12.25. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

Решение:

Сила упругости пружины по закону Гука $F = kx$. Если к пружине подвесить груз массой m, то в положении равновесия $mg = kx$, отсюда удлинение пружины $x = \frac{mg}{k}$.

Если две пружины соединить последовательно, то их удлинения будут равны, а общее удлинение составит $x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}$ — (1). С другой стороны, $x_2 = \frac{mg}{k_1}$ — (2), отсюда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}$ или $k_1 = \frac{k}{2}$. При параллельном соединении пружин общая жесткость системы $k_2 = 2k$. Таким образом, периоды колебаний при последовательном и параллельном соединении пружин соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$, а их отношение $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2$.

12.26. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?

Решение:

Периоды колебаний медного и алюминиевого шариков соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, а их отношение $\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}$. Т. к. по условию радиусы шариков равны, то равны и их объемы, а значит, $\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}}$, где $\rho_1=8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 и $\rho_2=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотности меди и алюминия, тогда $\dfrac{T_1}{T_2}=1{,}82$.

12.27. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний $T_1=0{,}5$ с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным $T_2=0{,}6$ с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

Решение:

Имеем $T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ — (1); $T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{(m+\Delta m)}{k}}$ — (2). Возведя (1) и (2) в квадрат, а затем вычтя (1) из (2), получим $T_2^2-T_1^2=4\pi^2\dfrac{\Delta m}{k}$. Жесткость пружины $k=\dfrac{F}{\Delta l}=\dfrac{\Delta mg}{\Delta l}$. Тогда $T_2^2-T_1^2=4\pi^2\dfrac{\Delta l}{g}$, откуда $\Delta l=\dfrac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2-T_1^2\right)=0{,}027$ м.

12.28. К резиновому шнуру длиной $l=40$ см и радиусом $r=1$ мм подвешена гиря массой $m=0{,}5$ кг. Зная, что модуль Юнга резины $E=3$ МН/м^2, найти период T вертикальных колебаний гири. Указание: учесть, что жесткость k резины связана с модулем Юнга E соотношением $k=\dfrac{SE}{l}$, где S — площадь поперечного сечения резины, l — ее длина.

Решение:

Жесткость пружины связана с модулем Юнга соотношением $k = \frac{SE}{l}$ — (1). Период колебаний гири $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{SE}}$ — (3). Площадь поперечного сечения шнура $S = \pi r^2$ — (4), тогда, подставляя (4) в (3), окончательно находим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\pi r^2 E}} = 0{,}93$ с.

12.29. Ареометр массой $m = 0{,}2$ кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом $T = 3{,}4$ с. Считая колебания незатухающими, найти плотность жидкости ρ, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 1$ см.

Решение:

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх, и сила тяжести $\vec{P}$, направленная вниз. Условие равновесия имеет вид: $\vec{P} + \vec{F}_A = 0$ или в скалярном виде $P = F_A$ — (1). Имеем $P = mg$; $F_A = \rho g(V + Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда $mg = \rho g(V + Sh)$. При погружении ареометра на глубину x результирующая выталкивающая сила $F = \rho g(V + S(h + x)) - mg$; $F = \rho g(V + S(h + x)) - \rho g(V + Sh)$; $F = \rho g S x$. Эта сила и вызывает колебания ареометра, т. е. можно записать $F = -kx$, где $k = \rho g S = \rho g \frac{\pi d^2}{4}$ — (2).

Уравнение второго закона Ньютона для ареометра имеет вид $m\ddot{x} = -kx$ — (3). Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, преобразуем уравнение (3) следующим образом: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период данных колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (4). Подставляя (2) в (4), получим $T = \frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$, откуда $\rho = \frac{16\pi m}{T^2 d^2 g} = 0{,}89 \cdot 10^3$ кг/м^3.

12.30. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом $T = 8$ с и одинаковой амплитудой $A = 0{,}02$ м. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

Решение:

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ и с начальной фазой, определяемой уравнением $tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$, где A_1 и A_2 — амплитуды слагаемых колебаний, φ_1 и φ_2 — их начальные фазы. Подставляя числовые данные, получим $A = \sqrt{2\cdot(0{,}02)^2 + 2(0{,}02)^2\cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}037$ м;

$\varphi = arctg\dfrac{sin(\pi/4)}{1+cos(\pi/4)} = \dfrac{\pi}{8}$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{4}$. Отсюда уравнение результирующего движения $x = 0{,}037\,cos\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

12.31. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 0{,}02 \times \times sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ м и $x_2 = 0{,}03\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ м.

