Глава I
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

§ 1. *Кинематика*

В задачах данного раздела необходимо, прежде чем приступать к числовым расчетам, представить все величины в единицах системы СИ. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы.

1.1. Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость $\bar{v}$ движения автомобиля?

Решение:

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v} = \frac{s}{t}$, где $s = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$, т.к. $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$. Т.е. $s = \frac{t}{2}(v_1 + v_2)$, отсюда: $\bar{v} = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$, $\bar{v} = 60$ км/ч.

1.2. Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую половину пути – со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость $\bar{v}$ движения автомобиля?

Решение:

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v} = \frac{s}{t}$ – (1), где $t = t_1 + t_2$; $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$. Тогда $t_1 = \frac{s}{2v_1}$; $t_2 = \frac{s}{2v_2}$, откуда

$t = \dfrac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}$ – (2). Подставляя (2) в (1), получим:

$\bar{v} = \dfrac{s \cdot 2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$, $\bar{v} = \dfrac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80 + 40} \approx 53{,}3$ км/ч.

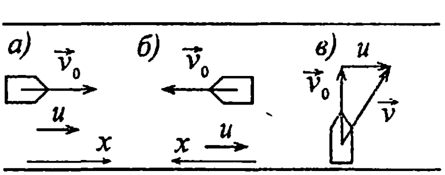
1.3. Пароход идет по реке от пункта A до пункта B со скоростью $v_1 = 10$ км/ч, а обратно – со скоростью $v_2 = 16$ км/ч. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ парохода и скорость u течения реки.

Решение:

Средняя скорость $\bar{v} = \dfrac{s}{t}$ – (1), где $t = t_1 + t_2$, а $s_1 = s_2 = \dfrac{s}{2}$. Тогда $t_1 = \dfrac{s}{2v_1}$ и $t_2 = \dfrac{s}{2v_2}$, откуда $t = \dfrac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}$ – (2). Подставляя (2) в (1), получим: $\bar{v} = \dfrac{s \cdot 2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$ или $\bar{v} = 12{,}3$ км/ч. При движении вниз по течению $\bar{v} = v_1 + u$, а при движении вверх по течению $\bar{v} = v_2 - u$. Приравняем правые части уравнений и выразим u: $v_1 + u = v_2 - u$, $2u = v_2 - v_1$, $u = \dfrac{v_2 - v_1}{2}$; $u = 3$ км/ч.

1.4. Найти скорость v относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки $u = 1$ м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 2$ м/с.

Решение:

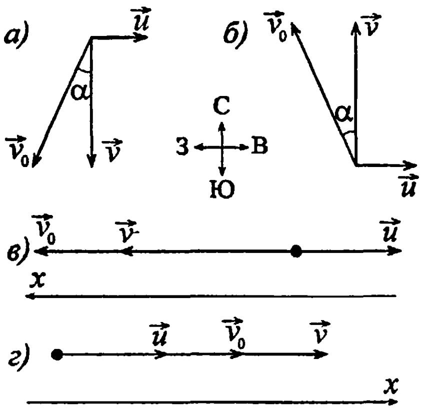


а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u = 3$ м/с. б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x:

$v = v_0 - u = 1$ м/с. в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, сложив вектора по правилу треугольников, получим: $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx$ $\approx 2{,}24$ м/с.

1.5. Самолет летит относительно воздуха со скоростью $v_0 = 800$ км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью $u = 15$ м/с. С какой скоростью v самолет будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану надо держать курс, чтобы перемещение было: а) на юг; б) на север; в) на запад; г) на восток?

Решение:



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$. Подставляя числовые данные и учитывая, что $u = 15$ м/с $= 54$ км/ч, получаем $v_0 = 798$ км/ч. Из рисунка видно, что $v = v_0 \cos\alpha$; $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на юго-запад.

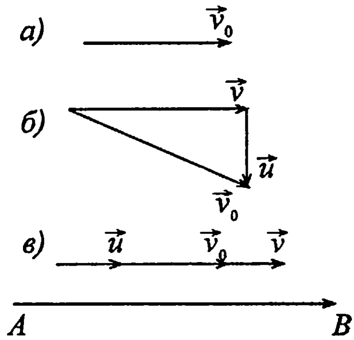
б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$ или $v_0 = 798$ км/ч. Поскольку $v = v_0 \cos\alpha$, то $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на северо-запад.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 - u$; $v = 800 - 54 = 746$ км/ч. Курс на запад.

г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u$; $v = 800 + 54 = 854$ км/ч. Курс на восток.

