 1$, поэтому $F = evB$ — (2). С другой стороны,

второму закону Ньютона $F = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{R}$ — н

мальное ускорение, тогда $F = \frac{mv^2}{R}$ — (3). Приравнива

правые части уравнений (2) и (3): $evB = \frac{mv^2}{R}$, отк

скорость движения ионов $v = \frac{eBR}{m}$ — (4). Приравни

правые части уравнений (1) и (4), получаем $\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{eB}{m}$

откуда радиусы кривизны траекторий ионов $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m}{e}}$

Подставляя числовые данные, получим $R_1 = 0{,}195$ м
$R_2 = 0{,}2$ м.

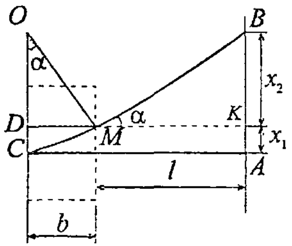
11.82. Найти отношение $\frac{q}{m}$ для заряженной частицы, если она, влетая со скоростью $v = 10^6$ м/с в однородное магнитное поле напряженностью $H = 200$ кА/м, движется по дуге окружности радиусом $R = 8{,}3$ см. Направление скорости движения частицы перпендикулярно к направлению магнитного поля. Сравнить найденное значение со значением $\frac{q}{m}$ для электрона, протона и α-частицы.

Решение:

Скорость движения заряженной частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца (см. задачу 11.81) $v = \frac{qBR}{m}$ — (1). Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, но т. к. для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$, поэтому $B = \mu_0 H$ — (2). Подставляя (2) в (1), находим $\frac{q}{m} = \frac{v}{\mu_0 HR} = 4{,}8 \times$ $\times 10^7$ Кл/кг. Для электрона $\frac{q}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг; для протона $\frac{q}{m} = 9{,}6 \cdot 10^7$ Кл/кг; для α-частицы $\frac{q}{m} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

11.83. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, влетает в однородное магнитное поле, направленное от чертежа к нам. Ширина поля $b = 2{,}5$ см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов дает пятно в точке A флуоресцирующего экрана, расположенного на расстоянии $l = 5$ см от края полюсов магнита. При включении магнитного поля пятно смещается в точку B. Найти смещение $x = AB$ пучка электронов, если известно, что индукция магнитного поля $B = 14{,}6$ мкТл.

Решение:



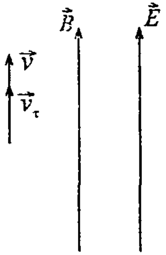
Общее смещение электрона $x = x_1 + x_2$, где x_1 — смещение электрона в магнитном поле. Электрон в магнитном поле движется по окружности радиусом $R = \frac{mv}{eB}$. Смещение x_1 можно найти из соотношения $x_1 = DC = OC - OD$. Но $OC = R$ и $OD = \sqrt{OM^2 - DM^2} = \sqrt{R^2 - b^2}$. Таким образом, $x_1 = R - \sqrt{R^2 - b^2}$. Смещение x_2 может быть найдено из пропорции $\frac{x_2}{l} = \frac{DM}{DO}$, откуда $x_2 = \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Тогда смещение $x = R - \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Имеем $R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 4$ см и $x = 4{,}9$ см.

11.84. Магнитное поле напряженностью $H = 8$ кА/м и электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м направлены одинаково. Электрон влетает в электромагнитное поле со скоростью $v = 10^5$ м/с. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения электрона. Задачу решить, если скорость электрона направлена: а) параллельно направлению электрического поля; б) перпендикулярно к направлению электрического поля.

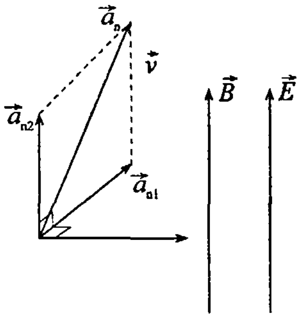
Решение:

а) Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $F = |e| vB \sin\alpha$. Поскольку $\vec{v}$ параллельна $\vec{H}$, то

$a = 0$, $F = 0$ и, следовательно, направление скорости не меняется, т. е. $a_n = 0$. Под действием сил электрического поля электрон получает тангенциальное ускорение, т. е. $F_{эл} = Ee = m|a_\tau|$, откуда $|a_\tau| = \dfrac{Ee}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с^2. Полное ускорение $a = |a_\tau| = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с^2.

