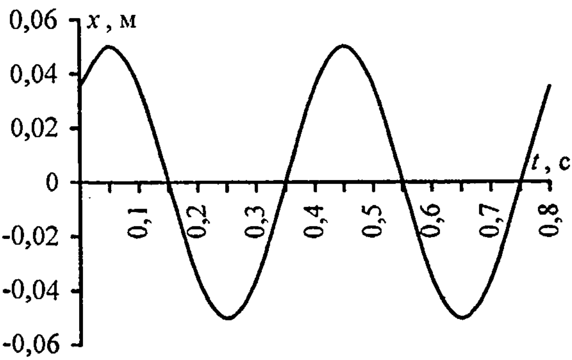
Глава IV
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 12. Гармоническое колебательное движение и волны

В задачах 12.43, 12.55 дан авторский вариант решения.

12.1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см, если за время $t = 1$ мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Начертить график этого движения.

Решение:



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = 2\pi n = 2\pi \dfrac{N}{t}$. По условию $N = 150$, отсюда $\omega = 5\pi$. Подставляя числовые данные, получим уравнение данного колебания $x = 0{,}05\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

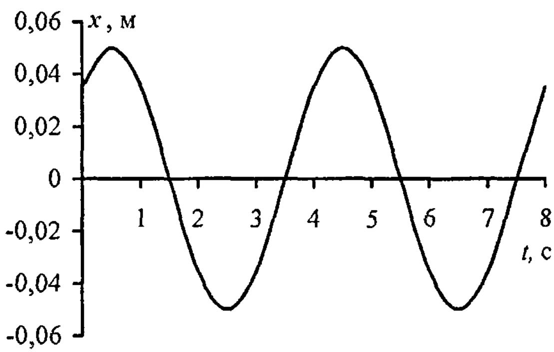
12.2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 0{,}1$ м, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = 0$.

Решение:

Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Подставляя числовые данные, получим $x = 0{,}1\sin\frac{\pi}{2}t$.

12.3. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 50$ мм, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при $t = 0$ и $t = 1{,}5$ с. Начертить график этого движения.

Решение:



Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. В данных условиях

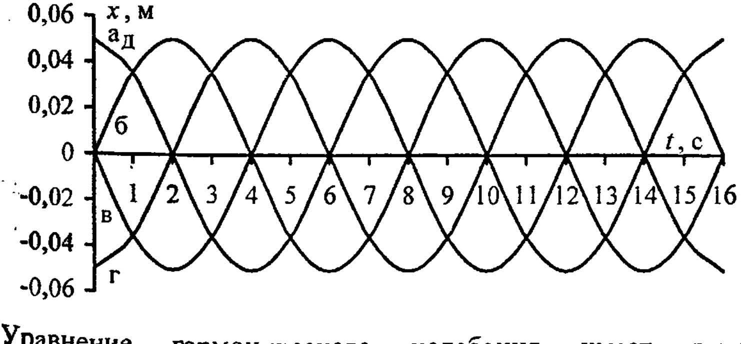
$x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда $x_1 = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4} = 0{,}035$;

$x_2 = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

t, с	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x, м	0,035	0,050	0,035	0	–0,035	–0,050	–0,035	0,000	0,035

12.4. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см и периодом $T = 8$ с, если начальная фаза φ колебаний равна: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) $\frac{3\pi}{2}$; д) 2π. Начертить график этого движения во всех случаях.

Решение:



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Подставим числовые данные. Уравнение гармонического колебательного движения будет иметь вид:

а) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

б) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

в) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right) = -0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

г) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

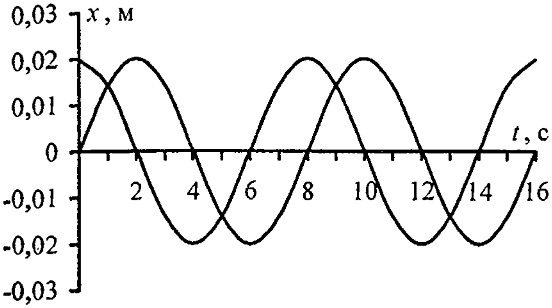
д) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$.