Решение:

Из уравнений колебаний $x_1 = 0{,}02\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $x_2 = 0{,}03\,sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1 = 0{,}02$ м и $A_2 = 0{,}03$ м и их начальные фазы $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 1A_1A_2\,cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0{,}045$ м. Начальная фаза колебания определяется из уравнения $tg\varphi = \dfrac{A_1\,sin\,\varphi_1 + A_2\,sin\,\varphi_2}{A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,\varphi_2} = 1{,}94$. Тогда $\varphi = arctg1{,}94 = 62{,}75°$.

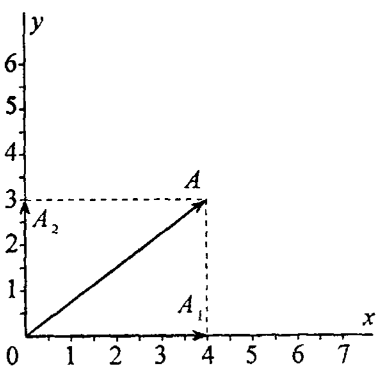
12.32. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

Решение:

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+1A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$ — (1). Т. к. по условию $A_1=A_2=A$, то уравнение (1), возведенное в квадрат, примет вид $A^2=A^2+A^2+2A^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$, откуда $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-\frac{1}{2}$. Тогда разность фаз складываемых колебаний $\varphi_2-\varphi_1=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=120°=\frac{2\pi}{3}$.

12.33. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=4\sin\pi t$ см и $x_2=\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ см. Написать уравнение результирующего колебания. Дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

Решение:



Из уравнения колебаний $x_1=4\sin\pi t$ и $x_2=3\times\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1=4$ см и $A_2=3$ см и их начальные фазы $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. Амплитуда и фаза результирующего колебания (см. задачу 12.31)

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5$ см,

$tg\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = 0{,}73$, следовательно,

$\varphi = arctg\,0{,}73 = \dfrac{\pi}{5}$. Тогда уравнение результирующего колебания будет иметь вид $x = 5\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{5}\right)$. Для построения векторной диаграммы отложим от начала отсчета векторы, длины которых равны амплитудам A_1 и A_2. Т. к. $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, то оба вектора лежат на осях координат. Сложив векторы по правилу параллелограмма, получим вектор амплитуды результирующего колебания.

12.34. На рис. 1 дан спектр результирующего колебания. Пользуясь данными этого рисунка, написать уравнения колебаний, из которых составлено результирующее колебание. Начертить график этих колебаний. Принять, что в момент $t = 0$ разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Начертить график результирующего колебания.

Решение:

По спектру сложного колебания найдем амплитуду и частоту каждого из составляющих колебаний. Имеем: $A_1 = 0{,}03$ м; $\nu_1 = 0{,}2$ Гц; $A_2 = 0{,}02$ м; $\nu_2 = 0{,}5$ Гц; $A_3 = 0{,}01$ м; $\nu_3 = 1$ Гц.

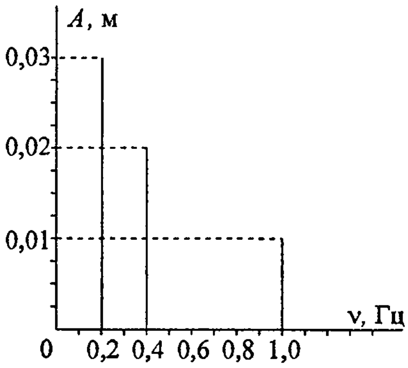


Рис. 1

Тогда уравнения этих колебаний будут иметь вид $x = 0{,}03\,sin\frac{2\pi}{5}t$ м ; $x = 0{,}02\,sin\,\pi t$ м ; $x = 0{,}01\,sin\,2\pi$ м. Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.2). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.3).