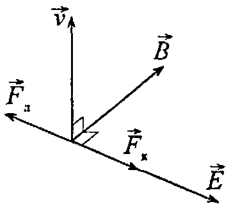


б) Если $\vec{v}$ перпендикулярна $\vec{H}$, то $a_\tau = 0$ и электрон движется по окружности. На него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F = |e|vB\sin 90° = |e|vB$, которая сообщает ему ускорение a_n. Следовательно, $evB = m - a_{n1}$, откуда $a_{n1} = \dfrac{evB}{m}$. Электрическое поле действует перпендикулярно движению электрона, т. е. тангенциально не ускоряет его, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a_{n2} = \dfrac{Ee}{m}$. Векторы $\vec{a}_{n1}$ и $\vec{a}_{n2}$ направлены перпендикулярно друг другу, поэтому результирующее нормальное ускорение $a_n = \sqrt{\left(\dfrac{eE}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{evB}{m}\right)^2} = \dfrac{e}{m}\sqrt{E^2 + v^2B^2}$ или $a_n = \dfrac{e}{m} \times$ $\times \sqrt{E^2 + v^2\mu_0^2 H^2} = 2{,}5 \cdot 10^{14}$ м/с^2.



11.85. Магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}5$ мТл, направлено перпендикулярно к электрическому полю, напряженность которого $E = 1$ кВ/м. Пучок электронов влетает в электромагнитное поле, причем скорость $\vec{v}$ электронов перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Найти скорость электронов v, если при одновременном действии обеих полей пучок электронов не испытывает отклонения. Каким будет радиус R траектории движения электронов при условии включения одного магнитного поля?

Решение:

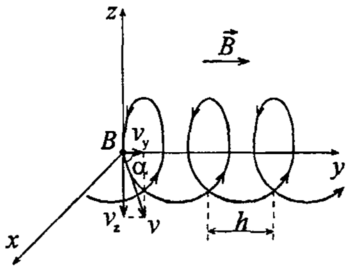


Поскольку векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ взаимно перпендикулярны, то пучок электронов не будет испытывать отклонения, если силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, будут равны по модулю, т. е. сила Лоренца будет уравновешиваться силой Кулона. Имеем $F_Л = F_К$, где $F_Л = evB$, $F_К = eE$. Тогда $Ee = evB$, откуда $v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^6$ м/с. При включении одного магнитного поля сила Лоренца сообщает электронам центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, т. е. $evB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB} = 2{,}25$ см.

11.86. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля $B = 13$ мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории.

Решение:

Разложим скорость электрона, влетающего в магнитное поле, по двум направлениям: вдоль линий поля — v_y и параллельно им — v_z. Составим два уравнения. Сила Лоренца создает центростремительное ускорение, т. е. $Bev_z = \frac{mv_z^2}{R}$, откуда $Be = \frac{mv_z}{R}$ — (1). Поскольку $\frac{mv^2}{2} = eU$, а из рисунка $v = \frac{v_z}{\sin\alpha}$, то



$eU = \frac{1}{2}\frac{mv_z^2}{\sin^2\alpha}$. Разделим обе части уравнения (2) на квадраты обеих частей уравнения (1). Получим $\frac{eU}{B^2e^2} = \frac{mv_z^2R^2}{2\sin^2\alpha m^2v_z^2}$; $\frac{U}{B^2e} = \frac{R^2}{2m\sin^2\alpha}$, откуда $R = \frac{\sin\alpha}{B}\times$ $\times\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 1$ см. Шаг спирали найдем из соотношений $2\pi R = v_z t$ и $h = v_y t$, откуда $h = 2\pi R\frac{v_y}{v_z}$. Т. к. $\frac{v_y}{v_z} = ctg\alpha = 1{,}73$, то $h = 11$ см.

11.87. Протон влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R = 1{,}5$ см. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Найти кинетическую энергию W протона.

Решение:

Разложим скорость протона $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}_n$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой определяется формулой $R = \frac{mv_n}{eB} = \frac{m(v\sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Отсюда $v = \frac{eBR}{m\sin\alpha}$. Кинетическая энергия протона $W = \frac{mv^2}{2}$. Подставляя выражение для v, получим $W = \frac{e^2B^2R^2}{2m\sin^2\alpha}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 6{,}9 \cdot 10^{-17}$ Дж или $W = 431$ эВ.