1.6. Самолет летит от пункта A до пункта B, расположенного на расстоянии $l = 300$ км к востоку. Найти продолжительность t полета, если: а) ветра нет; б) ветер дует с юга на север; в) ветер дует с запада на восток. Скорость ветра $u = 20$ м/с, скорость самолета относительно воздуха $v_0 = 600$ км/ч?

Решение:



а) $t = \dfrac{l}{v_0}$; $t = 0{,}5$ ч;

б) $v_0^2 = \left(\dfrac{l}{t}\right)^2 + u^2$, отсюда найдем

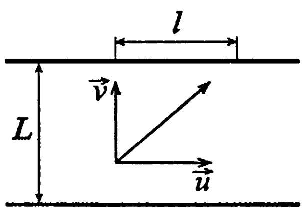
$t = \sqrt{\dfrac{l^2}{v_0^2 - u^2}}$ или $t = 0{,}504$ ч $=$

$= 30{,}2$ мин;

в) $t = \dfrac{l}{v_0 + u}$; $t = \dfrac{300}{672} = 0{,}45$ ч $= 26{,}8$ мин.

1.7. Лодка движется перпендикулярно к берегу со скоростью $v = 7{,}2$ км/ч. Течение относит ее на расстояние $l = 150$ м вниз по реке. Найти скорость u течения реки и время t, затраченное на переправу через реку. Ширина реки $L = 0{,}5$ км.

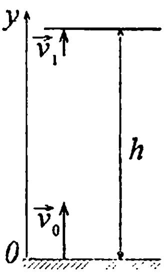
Решение:



Движение лодки относительно реки выражается формулой: $L = vt$, откуда $t = \dfrac{L}{v} = 250$ с. За это же время t лодка переместилась относительно берега на расстояние l, причем скорость лодки относительно берега равна скорости реки, тогда $u = \dfrac{l}{t}$; $u = 0{,}6$ м/с.

1.8. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t = 3$ с. Какова была начальная скорость v_0 тела и на какую высоту h оно поднялось?

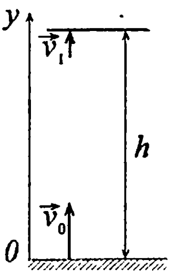
Решение.



Запишем уравнения кинематики в проекциях на ось y: $y(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ и $v(t)=v_0-gt$. В наивысшей точке подъема имеем $y(t_1)=h$; $v(t_1)=0$, т. е. $h=v_0t_1-qt_1^2/2$ и $0=v_0-qt_1$, где $t_1=\frac{t}{2}$ — время подъема. Откуда $v_0=qt_1$, $v_0=\frac{qt}{2}$, $h=qt_1^2-\frac{qt_1^2}{2}=\frac{qt_1^2}{2}$; $h=\frac{qt^2}{8}$. Подставляя числовые данные, получим $v_0=14{,}7$ м/с; $h\approx 11$ м.

1.9. Камень бросили вертикально вверх на высоту $h_0=10$ м. Через какое время t он упадет на землю? На какую высоту h поднимется камень, если начальную скорость камня увеличить вдвое?

Решение:



Воспользуемся решением задачи 1.8 и запишем систему уравнений:

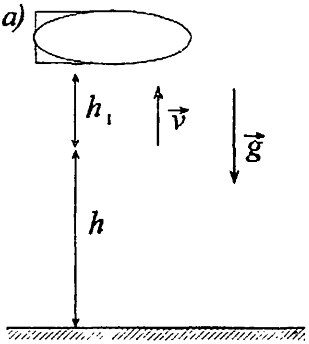
$$\begin{cases} h_0=v_0t_1-\frac{qt_1}{2} & \text{—}(1),\\ 0=v_0-qt_1 & \text{—}(2),\\ t=2t_1 & \text{—}(3), \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} v_0=\frac{qt}{2} & \text{—}(4),\\ h_0=\frac{qt^2}{8} & \text{—}(5). \end{cases}$$

Тогда из (5) $t=\sqrt{\frac{8h_0}{g}}$, отсюда $t=2{,}9$ с. Из (2) $t_1=\frac{v_0}{g}$. Следовательно, если v_0 увеличится в 2 раза, время подъема также увеличится в 2 раза. Из (1) $h=2v_0\cdot 2t_1-\frac{q4t_1^2}{2}$;

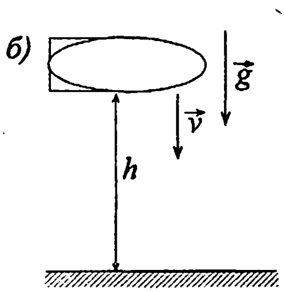
$$h=4\left(v_0t_1-\frac{qt_1^2}{2}\right)=4h_0=40\text{ м.}$$

1.10. С аэростата, находящегося на высоте $h = 300$ м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v = 5$ м/с; б) аэростат опускается со скоростью $v = 5$ м/с; в) аэростат неподвижен?