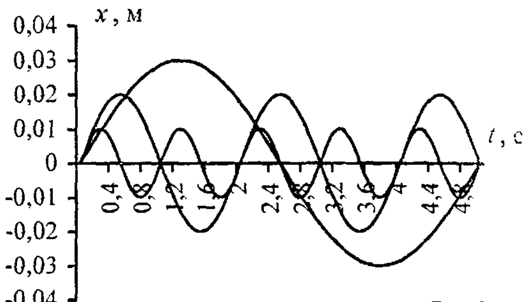


Рис.2

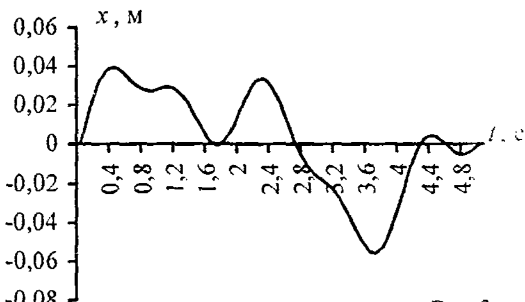


Рис.3

t, с	0	0,5	1	1,5	2	2,5
x_1, см	0,000	1,763	2,853	2,854	1,766	0,005
x_2, см	0,000	2,000	0,003	–2,000	–0,006	2,000
x_3, см	0,000	0,002	–0,003	0,005	–0,006	0,008
x, см	0,000	3,764	2,853	0,859	1,754	2,013

t, с	3	3,5	4	4,5	5
x_1, см	–1,759	–2,851	–2,856	–1,770	–0,010
x_2, см	0,010	–2,000	–0,013	2,000	0,016
x_3, см	–0,010	0,011	–0,013	0,014	–0,016
x, см	–1,759	–4,840	–2,881	0,244	–0,010

12.35. Уравнения двух гармонических колебаний имеют вид $x_1 = 3\sin 4\pi t$ см и $x_2 = 6\sin 10\pi t$ см. Построить график этих колебаний. Сложив графически эти колебания, построить график результирующего колебания. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение:

Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.1). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.2). Из уравнений колебаний найдем амплитуду и частоту каждого из них. Имеем: $A_1 = 0{,}03$ м ; $\nu_1 = 2$ Гц ; $A_2 = 0{,}06$ м ;

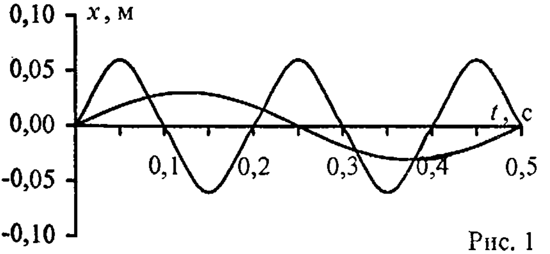


Рис. 1

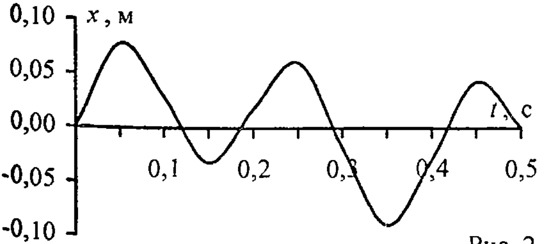


Рис. 2

$\nu_2 = 5$ Гц. По этим данным начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

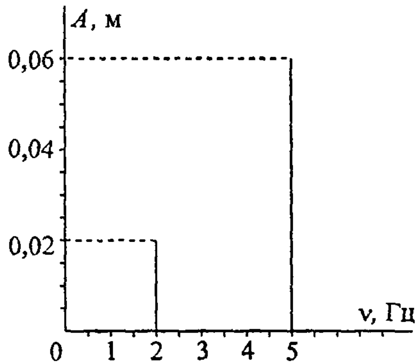


Рис. 3

12.36. Уравнение колебаний имеет вид $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$, причем амплитуда A изменяется со временем по закону $A = A_0(1+\cos 2\pi\nu_2 t)$. Из каких гармонических колебаний состоит колебание? Построить график слагаемых и результирующего колебаний для $A_0 = 4$ см, $\nu_1 = 2$ Гц, $\nu_2 = 1$ Гц. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение:

По условию $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$ — (1); $A = A_0(1+\cos 2\pi\nu_2 t)$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим

$x = A_0(1+\cos 2\pi\nu_2 t)\sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0 \sin 2\pi\nu_1 t + A_0 \cos 2\pi\nu_2 t \sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0 \sin 2\pi\nu_1 t + A_0 / 2\sin(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t) +$

$+ A_0 / 2\sin(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t)$. Т. е. данное колебание состоит из трех гармонических колебаний. Подставляя числовые данные, построим график слагаемых (рис.1), график результирующего колебания (рис.2) и начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