11.88. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 10^7$ м/с. Длина конденсатора $l = 5$ см. Напряженность электрического поля конденсатора $E = 10$ кВ/м. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, перпендикулярное к электрическому полю. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение:

При вылете из конденсатора электрон имеет скорость $v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{eEl}{mv}\right)^2}$ — (1), направление которой определяется углом α, причем $\cos\alpha = \frac{v}{v'}$ — (2) (см. задачу 9.72). Из (1) найдем $v' = 1{,}3 \cdot 10^7$ м/с. Из (2) найдем $\cos\alpha = 0{,}77$, $\sin\alpha = 0{,}64$, $\alpha \approx 40°$. Разложим скорость $\vec{v}'$ на две составляющие: $\vec{v}'_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}'_n$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой равен искомому радиусу винтовой траектории и определяется формулой $R = \frac{mv'_n}{eB} = \frac{m(v' \sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Т. к. период обращения электрона $T = \frac{2\pi R}{v' \sin\alpha} = \frac{2\pi m}{eB}$, то шаг винтовой траектории электрона $h = v'_\tau T = \frac{2\pi m(v' \cos\alpha)}{eB}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ м и $h = 36 \cdot 10^{-3}$ м.

11.89. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 3$ кВ, влетает в магнитное поле соленоида под углом $\alpha = 30°$ к его оси. Число ампер-витков соленоида $IN = 5000$ А·в. Длина соленоида $l = 25$ см. Найти шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение:

Имеем $h = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{eB}$ — (1), где $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (2) (см. задачу 11.88). Магнитная индукция соленоида $B = \mu\mu_0 \frac{IN}{l}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получим $h = \frac{2\pi\sqrt{2eUm}\, l \cos\alpha}{e\mu\mu_0 IN}$. Подставляя числовые данные, получим $h = 0{,}04$ м.

11.90. Через сечение $S = ab$ медной пластинки толщиной $a = 0{,}5$ мм и высотой $b = 10$ мм пропускается ток $I = 20$ А. При помещении пластинки в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов $U = 3{,}1$ мкВ. Индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Найти концентрацию n электронов проводимости в меди и их скорость v при этих условиях.

Решение:

При протекании тока I вдоль проводящей пластины, помещенной перпендикулярно магнитному полю, возникает поперечная разность потенциалов $U = \frac{IB}{nea}$, где a — толщина пластины, B — индукция магнитного поля. Отсюда концентрация электронов проводимости $n = \frac{IB}{Uea} = 8{,}1 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}$. По определению плотности тока $j = vne$ — (1), с другой стороны, $j = \frac{I}{S}$, где I — сила тока, $S = ab$ — площадь сечения медной пластинки, тогда $j = \frac{I}{ab}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $vne = \frac{I}{ab}$, откуда скорость $v = \frac{I}{abne} = 0{,}31$ мм/с.

11.91. Через сечение $S = ab$ алюминиевой пластинки (a — толщина и b — высота) пропускается ток $I = 5$ А. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока. Найти возникающую при этом поперечную разность потенциалов U. Индукция магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл. Толщина пластинки $a = 0{,}1$ мм. Концентрацию электронов проводимости считать равной концентрации атомов.

Решение:

Поперечная разность потенциалов $U = \frac{IB}{nea}$ — (1). По условию задачи концентрация электронов проводимости равна концентрации атомов, поэтому $n = \frac{\rho N_A}{\mu}$ — (2), где ρ — плотность алюминия, μ — молярная масса, N_A —

число Авогадро. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \dfrac{IB\mu}{\rho N_A ea} = 2{,}72$ мкВ.

11.92. Пластинка полупроводника толщиной $a = 0{,}2$ мм помещена в магнитное поле, перпендикулярное к пластинке. Удельное сопротивление полупроводника $\rho = 10$ мкОм·м. Индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Перпендикулярно к направлению поля вдоль пластинки пропускается ток $I = 0{,}1$ А. При этом возникает поперечная разность потенциалов $U = 3{,}25$ мВ. Найти подвижность u носителей тока в полупроводнике.