Решение:



Решаем задачу относительно неподвижной системы отсчета — земли. Тогда скорость камня в начальный момент времени относительно земли $\vec{v}_{отн}$ равна сумме скоростей: камня относительно аэростата $\vec{v}_{отн} = 0$ и скорости v аэростата относительно земли, т.е. $\vec{v}_{отн} = 0 + \vec{v}$. Таким образом, при $t = 0$ скорость камня равна скорости аэростата. В первый момент времени камень, имея начальную скорость v, полетит вверх и за время t_1 поднимется на высоту $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ — (1) (см задачу 1.8). Остановившись в верхней точке, он полетит вниз и за время t_2 преодолеет расстояние $h + h_1 = \frac{gt_2^2}{2}$ — (2). Общее время $t = t_1 + t_2$ — (3). При движении вверх скорость $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим $h_1 = \frac{v^2}{(2g)}$. Преобразуем уравнение (2): $h + \frac{v^2}{2g} = \frac{gt_2^2}{2}$. Отсюда $t_2 = \frac{\sqrt{2gh + v^2}}{g}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $t = \frac{\left(v + \sqrt{2gh + v^2}\right)}{g}$; $t \approx 8{,}4$ с.

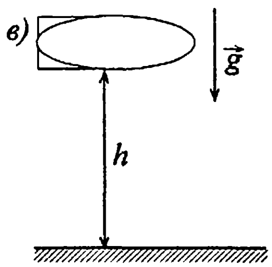


Уравнение движения камня:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{gt^2}{2} + vt - h = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно t: $D = v^2 + 2gh$;

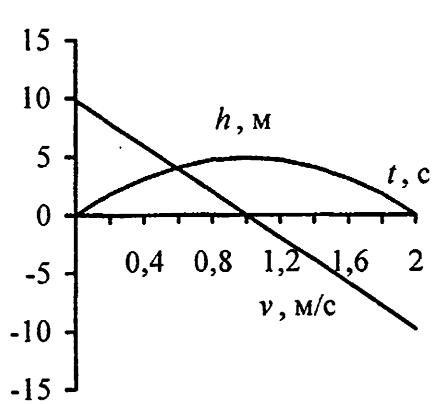
$t = \left(-v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}\right)/g$. Величина t должна быть положительна, следовательно: $t \approx 7{,}3$ с.



Уравнение движения камня: $h = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$, $t \approx 7{,}8$ с.

1.11. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Построить график зависимости высоты h и скорости v от времени t для интервала $0 \le t \le 2$ с через 0,2с.

Решение:



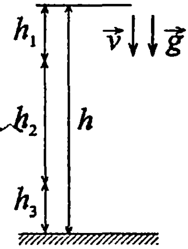
Зависимость скорости и высоты от времени выражается следующими формулами: $v = v_0 - gt$; $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Для заданного интервала составим таблицу и построим график.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
H, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

1.12. Тело падает с высоты $h = 19{,}6$ м с начальной скоростью $v_0 = 0$. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1с своего движения?

Решение:

За первую 0,1 с движения тело пройдет путь $h_1 = gt_1^2/2$; $h_1 = 0{,}049$ м. Весь путь $h = gt^2/2$ тело пройдет за время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с.

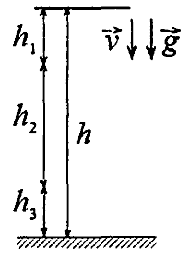


За последнюю 0,1 с движения тело пройдет путь $h_3 = h - h_2$, где h_2 — путь, пройденный телом за время $t_2 = t - 0{,}1$. Так как $h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$, $h_2 = \frac{g(t-0{,}1)^2}{2}$, то путь $h_3 = h - \frac{g(t-0{,}1)^2}{2}$;

$h_3 = 19{,}6 - \frac{9{,}8(2-0{,}1)^2}{2} = 1{,}9$ м.

1.13. Тело падает с высоты $h = 19{,}6$ м с начальной скоростью $v_0 = 0$. За какое время тело пройдет первый и последний 1 м своего пути?

Решение:



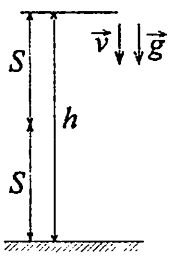
Первый 1 м пути тело пройдет за время $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, где $h_1 = 1$м, таким образом $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}8}} = 0{,}45$ с. Общее время падения $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с. Последний 1 м своего пути тело пройдет за время $t_3 = t - t_2$, где t_2 — время прохождения

пути $h_2 = h - h_3$, а $h_3 = 1$ м. Т.к. $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$, $t_2 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}$

то время $t_3 = t - \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}}$; $t_3 = 0{,}05$ с.