12.5. Начертить на одном графике два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см и одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 8$ с, но имеющие разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$, равную: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 2π.

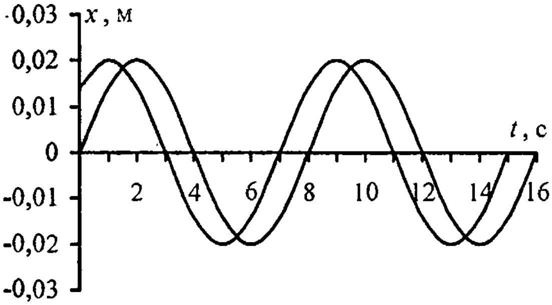
Решение:

Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Пусть начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = 0$, тогда его уравнение будет иметь вид: $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Подставляя числовые данные, для второго колебания получим:

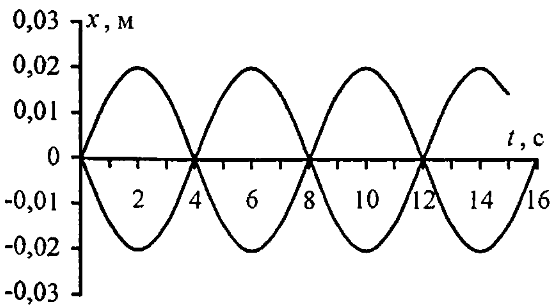
а) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$;



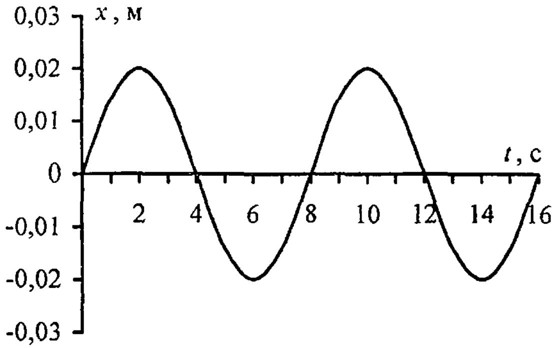
б) $x = 0{,}02\, sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$;



в) $x = 0{,}02\, sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \pi\right)$;



г) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.



12.6. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний $T = 24$ с, начальная фаза $\varphi = 0$.

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Подставляя числовое значение периода T и начальной фазы φ, получим $x = A\,sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$.

По условию $x = \frac{A}{2}$, отсюда $0{,}5 = sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, $\frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}$ или $t = 2$ с.

12.7. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Скорость точки, совершающей колебания, $v = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Максимальной скорости точка достигнет при $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$. Т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$.

По условию $v = \frac{v_{max}}{2}$, тогда $\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\pi}{T}A$; $\cos\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$; $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$; $t = \frac{T}{6}$.

12.8. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

Решение:

По условию точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$. Сопоставляя это уравнение с общим уравнением гармонических колебаний $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$, находим, что период колебаний $T = 4$ с. За время равное периоду колебаний точка совершает одно полное колебание, а прохождение пути от положения равновесия до максимального смещения составляет время $t = \frac{T}{4} = 1$ с.

12.9. Амплитуда гармонического колебания $A = 5$ см, период $T = 4$ с. Найти максимальную скорость v_{max} колеблющейся точки и ее максимальное ускорение a_{max}.

Решение:

Скорость и ускорение точки, совершающей колебания, определяется соотношениями $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ и $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Они имеют максимальные значения соответственно при равенстве синуса и косинуса ± 1, т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = 7{,}85 \cdot 10^{-2}$ м/с и $a_{max} = \left|-\frac{4\pi^2}{T^2} A\right| = 0{,}12$ м/с^2.

12.10. Уравнение движения точки дано в виде $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти период колебаний T, максимальную скорость v_{max} и максимальное ускорение a_{max} точки.

Решение:

Сопоставим уравнение движения точки $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ с общим уравнением гармонических колебаний $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Тогда амплитуда колебаний $A = 2$ см, а период колебаний $T = 4$ с. Максимальная скорость и максимальное ускорение (см. задачу 12.9) $v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ м/с и $a_{max} = \frac{4\pi^2}{T^2} A = 4{,}93 \cdot 10^{-2}$ м/с.