Решение:

Поперечная разность потенциалов $U = \dfrac{IB}{nea}$ — (1). Удельная проводимость материала $\sigma = \dfrac{1}{\rho} = neu$, где ρ — удельное сопротивление материала, u — подвижность носителей тока. Тогда концентрация носителей тока $n = \dfrac{1}{\rho eu}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $U = \dfrac{IB\rho u}{a}$, откуда подвижность носителей тока в проводнике $u = \dfrac{Ua}{IB\rho} = 0{,}65$ м^2/(В·с).

11.93. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл движется проводник длиной $l = 10$ см. Скорость движения проводника $v = 15$ м/с и направлена перпендикулярно к магнитному полю. Найти индуцированную в проводнике э.д.с. ε.

Решение:

Э.д.с. индукции определяется по закону Фарадея: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. В этом уравнении знак «минус» соответствует правилу Ленца. Поскольку $d\Phi = BdS = Bldx$, то $\varepsilon = Bl\dfrac{dx}{dt} = Blv = 0{,}15\ \text{В}$.

11.94. Катушка диаметром $D = 10$ см, состоящая из $N = 500$ витков проволоки, находится в магнитном поле. Найти среднюю э.д.с. индукции $\varepsilon_{\text{ср}}$, возникающую в этой катушке, если индукция магнитного поля увеличивается в течение времени $t = 0{,}1$ с от 0 до 2 Тл.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon_{\text{ср}} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где изменение потока магнитной индукции через катушку $\Delta\Phi = NS\Delta B$. Следовательно, $\varepsilon_{\text{ср}} = NS\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$, где $\Delta B = B_2 - B_1$. По условию $B_1 = 0$, $B_2 = 2$ Тл. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{\text{ср}} = 78{,}5\ \text{В}$.

11.95. Скорость самолета с реактивным двигателем $v = 950$ км/ч. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_{\text{в}} = 39{,}8$ А/м и размах крыльев самолета $l = 12{,}5$ м.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ или, поскольку

$\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2). Т. к. магнитная индукция $B = \mu\mu_0 H$, а площадь, перекрываемая крыльями самолета за время Δt, равна $\Delta S = vl\Delta t$, то из (2) получим $\Delta\Phi = \mu\mu_0 Hvl\Delta t$. Тогда из (1) $\varepsilon = \frac{\mu\mu_0 Hvl\Delta t}{\Delta t} = \mu\mu_0 Hvl$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}165$ В.

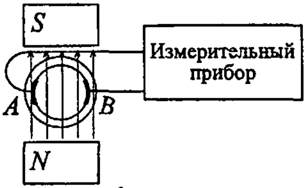
11.96. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ Тл, вращается стержень длиной $l = 1$ м с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах стержня.

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ или, поскольку $\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$. За один оборот стержень пересекает площадь $\Delta S = \pi l^2$ за время $\Delta t = t$. Тогда магнитный поток, пересекаемый стержнем за один оборот, $\Phi = B\pi l^2$, а возникающая на концах стержня э.д.с. $\varepsilon = \frac{B\pi \cdot l^2}{t} = B\pi l^2 n = \frac{Bl^2\omega}{2}$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}5$ В.

11.97. Схема, поясняющая принцип действия электромагнитного расходомера жидкости, изображена на рисунке. Трубопровод с протекающей в нем проводящей жидкостью помещен в магнитное поле. На электродах A и B возникает э.д.с. индукции. Найти скорость v течения жидкости в трубопроводе, если индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл, расстояние между электродами (внутренний диаметр трубопровода) $d = 50$ мм и возникающая при этом э.д.с. $\varepsilon = 0{,}25$ мВ.

Решение:



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_2 = BS$, где $S = ld$ — площадь, пронизываемая магнитным потоком, $l = v\Delta t$ — расстояние, которое проходит струя за время Δt. Тогда э.д.с. индукции $\varepsilon_i = Blv$, откуда скорость течения жидкости в трубопроводе $v = \dfrac{\varepsilon_i}{Bl} = 0{,}5$ м/с.

11.98. Круговой проволочный виток площадью $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю э.д.с. индукции $\varepsilon_{\text{ср}}$, возникающую в витке при включении поля в течение времени $t = 10$ мс.

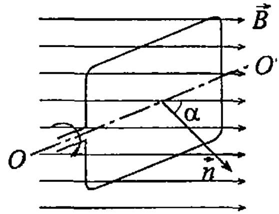
Решение:

Имеем $\varepsilon_{\text{ср}} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dfrac{S\Delta B}{\Delta t}$. Поскольку индукция B уменьшается от 1Тл до 0, $\Delta B = (0-1) = -1$ Тл. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{\text{ср}} = 1$ В.