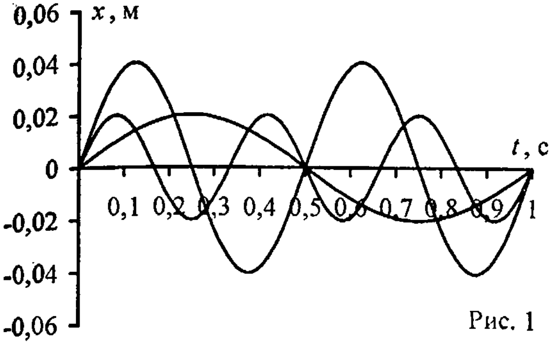


Рис. 1

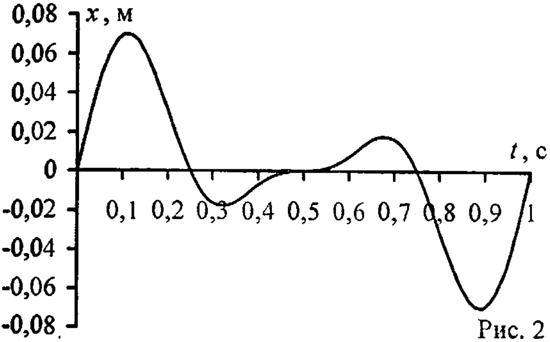


Рис. 2

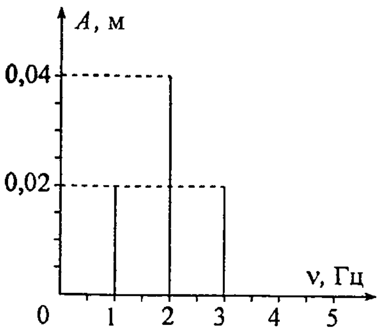


Рис. 3

12.37. Написать уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой $\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц и одинаковой начальной фазой $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 0{,}10$ м и $A_2 = 0{,}05$ м.

Решение:

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода уравнение траектории результирующего колебания имеет вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \times$ $\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ — (1). Т. к. у нас $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то уравнение (1) примет вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \; - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$, или $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$, откуда $y = \frac{A_2}{A_1}x$ — уравнение прямой линии. Таким образом, результирующее колебание будет происходить по прямой линии. Угол наклона прямой найдется из уравнения $tg\alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0.5$, т. е. $\alpha = 26°34'$.

Период результирующего колебания равен периоду слагаемых колебаний, а амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11{,}2$ см. Следовательно, уравнение результирующего колебания имеет вид: $s = 11{,}2 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ см.

12.38. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду A результирующего колебания, если колебания совершаются: а) в одном направлении; б) в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Решение:

а) В случае сложения одинаково направленных колебаний амплитуда результирующего колебания $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$. Учитывая, что $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$, найдем $A=0{,}07$ м. б) В случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний амплитуда результирующего колебания $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$; $A=0{,}05$ м.

12.39. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x=2\sin\omega t$ м и $y=2\cos\omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение:

Из уравнений колебаний $x=2\sin\omega t$ – (1) и $y=2\cos\omega t$ – (2) исключим время. Из уравнения (1) $\sin\omega t=\dfrac{x}{2}$, из основного тригонометрического тождества $\cos\omega t=$ $=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ — (3). Подставив (3) в (2), получаем $y=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ или $y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=4-x^2$. Отсюда после преобразования получим уравнение окружности радиусом $R=2$ м, которое имеет вид $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

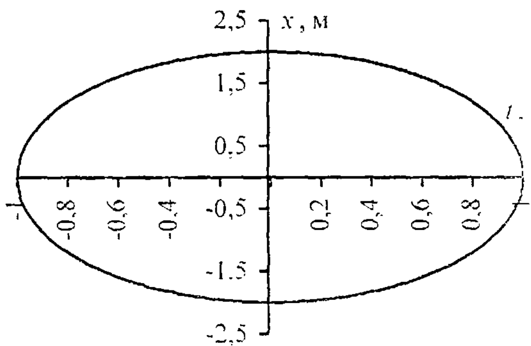
12.40. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x=\cos\pi t$ и $y=\cos\dfrac{\pi}{2}t$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение:

Имеем $y = cos\frac{\pi}{2}t = \sqrt{\frac{1+cos\,\pi t}{2}}$, откуда $2y^2 - 1 = cos\,\pi t$. По условию $x = cos\,\pi t$, отсюда $\frac{2y^2-1}{x} = 1$ или $2y^2 - x = 1$ — уравнение параболы.