12.11. Уравнение движения точки дано в виде $x = sin\frac{\pi}{6}t$. Найти моменты времени t, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение.

Решение:

Скорость точки $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{6}t$. Максимального значения она достигает при $cos\frac{\pi}{6}t = \pm 1$ или $\frac{\pi}{6}t = n\pi$, где $n = 0$, 1, 2, 3... Соответствующие моменты времени $t = 0$, 6, 12, 18 с ... Ускорение точки $a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{36}sin\frac{\pi}{6}t$ будет максимальным при $sin\frac{\pi}{6}t = 1$ или $\frac{\pi}{6}t = \frac{(2n+1)\pi}{2}$. Отсюда найдем моменты времени t, соответствующие максимальному ускорению: $t = 3, 9, 15$ с ...

12.12. Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi = 0$. Найти скорость v точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

Решение:

Уравнение колебания точки имеет вид: $x = A sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, откуда $t = \frac{arcsin(x/A)}{2\pi/T} = \frac{1}{6}$ с. Скорость точки $v = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{2\pi}{T}A cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Подставив полученное значение t, получим $v = 13,6$ см/с.

12.13. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49,3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

Решение:

Из уравнения для максимального ускорения (см. задачу 12.9) $a_{max} = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$ найдем амплитуду колебаний $A = \frac{a_{max}T^2}{4\pi^2} = 5$ см. Подставив значения амплитуды и периода в уравнение гармонических колебаний, получим $x = 5\,sin(\pi t + \varphi_0)$ — (1). Начальную фазу колебаний найдем из условия, что при $t = 0$ $x = x_0$. Тогда уравнение (1) примет вид: $x_0 = 5\,sin\,\varphi_0$, откуда $sin\,\varphi_0 = \frac{x_0}{5}$ и $\varphi_0 = arcsin\frac{x_0}{5} = \frac{\pi}{6}$. Подставляя начальную фазу в уравнение (1), окончательно получаем $x = 5\,sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

12.14. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. При смещении точки от положения равновесия $x_1 = 2{,}4$ см скорость точки $v_1 = 3$ см/с, а при смещении $x_2 = 2{,}8$ см ее скорость $v_2 = 2$ см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

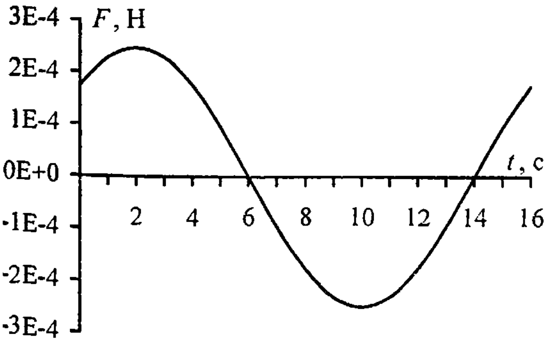
Решение:

Т. к. по условию начальная фаза $\varphi = 0$, то уравнения для смещения и скорости будут иметь следующий вид: $x = A\,sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1) и $v = \frac{2\pi}{T}A\,cos\frac{2\pi}{T}t$ — (2). Из уравнения (1) находим $sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{x}{A}$ или $cos\frac{2\pi}{T}t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ —

(3). Подставляя (3) в (2), получаем $v = \frac{2\pi}{T} A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ или $v^2 = \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x^2\right)$. Для заданных значений смещения и скорости получаем $v_1^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_1^2\right)$ — (4) и $v_2^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_2^2\right)$ — (5). Разделим (4) на (5), тогда $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$ или $v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2 = \left(v_1^2 - v_2^2\right)A^2$. Отсюда $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 3{,}1$ см. Из уравнения (4) период колебаний $T = \frac{2\pi}{v_1}\sqrt{A^2 - x_1^2} = 4{,}1$ с.

12.15. Уравнение колебания материальной точки массой $m = 16$ г имеет вид $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) силы F, действующей на точку. Найти максимальную силу F_{max}.