11.99. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, равномерно вращается катушка, состоящая из $N = 100$ витков проволоки. Частота вращения катушки $n = 5\ \text{с}^{-1}$; площадь поперечного сечения катушки $S = 0{,}01\,\text{м}^2$. Ось вращения перпендикулярна к оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение:

Рассмотрим один виток рамки. При равномерном вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью ω магнитный поток через его площадь будет меняться по закону $\Phi = BS\cos\alpha$ — (1), где S — площадь рамки; α — угол между нормалью к плоскости и вектором $\vec{B}$.



Считая, что при $t = 0$ $\alpha = 0$, имеем $\alpha = \omega \cdot t$. Индуцируемая в витке э.д.с. индукции $\varepsilon_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). Поскольку $\Phi(t) = BS\cos\alpha = BS\cos\omega\cdot t$ (согласно (1)), то, дифференцируя эту функцию и помня, что $\frac{d(\cos\omega\cdot t)}{dt} = -\omega\sin t$, получим $\varepsilon_i = BS\omega\sin\omega\cdot t$ — (3). Индуцируемая в N витках э.д.с. будет в N раз больше: $\varepsilon = N\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega\cdot t = \varepsilon_m\sin\omega\cdot t$, где ε_m — максимальное значение (амплитуда) э.д.с. индукции: $\varepsilon_m = NBS\omega$ — (4). Следовательно, при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная синусоидальная э.д.с. самоиндукции. Подставляя в (4) значение угловой скорости $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения рамки, получим $\varepsilon_m = 2\pi nNBS \approx 3{,}14$ В.

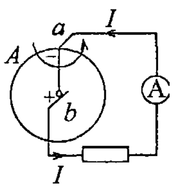
11.100. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}8$ Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью $\omega = 15$ рад/с. Площадь рамки $S = 150$ см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол $\alpha = 30°$ с направлением магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся рамке.

Решение:

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ — (1). При вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку, изменяется по закону $\Phi = BS\sin\alpha\cos\omega\cdot t$ — (2). Подставив (2) в (1) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = BS\omega\sin\alpha\sin\omega\cdot t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega\cdot t = 1$. Отсюда $\varepsilon_{max} = BS\omega\sin\alpha$; $\varepsilon_{max} = 0{,}09$ В.

11.101. Однородный медный диск A радиусом $R = 5$ см помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. По цепи aba может идти ток (a и b — скользящие контакты). Диск вращается с частотой $n = 3\ \text{с}^{-1}$. Найти э.д.с. ε такого генератора. Указать направление электрического тока, если магнитное поле направлено от нас к чертежу, а диск вращается против часовой стрелки.

Решение:



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = -\Phi_2 = -BS$, где $S = \pi R^2$ — площадь диска. В состоянии покоя $\varepsilon_i = 0$, а при вращении диска э.д.с. генератора $\varepsilon_i = \frac{B\pi R^2}{\Delta t}$, где $\Delta t = T$ — период обращения диска, т. е. время одного оборота. Поскольку частота вращения диска $n = \frac{1}{T}$, то окончательно э.д.с. генератора $\varepsilon_i = B\pi R^2 n = 4{,}71$ мВ. На свободные электроны, находящиеся в верхней части диска, со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, направленная вверх. В результате этого воздействия в центре диска накапливается положительный заряд, а на верхнем крае — отрицательный. Поскольку за положительное принято направление тока от «плюса» к «минусу», то ток будет направлен так, как показано на рисунке.

11.102. Горизонтальный стержень длиной $l = 1$ м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна магнитному полю, индукция которого $B = 50$ мкТл. При какой частоте вращения n стержня разность потенциалов на концах этого стержня $U = 1$ мВ?

Решение:

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2), где площадь, покрываемая сечением стержня за один оборот, равна $\Delta S = \pi l^2$ — (3). Подставив (3) в (2), а затем (2) в (1), получим $\varepsilon = \frac{B\pi l^2}{\Delta t}$. Здесь Δt — время одного оборота. Отсюда $n = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{B\pi l^2}$. Подставляя числовые данные, получим $n = 6{,}4$ с$^{-1}$.