1.14. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты h падает тело и каково время t его падения?

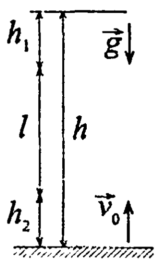
Решение:



Обозначим половину пути за S, тогда $h = 2S$ — (1). Уравнение движения тела: $h = gt^2/2$ — (2). Вторая половина пути $S = vt_2 + \frac{gt_2^2}{2}$, где $v = g(t - t_2)$; $t_2 = 1$с. Тогда $S = gt_2(t-t_2) + gt_2^2/2$ или, с учетом (1), $h = 2gt_2(t-t_2) + gt_2^2$ — (3). Приравняем (2) и (3): $\frac{gt^2}{2} = 2gt_2(t-t_2) + gt_2^2$. Умножив обе части уравнения на 2, разделив на g и раскрыв скобки, получим: $t^2 = 4t_2t - 4t_2^2 + 2t_2^2$. Для удобства вычислений подставим значение t_2: $t^2 - 4t + 2 = 0$. Решим квадратное уравнение. $D = 8$; $t = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$; значение $t = 0{,}6$ — не соответствует условию задачи, тогда $t = 3{,}4$ с; $h = 5 \cdot 3{,}4^2 = 57$ м.

1.15. Тело 1 брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, тело 2 падает с высоты h без начальной скорости. Найти зависимость расстояния l между телами 1 и 2 от времени t, если известно, что тела начали двигаться одновременно.

Решение:



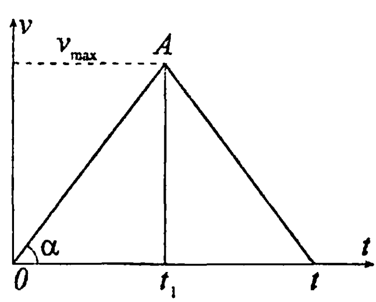
Пусть тела 1 и 2 одинаковы, тогда время движения тела 1 до верхней точки подъема равно времени падения тела 2. Путь, пройденный телом 1: $h_1 = v_0 t - gt^2/2$ — (1); путь, пройденный телом 2 : $h_2 = gt^2/2$ — (2). Расстояние между телами $l = h - (h_1 + h_2)$. Сложив (1) и (2), получим $h_1 + h_2 = v_0 t$, тогда $l = h - v_0 t$.

1.16. Расстояние между двумя станциями метрополитена $l = 1{,}5$ км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую — равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда $v = 50$ км/ч. Найти ускорение a и время t движения поезда между станциями.

Решение:

$l/2 = at_1^2/2$ — при равноускоренном движении поезда. $l/2 = vt_2 - at_2^2/2$ — при его равнозамедленном движении. Общее время движения $t = t_1 + t_2$. Максимальная скорость $v = at_1 = at_2$, следовательно $t_1 = t_2$. Весь путь $l = \frac{at_1^2}{2} + vt_1 - \frac{at_2^2}{2}$. Отсюда $t_1 = \frac{l}{v}$; $v = 50$ км/ч $= 13{,}9$ м/с;

$t_1 = 108$ с $= 1{,}8$ мин; $t = 3{,}6$ мин. $a = \frac{v}{t_1}$; $a = 0{,}13$ м/с^2.



Для решения данной задачи можно также воспользоваться графическим методом. Построим график зависимости скорости поезда от времени. Путь равен площади под кривой или сумме площадей треугольников $0At_1$ и t_1At. Таким образом $l = v_{max}t_1/2 + v_{max}t_2/2$;

$l = \frac{1}{2} v_{max}(t_1 + t_2)$; $l = \frac{1}{2} v_{max} t$. Откуда $t = \frac{2l}{v_{max}} \approx 3{,}6$ мин;

$a = tg\alpha = \frac{v_{max}}{t/2} \approx 0{,}13$ м/с^2.

1.17. Поезд движется со скоростью $v_0 = 36$ км/ч. Если выключить ток, то поезд, двигаясь равнозамедленно, остановится через время $t = 20$ с. Каково ускорение a поезда? На каком расстоянии s до остановки надо выключить ток?

Решение:

Уравнение пути в проекции на направление движения: $s = v_0 t - at^2/2$. Уравнение скорости: $v = v_0 - at$. Т.к. $v = 0$, то $a = v_0/t$; $v_0 = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $a = -0{,}5$ м/с^2; $s = 100$ м.