Решение:



Т. к. уравнение колебания имеет вид $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$, то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 0{,}1\frac{\pi^2}{64}\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Сила, под действием которой точка массой m совершает гармоническое колебание, $F = ma = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64}\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Эта сила будет максимальной, когда $\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $t_{max} = 2$ с. Тогда $F_{max} = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64} = 246$ мкН. Для построения графика необходимо также найти пересечение с осью абсцисс $\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда $t_0 = 6$ с. Подставляя числовые данные, построим график зависимости в пределах одного периода.

12.16. Уравнение колебаний материальной точки массой $m = 10$ г имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти максимальную силу F_{max}, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

Решение:

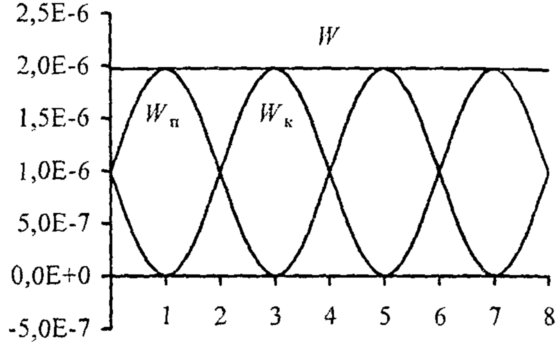
Т. к. уравнение колебаний имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ — (1), то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{\pi^2}{25}\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда максимальная сила, действующая на точку (см. задачу 12.15),

$F_{max} = m\dfrac{\pi^2}{5} = 197$ мкН. Кинетическая энергия материальной точки равна $W_к = \dfrac{mv_x^2}{2} = \dfrac{kA^2\omega^2 cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. Потенциальная энергия материальной точки равна $W_п = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kA^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$, а т. к. $k = m\omega^2$, то $W_п = \dfrac{m\omega^2 A^2 sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. При этом за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия ($x = 0$). Полная энергия колеблющейся точки $W_0 = W_k + W_n = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ или, с учетом $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, имеем $W = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$ — (2). Из уравнения (1) амплитуда $A = 5$ см и период $T = 10$ с, подставляя их в уравнение (2), получаем $W = 4{,}93$ мкДж.

12.17. Уравнение колебания материальной точки массой $m = 16$ г имеет вид $x = 2 sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергии точки.

Решение:

Уравнения для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \dfrac{\omega^2 m}{2} \times$ $\times A^2 cos^2(\omega t + \varphi)$ и $W_п = \dfrac{\omega^2 m}{2} A^2 sin^2(\omega t + \varphi)$. Полная энергия колеблющейся точки $W = \dfrac{\omega^2 m}{2} A^2$ (см. задачу 12.16).



По условию $A = 2$ см, $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Подставляя числовые данные, получим $W_к = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} cos^2\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W_п = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} sin^2\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W = 2\pi^2 \cdot 10^{-7}$ Дж.

12.18. Найти отношение кинетической $W_к$ энергии точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии $W_п$ для моментов времени: а) $t = \frac{T}{12}$; б) $t = \frac{T}{8}$; в) $t = \frac{T}{6}$. Начальная фаза колебаний $\varphi = 0$.

Решение:

Т. к. по условию начальная фаза колебаний $\varphi = 0$, то уравнения для кинетичеекой и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 cos^2 \frac{2\pi}{T} t$ и $W_п = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 sin^2 \frac{2\pi}{T} t$. Тогда отношение энергии $\frac{W_к}{W_п} = \frac{cos^2(2\pi t / T)}{sin^2(2\pi t / T)} = ctg^2(2\pi t / T)$.

а) Если $t = \frac{T}{12}$, то $\frac{W_к}{W_п} = ctg^2 \frac{\pi}{6} = 3$. б) Если $t = \frac{T}{8}$, то $\frac{W_к}{W_п} = ctg^2 \frac{\pi}{4} = 1$. в) Если $t = \frac{T}{6}$, то $\frac{W_к}{W_п} = ctg^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$.