11.103. На соленоид длиной $l = 20$ см и площадью поперечного сечения $S = 30$ см^2 надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет $N = 320$ витков, и по нему идет ток $I = 3$ А. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{\text{ср}}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени $t = 1$ мс?

Решение:

Имеем $\varepsilon_{ср} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta BS}{\Delta t}$. Поскольку $\Delta B = B_2 - B_1$, где $B_2 = 0$, а $B_1 = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}$, а $\Delta t = t = 1$ мс, то $\varepsilon_{ср} = \frac{\mu\mu_0 NS^2}{lt} = 18$ мВ.

11.104. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{ср}$ индуцируется в витке, если соленоид, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет железный сердечник?

Решение:

Напряженность магнитного поля внутри соленоида не зависит от наличия сердечника и равна $H = \frac{NI}{l} = 4800$ А/м.

По графику определим $B = 1{,}7$ Тл. Тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 265$.

Подставляя в выражение для ε из предыдущей задачи значение μ, найдем $\varepsilon = 4{,}8$ В.

11.105. На соленоид длиной $l = 144$ см и диаметром $D = 5$ см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет $N = 2000$ витков, и по ней течет ток $I = 2$ А. Соленоид имеет железный сердечник. Какая средняя э.д.с. $\varepsilon_{ср}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени $t = 2$ мс?

Решение:

Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируемая э.д.с. $\varepsilon = -L_{12}\frac{\Delta I}{\Delta t}$ — (1), где $L_{12} = \mu_0 \mu n_1 n_2 Sl$ — взаимная индуктивность витка и соленоида. Для соленоида $n_1 = \frac{N}{l}$ —

число витков на единицу длины, $S=\frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения, тогда $L_{12}=\mu_0\mu N\frac{\pi D^2}{4}$ — (2), т. к. для витка $n_2=1$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем $\Delta t=-t$ и $\Delta I=I$, тогда, с учетом (2), уравнение (1) можно переписать в виде $\varepsilon_{ср}=\mu_0\mu N\frac{\pi D^2 I}{4t}$ — (3). Напряженность магнитного поля соленоида $H=In_1=\frac{IN}{l}=2{,}77\cdot10^3$ А/м, по графику находим значение магнитной индукции $B=1{,}6$ Тл. Поскольку $B=\mu_0\mu H$, то $\mu_0\mu=\frac{B}{H}=0{,}575$ мГн/м. Подставляя найденное значение в уравнение (3), получим $\varepsilon_{ср}=1{,}61$ В.

11.106. В однородном магнитном поле, индукция которого $B=0{,}1$ Тл, вращается катушка, состоящая из $N=200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T=0{,}2$ с; площадь поперечного сечения $S=4$ см^2. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение:

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon=-\frac{d\Psi}{dt}$ — (1). Потокосцепление $\Psi=N\Phi$, где N — число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ. Подставив выражение Ψ в (1), получим $\varepsilon=-N\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). При вращении катушки магнитный поток Φ, пронизывающий катушку в момент времени t, изменяется по закону $\Phi = BS\cos\omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — (4) — угловая скорость вращения катушки. Подставив (3) в (2) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = NB\omega \sin\omega t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega t = 1$. Отсюда, подставляя (4), получим $\varepsilon_{max} = NBS\frac{2\pi}{T} = 250$ мВ.

11.107. Катушка длиной $l = 20$ см имеет $N = 400$ витков. Площадь поперечного сечения катушки $S = 9$ см^2. Найти индуктивность L_1 катушки. Какова будет индуктивность L_2 катушки, если внутрь катушки введен железный сердечник? Магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = 400$.

Решение:

Индуктивность катушки определяется выражением $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$. Учитывая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu = 1$, получим $L_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ Гн; $L_2 = 0{,}36$ Гн.