1.18. Поезд, двигаясь равнозамедленно, в течение времени $t = 1$ мин уменьшает свою скорость от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Найти ускорение a поезда и расстояние s, пройденное им за время торможения.

Решение:

Уравнение скорости: $v_2 = v_1 - at$, откуда ускорение $a = \frac{v_1 - v_2}{t} = 0{,}055$ м/с^2. Путь $s = v_1 t - \frac{at^2}{2}$; $s = 567$ м.

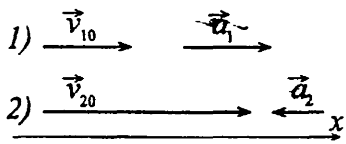
1.19. Поезд движется равнозамедленно, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и ускорение $a = -0{,}5$ м/с^2. Через какое время t и на каком расстоянии s от начала торможения поезд остановится?

Решение:

Уравнение скорости при равнозамедленном движении: $v = v_0 - at$ — (1). Поскольку по условию ускорение уже дано со знаком «–», то из уравнения (1), с учетом $v = 0$, имеем $v_0 = at$, отсюда $t = \frac{v_0}{a}$, где $v_0 = 54$ км/ч $= 15$ м/с. Подставляя числовые данные, получим $t = 30$ с. Путь, с учетом $a < 0$, найдем по формуле $S = v_0 t - at^2/2$; $S = 225$ м.

1.20. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} и ускорение a_1. Одновременно с телом 1 начинает двигаться равнозамедленно тело 2, имея начальную скорость v_{20} и ускорение a_2. Через какое время t после начала движения оба тела будут иметь одинаковую скорость?

Решение:

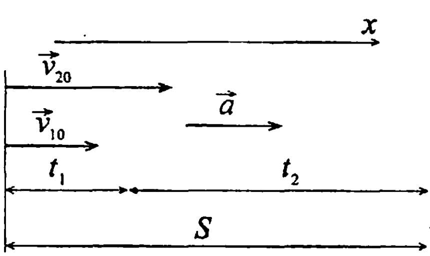


Для первого тела $v = v_{10} + a_1 t$. Для второго тела $v = v_{20} - a_2 t$. Следовательно

$v_{10} + a_1 t = v_{20} - a_2 t$, откуда $t = \frac{v_{20} - v_{10}}{a_1 + a_2}$; $v_{20} > v_{10}$, т.к. $t > 0$.

1.21. Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость $v_{10} = 2$ м/с и ускорение a. Через время $t = 10$ с после начала движения тела 1 из этой же точки начинает двигаться равноускоренно тело 2, имея начальную скорость $v_{20} = 12$ м/с и то же ускорение a. Найти ускорение a, при котором тело 2 сможет догнать тело 1.

Решение:



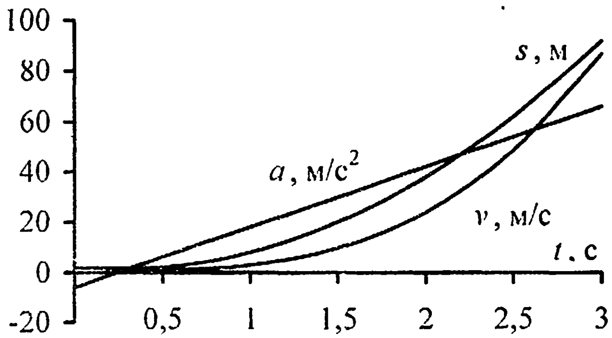
Пусть t — время от начала движения первого тела до встречи, t_1 — время, в течение которого двигалось только тело 1 ($t_1 = 10$ с), t_2 — время от начала движения второго тела до встречи; $t = t_1 + t_2$. Путь, который тела пройдут до встречи: $S = v_{10}t + at^2/2$ — (1); $S = v_{20}t_2 + at_2^2/2$ — (2). Приравняем правые части (1) и (2). $v_{10} + a(t_1 + t_2) = v_{20} + at_2$, отсюда $a = (v_{20} - v_{10})/t_1$; $a = 1$ м/с^2.

1.22. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a от времени t; б) расстояние s, пройденное телом, скорость v и ускорение a тела через время $t = 2$ с после начала движения. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 3$ с через 0,5с.

Решение:

а) Скорость тела $v = dS/dt$; $v = A - 2Bt + 3Ct^2$; $v = 2 - 6t + 12t^2$ м/с. Ускорение тела $a = dv/dt = -2B + 6Ct$; $a = -6 + 24t$ м/с^2.

б) Расстояние, пройденное телом, $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тогда через время $t = 2$ с имеем $s = 24$ м; $v = 38$ м/с; $a = 42$ м/с^2.