12.19. Найти отношение кинетической энергии $W_к$ точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии $W_п$ для моментов, когда смещение точки от положения равновесия составляет: а) $x = \frac{A}{4}$; б) $x = \frac{A}{2}$; в) $x = A$, где A — амплитуда колебаний.

Решение:

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Отсюда $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = \frac{x}{A}$, или из основного тригонометрического тождества $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$. Тогда отношение кинетической энергии к потенциальной (см. задачу 12.18) $\frac{W_к}{W_п} = \frac{\cos^2((2\pi t/T) + \varphi)}{\sin^2((2\pi t/T) + \varphi)} = \frac{A^2 - x^2}{x^2}$. а) Если $x = \frac{A}{4}$, то $\frac{W_к}{W_п} = 15$. б) Если $x = \frac{A}{2}$, то $\frac{W_к}{W_п} = 3$. в) Если $x = A$, то $\frac{W_к}{W_п} = 0$.

12.20. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = 30$ мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{max} = 1{,}5$ мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$ — (1), а максимальная сила, действующая на тело, $F_{max} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} A$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F_{max}} = \frac{A}{2}$, отсюда амплитуда колебаний $A = \frac{2W}{F_{max}} = 0{,}04$ м. Подставляя амплитуду колебаний, период колебаний и начальную фазу в общее уравнение гармонических колебаний $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, окончательно получаем $x = 0{,}04\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

12.21. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $W = 0{,}3$ мкДж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 22{,}5$ мкН?

Решение:

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$ — (1), а сила, действующая на тело, $F = \frac{4\pi^2 m}{T^2} x$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F} = \frac{A^2}{2x}$, отсюда смещение точки от положения равновесия $x = \frac{A^2 F}{2W} = 1{,}5$ см.

12.22. Шарик, подвешенный на нити длиной $l = 2$ м, отклоняют на угол $\alpha = 4°$ и наблюдают его колебания. Полагая колебания незатухающими гармоническими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия. Проверить полученное решение, найдя скорость шарика при прохождении им положения равновесия из уравнений механики.

Решение:

Уравнение колебательного движения шарика имеет вид: $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1). При малых отклонениях шарика от положения равновесия его амплитуда $A = l\sin\alpha \approx 0{,}14$ м. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}8$ с. Тогда уравнение (1) примет вид: $x = 0{,}14\sin\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м. Момент времени $t = 0$ соответствует положению равновесия. Скорость шарика $v = \frac{dx}{dt} = \frac{0{,}14\cdot 2\pi}{2{,}8}\cos\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м/с. Максимального значения скорость достигает при прохождении шариком положения равновесия, т. е. $v_{max} = \frac{0{,}14\cdot 2\pi}{2{,}8} = 0{,}31$ м/с. Решая данную задачу по законам механики, имеем $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ (см. задачу 2.108). Подставляя числовые данные, получим $v = 0{,}31$ м/с.

12.23. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 9{,}8$ Н растягивается на $l = 1{,}5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.

Решение:

По закону Гука сила упругости $F = -kx$ (знак «минус» говорит о том, что F — возвращающая сила), откуда $k = \frac{|F|}{x}$ — (1) — коэффициент жесткости пружины.

Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид $m\ddot{x} = -kx$ — (2). Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, преобразуем уравнение (2) следующим образом: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период колебаний вертикального пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (3). Подставляя (1) в (3), окончательно получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}} = 0{,}78$ с.

12.24. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{\text{к}\,max} = 1$ Дж. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Найти жесткость k пружины.

Решение:

Кинетическая энергия колебаний груза $W_\text{к} = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \times$ $\times A^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ имеет максимальное значение, когда $cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, т. е. $W_{\text{к}max} = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1). Период колебаний груза на пружине $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Возведя (2) в квадрат и подставив в (1), получим $W_{\text{к}\,max} = \frac{2\pi^2 m}{4\pi^2 m} \times$ $\times A^2 k = \frac{1}{2}A^2 k$. Откуда найдем жесткость пружины $k = \frac{2W_{\text{к}\,max}}{A^2} = 800$ Н/м.