11.108. Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой $S = 1$ мм^2. Длина соленоида $l = 25$ см; его сопротивление $R = 0{,}2$ Ом. Найти индуктивность L соленоида.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S'}{l}$ — (1), где $S' = \pi r^2$ — (2) — площадь поперечного сечения соленоида. Число витков N найдем из соотношения $N = \frac{l}{d}$. Диаметр проволоки d можно найти, зная, что площадь поперечного сечения проволоки

$S = \pi \frac{d^2}{4}$, откуда $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$. Тогда $N = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\pi}{S}} = 222$. Сопротивление R проволоки определяется по формуле: $R = \rho \frac{l'}{S}$, откуда длина проволоки $l' = \frac{SR}{\rho} = 11{,}8$ м. Разделив длину всей проволоки на количество витков, мы получим длину окружности одного витка, т. е. $\frac{l'}{N} = 2\pi r$, откуда $r = \frac{l'}{2\pi N}$. Подставляя это выражение в (2), получим $S' = \frac{(l')^2}{4\pi N^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2. Подставляя числовые данные в (1), получим $L = 54{,}5 \cdot 10^{-6}$ Гн.

11.109. Катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $D = 3$ см имеет $N = 400$ витков. По катушке идет ток $I = 2$ А. Найти индуктивность L катушки и магнитный поток Φ, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, где площадь поперечного сечения катушки $S = \pi \frac{D^2}{4}$. Откуда $L = \mu\mu_0 \frac{\pi N^2 D^2}{4l} = 0{,}71 \cdot 10^{-3}$ Гн. Магнитный поток, пронизывающий всю катушку, равен $N\Phi = LI$, тогда магнитный поток, пронизывающий плоскость поперечного сечения, равен $\Phi = \frac{LI}{N} = 3{,}55 \cdot 10^{-6}$ Вб.

11.110. Сколько витков проволоки диаметром $d = 0{,}6$ см имеет однослойная обмотка катушки, индуктивность которой $L = 1$ мГн и диаметр $D = 4$ см? Витки плотно прилегают друг к другу.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \frac{\pi N^2 D^2}{4l}$ (см. задачу 11.109). Здесь длина катушки $l = dN$. Следовательно, $L = \mu\mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}$, откуда $N = \frac{4dL}{\mu\mu_0 \pi D^2} = 380$.

11.111. Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения $S = 20\,\text{см}^2$ и число витков $N = 500$. Индуктивность катушки с сердечником $L = 0{,}28\,\text{Гн}$ при токе через обмотку $I = 5$ А. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника.

Решение:
Мгновенное значение потокосцепления для катушки определяется выражением $\Psi = LI$ — (1). Кроме того, $\Psi = N\Phi = NBS$ — (2) (см. задачу 11.106). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим $NBS = LI$, откуда $B = \frac{LI}{NS}$; $B = 1{,}4\,\text{Тл}$. Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Отсюда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H}$. По графику зависимости индукции $\vec{B}$ от напряженности $\vec{H}$ магнитного поля определим значение H, соответствующее $B = 1{,}4\,\text{Тл}$: $H = 0{,}8 \cdot 10^3$ А/м. Тогда $\mu = 1400$.

11.112. Соленоид длиной $l = 50\,\text{см}$ и площадью поперечного сечения $S = 2\,\text{см}^2$ имеет индуктивность $L = 0{,}2\,\text{мкГн}$. При каком токе I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида $W_0 = 1\,\text{мДж/м}^3$?

Решение:

Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида определяется по формуле $W_0 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$ — (1). Индукция магнитного поля внутри соленоида равна $B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}$ — (2). Число витков N можно найти из выражения для индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\frac{lL}{\mu\mu_0 S}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $B = I\sqrt{\frac{\mu\mu_0 L}{lS}}$. Тогда из (1) $W_0 = \frac{I^2 L}{2lS}$, откуда $I = \sqrt{\frac{2lSW_0}{L}} = 1$ А.

11.113. Сколько витков имеет катушка, индуктивность которой $L = 1$ мГн, если при токе $I = 1$ А магнитный поток сквозь катушку $\Phi = 2$ мкВб?

Решение:

Магнитный поток сквозь катушку равен $N\Phi = LI$, откуда $N = \frac{LI}{\Phi} = 500$.

11.114. Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником $S = 10\ \text{см}^2$; длина соленоида $l = 1$ м. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника, если магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = 1{,}4$ мВб. Какому току I, текущему через соленоид, соответствует этот магнитный поток, если известно, что индуктивность соленоида при этих условиях $L = 0{,}44$ Гн?