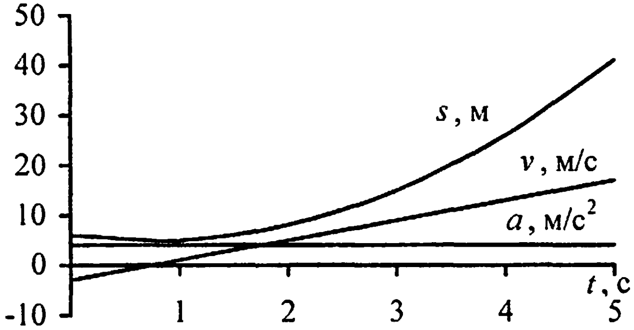


1.23. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $a = 6$ м, $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость $\bar{v}$ и среднее ускорение $\bar{a}$

тела для интервала времени $1 \le t \le 4$ с. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 5$ с через 1с.

Решение:

Средняя скорость тела определяется соотношением $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. По условию $s = A - Bt + Ct^2$, тогда при $t_1 = 1$ с имеем $s_1 = 5$; при $t_2 = 4$ с имеем $s_2 = 26$. Отсюда $\overline{v} = 7$ м/с. Среднее ускорение $\overline{a} = \Delta\overline{v} / \Delta t$. Поскольку $v = s' = -B + {}$ $+ 2Ct^2$, то $v_1 = 1$, $v_2 = 13$, отсюда $\overline{a} = 4$ м/с^2.



1.24. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м, $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость $\overline{v}$ и среднее ускорение $\overline{a}$ тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

Решение:

Средняя скорость $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Пусть $t_0 = 0$; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2$ с; $t_3 = 3$ с. Тогда $\Delta s_1 = s_1 - s_0 = \left(3 + 2t_1 + t_1^2\right) - \left(3 + 2t_0 + t_0^2\right)$; $\Delta s_1 = 2t_1 + t_1^2$; $\overline{v}_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{2t_1 + t_1^2}{t_1 - t_0} = 3$ м/с. Далее, $\Delta s_2 = s_2 - s_1$;

$\Delta s_2 = \left(3 + 2t_2 + t_2^2\right) - \left(3 + 2t_1 + t_1^2\right) = 2\left(t_2 - t_1\right) + t_2^2 - t_1^2$; $\overline{v}_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$

$\bar{v}_2 = \dfrac{2(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = 5$ м/с. Аналогично для $\bar{v}_3 = \dfrac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$; $\bar{v}_3 = \dfrac{2(t_3 - t_2) + t_3^2 - t_2^2}{t_3 - t_1} = 7$ м/с. Среднее ускорение $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Поскольку $v = \dfrac{dS}{dt} = B + 2Ct$, то $v_0 = B + 2Ct_0 = 2$ м/с; $v_0 = B + 2Ct_0 = 2$ м/с; $v_2 = B + 2Ct_2 = 6$ м/с; $v_3 = 8$ м/с. Тогда $\bar{a}_1 = \dfrac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = 2$ м/с^2; $\bar{a}_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 2$ м/с^2; $\bar{a}_3 = \dfrac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$; $\bar{a}_3 = 2$ м/с^2.

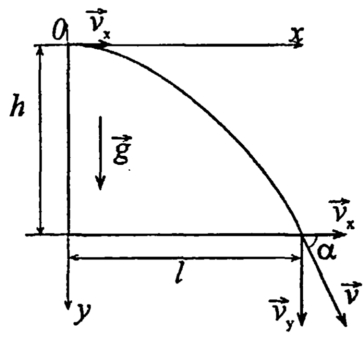
1.25. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через какое время t тело будет иметь ускорение $a = 1$ м/с^2? Найти среднее ускорение $\bar{a}$ тела за этот промежуток времени.

Решение:

Мгновенная скорость $v = \dfrac{dS}{dt}$. Ускорение $a = \dfrac{d^2S}{dt^2}$. Имеем $\dfrac{dS}{dt} = v = B + 2Ct + 3Dt^2$; $\dfrac{d^2S}{dt^2} = 2C + 6Dt$. Таким образом $a = 2C + 6Dt$, откуда $t = a - 2C/6D$; $t = 12$ с. Среднее ускорение $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$. Поскольку $v = B + 2Ct + 3Dt^2$, то можно найти $\Delta v = v_1 - v_0$; $\Delta t = t_1 - t_0$, где $t_1 = 12$ с, $t_0 = 0$. $v_0 = B + 2Ct_0 + 3Dt_0^2$; $v_1 = B + 2Ct_1 + 3Dt_1^2$, отсюда $\Delta v = 2C \times (t_1 - t_0) + 3D(t_1^2 - t_0^2)$; $\bar{a} = \dfrac{2C(t_1 - t_0) + 3D(t_1^2 - t_0^2)}{t_1 - t_0}$; $\bar{a} = 2C + 3D(t_1 - t_0)$; $\bar{a} = 0{,}64$ м/с^2.

1.26. С башни высотой $h = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_x = 15$ м/с. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение:



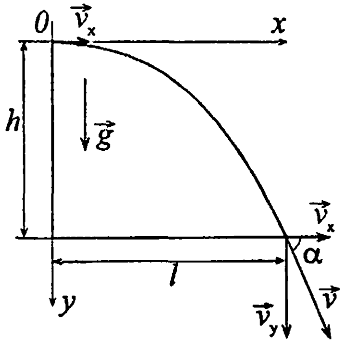
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1): $t = \sqrt{2h/g}$; $t = 2{,}26$ с. Из уравнения (2): $l = v_x t$; $l = 33{,}9$ м. Скорость камня $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Вертикальная составляющая скорости $v_y = gt$, следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$. Искомый угол φ — угол между направлениями вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $cos\,\varphi = v_x / v$;

$cos\,\varphi = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}}$; $cos\,\varphi = 0{,}56$; $\varphi \approx 56°$.

1.27. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время $t = 0{,}5$ с на расстоянии $l = 5$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью v_x он брошен? С какой скоростью он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение:

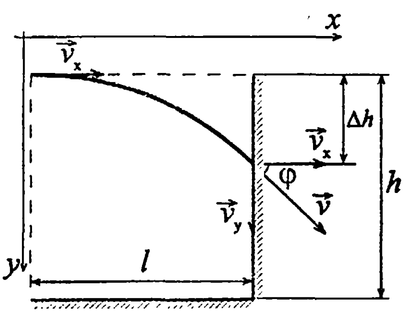
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1)



$h = gt^2/2$; $h = 1{,}22$ м. Из уравнения (2) имеем $v_x = l/t$; $v_x = 10$ м/с. Скорость при падении на землю $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_y = gt$; $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$, т.е. $v \approx 11{,}1$ м/с. Искомый угол φ — угол между вектором скорости v и вектором ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $cos\,\varphi = \frac{v_x}{v}$; $cos\,\varphi = 0{,}9$; $\varphi \approx 26°$.

1.28. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l = 5$ м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на $\Delta h = 1$ м меньше высоты h, с которой брошен мяч. С какой скоростью v_x брошен мяч? Под каким углом φ мяч подлетает к поверхности стенки?

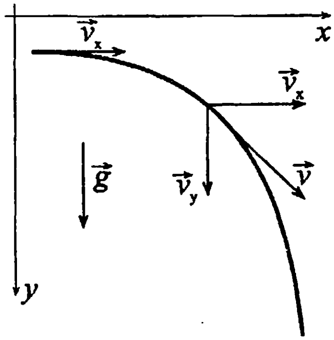
Решение:



Перемещение мяча по вертикали $S_y = h = \frac{gt^2}{2}$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x \times \times t$ — (2). $v_y = gt$; $v_x = l/t$. Из уравнения (1) получим $t = \sqrt{2\Delta h/g}$. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = l\sqrt{g}/\sqrt{2\cdot\Delta h}$; $v_x = 11{,}1$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = g\sqrt{2\Delta h/g}$; $v_y = \sqrt{2g\Delta h}$. Из рисунка видно, что $tg\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{l}{2\Delta h}$; $tg\varphi = 2{,}5$; $\varphi \approx 68°$.

1.29. Камень, брошенный горизонтально, через время $t = 0{,}5$ с после начала движения имел скорость v, в 1,5 раза большую скорости v_x в момент бросания. С какой скоростью v_x был брошен камень?

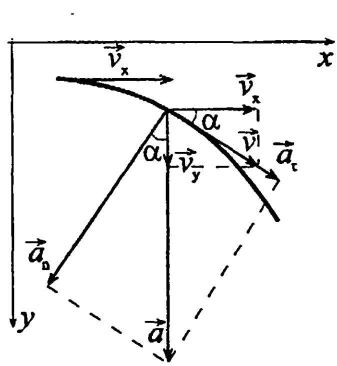
Решение:



Скорость камня $\vec{v}$ можно разложить на вертикальную $\vec{v}_y$ и горизонтальную $\vec{v}_x$ составляющие. По абсолютной величине $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ — (1), где $v_y = gt$. По условию $v = 1{,}5 v_x$, тогда из уравнения (1): $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{(1{,}5 v_x)^2 - (gt)^2}$ — (2). Решая уравнение (2), найдем: $v_x^2 = 2{,}25 \cdot v_x^2 - (gt)^2$; $1{,}25 v_x^2 = (gt)^2$; $v_x = \dfrac{gt}{\sqrt{1{,}25}}$; $v_x = 4{,}47$ м/с.