Решение:

Магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = BS\cos\alpha$, но т. к. $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$ и $\Phi = BS$, откуда магнитная индукция $B = \dfrac{\Phi}{S} = 1{,}4$ Тл. По графику находим напряженность магнитного поля $H = 800$ А/м. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 1392{,}6$ – магнитная проницаемость материала сердечника. Магнитный поток через поперечное сечение катушки связан с ее индуктивностью соотношением $N\Phi = LI$, где число витков N может быть получено из выражения дя индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\dfrac{lL}{\mu\mu_0 S}} =$ $= 500$. Тогда данный магнитный поток соответствует току $I = \dfrac{N\Phi}{L} = 1{,}6$ А.

11.115. В соленоид длиной $l = 50$ см вставлен сердечник из такого сорта железа, для которого зависимость $B = f(H)$ неизвестна. Число витков на единицу длины соленоида $N_l = 400$ см$^{-1}$; площадь поперечного сечения соленоида $S = 10$ см^2. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при токе через обмотку соленоида $I = 5$ А, если известно, что магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида с сердечником, $\Phi = 1{,}6$ мВб. Какова индуктивность L соленоида при этих условиях?

Решение:

По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1). Считая начальный магнитный поток $\Phi_0 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_1$. Э.д.с. самоиндукции определяется формулой $\varepsilon_c = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ — (2). Считая начальный ток $I_0 = 0$, получаем $\Delta I = I$, тогда уравнения (1) и (2) можно переписать в следующем виде: $\varepsilon_i = -\dfrac{\Phi_1}{\Delta t}$ — (3) и $\varepsilon_c = -\dfrac{LI}{\Delta t}$ — (4). Поскольку в нашем случае $\varepsilon_i = \varepsilon_c$, то, приравнивая правые части уравнений (3) и (4), получаем $\Phi_1 = LI$ — (5). С другой стороны, полный поток, пронизывающий весь соленоид, $\Phi_1 = \Phi nl$ — (6), где n — число витков на единицу длины соленоида, l — длина соленоида. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем $LI = \Phi nl$, откуда индуктивность соленоида $L = \dfrac{\Phi nl}{I} = 64$ мГн. С другой стороны, $L = \mu\mu_0 n^2 lS$, где μ — магнитная проницаемость сердечника, S — площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда магнитная проницаемость сердечника $\mu = \dfrac{L}{\mu_0 n^2 lS} = 636{,}6$.

11.116. Имеется соленоид с железным сердечником длиной $l = 50$ см, площадью поперечного сечения $S = 10\ см^2$ и числом витков $N = 1000$. Найти индуктивность L этого соленоида, если по обмотке соленоида течет ток: а) $I = 0{,}1$ А; б) $I = 0{,}2$ А; в) $I = 2$ А.

Решение:

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$ — (1). Для того чтобы определить индуктивность L соленоида, нужно найти магнитную проницаемость μ сердечника. Вычислив по формуле $H = \dfrac{IN}{l}$ напряженность магнитного поля внутри соленоида и воспользовавшись далее способом, описанным в задаче 11.39, найдем значения μ, соответствующие различным значениям тока I. Затем из (1) найдем значение L. Данные запишем в таблицу:

п.	H, А/м	B, Тл	μ	L, Гн
а	200	0,8	3182	8
б	400	1,2	2387	6
в	4000	1,7	338	0,85

11.117. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}2$ Гн, второй — $L_2 = 0{,}8$ Гн; сопротивление второй катушки $R_2 = 600$ Ом. Какой ток I_2 потечет во второй катушке, если ток $I_1 = 0{,}3$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени $t = 1$ мс?

Решение:

Взаимная индуктивность катушек $L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 Sl$ — (1). Индуктивность первой катушки $L_1 = \mu\mu_0 n_1^2 lS$ — (2), индуктивность второй катушки $L_2 = \mu\mu_0 n_2^2 lS$ — (3). Умножая (2) на (3), получим $L_1 L_2 = (\mu\mu_0 Sl)^2 n_1^2 n_2^2$, откуда $n_1 n_2 = \dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu\mu_0 lS}$ — (4). Подставляя (4) в (1), найдем $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. При выключении тока I_1 во второй катушке возникнет э.д.с. равная $\varepsilon_2 = -L_{12}\dfrac{dI_1}{dt}$ — (5). Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_2}$ или, с учетом (5), средний ток во второй катушке $I_2 = \dfrac{L_{12}}{R_2}\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} =$

$$= \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R}\frac{I_1}{t} = 0{,}2 \text{ А}.$$