1.30. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x = 15$ м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время $t = 1$ с после начала движения.

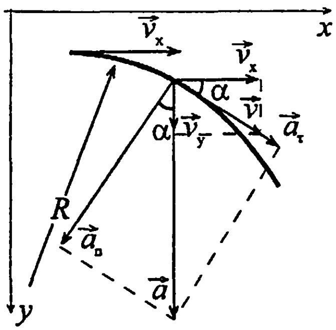
Решение:



Полное ускорение камня $a = g$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_x / v = a_n / g$; $\sin\alpha = v_y / v$; $\sin\alpha = a_\tau / g$. Тогда $a_n = g v_x / v$; $a_n = g v_x / \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$; $a_\tau = g v_y / v$; $a_\tau = g^2 t / \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$; $a_n \approx 8{,}2$ м/с^2, $a_\tau \approx 5{,}4$ м/с^2.

1.31. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x = 10$ м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время $t = 3$ с после начала движения.

Решение:



Нормальное ускорение камня $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ — (1); из рисунка видно, что $a_n = g\sin\alpha$ — (2). Из уравнения (1) $R = \dfrac{v^2}{a_n}$, где $v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}$.

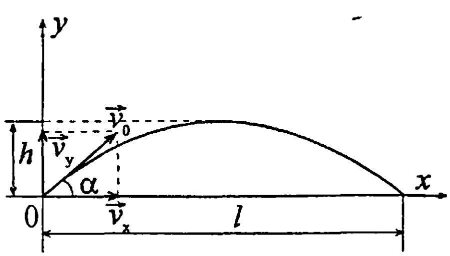
Кроме того, $\sin\alpha = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_y^2 + v_x^2}}$; $v_y = gt$. Сделав соответствующие подстановки, получим

$$R = \frac{\left(v_y^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{v_y^2 + v_x^2}\right)}{v_x g} = \frac{\left((gt)^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{(gt)^2 + v_x^2}\right)}{v_x g};$$

$R = 305$ м.

1.32. Мяч брошен со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 40°$ к горизонту. На какую высоту h поднимется мяч? На каком расстоянии l от места бросания он упадет на землю? Какое время t он будет в движении?

Решение:



Перемещение мяча по вертикали $S_y = (v_0\sin\alpha)\cdot t - gt^2/2$ — (1). Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0\sin\alpha - gt$ — (2). Перемещение мяча по горизонтали $S_x = (v_0\cos\alpha)t$ — (3). В момент времени

$t = t_1$ имеем $S_y = h$, $v_y = 0$, следовательно, из (2) получим $v_0 \sin\alpha = gt_1$ — (4), из (1): $h = (v_0 \sin\alpha) \cdot t_1 - gt_1^2/2$ — (5).

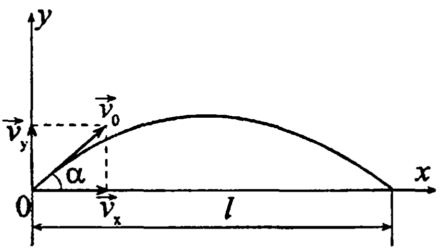
Выразив из (4) t_1 и подставив в (5), получим: $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$;

$h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \dfrac{gv_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \dfrac{v_0^2 - \sin^2\alpha}{2g}$; $h \approx 2$ м. В момент времени $t = 2t_1$ имеем $S_x = l$. Тогда $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ — (6) — полное время полета мяча; $t \approx 1{,}3$ с. Из уравнения (3) $l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$; $l \approx 10$ м.

1.33. На спортивных состязаниях в Ленинграде спортсмен толкнул ядро на расстояние $l_1 = 16{,}2$ м. На какое расстояние l_2 полетит такое же ядро в Ташкенте при той же начальной скорости и при том же угле наклона ее к горизонту? Ускорение свободного падения в Ленинграде $g_1 = 9{,}819$ м/с^2, в Ташкенте $g_2 = 9{,}801$ м/с^2.

Решение:

Воспользуемся формулой (6), полученной в предыдущей задаче: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.



Перемещение ядра по горизонтали $s_x = l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$. Подставив выражение для t, получим: $s_x = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Тогда $l_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_1}$; $l_2 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_2}$. Отсюда отношение $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{g_2}{g_1}$, или $l_2 = \dfrac{l_1 g_1}{g_2} = \dfrac{16{,}2 \cdot 9{,}819}{9{,}801} = 16{,}23$ м.