12.41. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = sin\,\pi t$ и $y = 2sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение:

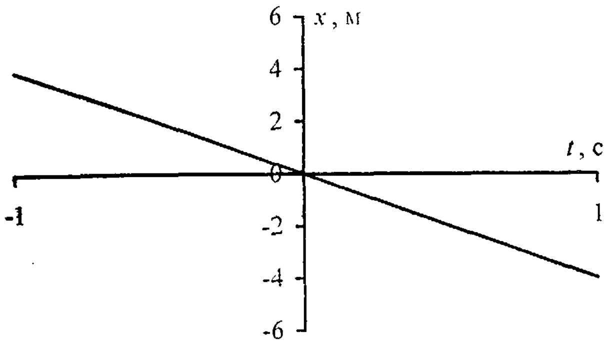


При сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебательных движений материальной точки, описываемых уравнениями $x = a\,cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$ и $y = b\,cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$, траектория результирующего движения материальной точки описывается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}cos\,\alpha = sin^2\alpha$, где разность фаз складываемых колебаний $\alpha = \varphi_{01} - \varphi_{02}$. У нас $a = 1$, $b = 2$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$, т. е. траектория точки — эллипс.

12.42. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin \pi t$ и $y = 4\sin(\pi t + \pi)$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение:

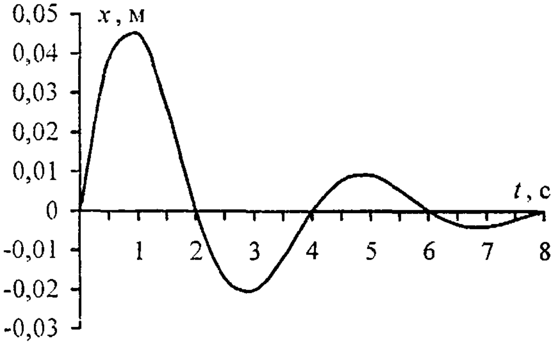


Из уравнений колебаний $x = \sin \pi t$ — (1); $y = 4\sin(\pi t + \pi)$ — (2) исключим время. Для этого преобразуем уравнение (2), используя формулу синуса суммы: $\sin(\pi t + \pi) = \sin \pi t \cos \pi + \cos \pi t \sin \pi = -\sin \pi t$, т. к. $\cos \pi = -1$ и $\sin \pi = 0$. Тогда уравнение (2) примет вид $y = -4\sin \pi t$ — (3). Подставляя (1) в (3), получаем уравнение траектории $y = -4x$, т. е. траекторией является прямая.

12.43. Период затухающих колебаний $T = 4$ с; логарифмический декремент затухания $\aleph = 1{,}6$; начальная фаза $\varphi = 0$. При $t = \frac{T}{4}$ смещение точки $x = 4{,}5$ см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

Решение:

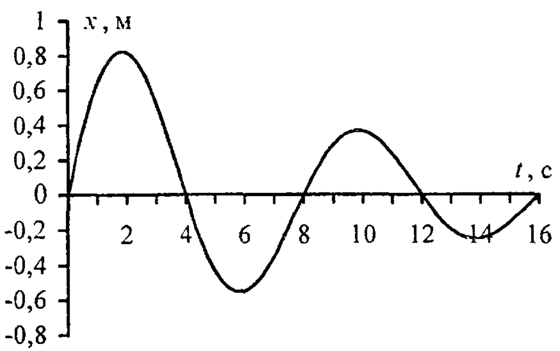
Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$, откуда $\delta = \frac{\aleph}{T} = 0{,}4\ \text{с}^{-1}$. По условию $t = \frac{T}{4}$, т. е. $t = 1$ с. Зная значение x в этот момент времени, найдем амплитуду. Подставляя числовые данные, получим $A = 6{,}7$ м. Тогда уравнение движения имеет вид $x = 6{,}7e^{-0{,}4t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ — (2). Для построения графиков колебания найдем моменты времени t_1, t_2, t_3... соответствующие максимальным значениям смещения x. Максимум x найдется из условия $v = \frac{dx}{dt} = 0$. Из уравнения (1) находим (при $\varphi = 0$) $v = A\omega e^{-\delta t}\cos\omega t - A\delta e^{-\delta t}\sin\omega t = 0$; отсюда $tg\omega t = \frac{\omega}{\delta} = \frac{2\pi}{\aleph}$ — (3). Из уравнения (3) видно, что при незатухающих колебаниях, когда $\aleph = 0$, величина $tg\omega t = \infty$ или $\omega t = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{2}$, или $t = \frac{T}{4}$. В нашем же случае $tg\omega t = \frac{2\pi}{\aleph} = 3{,}925$, т. е. $\omega t = 75°42' \approx 0{,}421\pi$, откуда $t = 0{,}421\frac{\pi}{\omega} = 0{,}842$ с. Таким образом, $x = x_{max}$ при $t_1 = 0.842$ с; $t_2 = t_1 + \frac{T}{2} = 2{,}842$ с, $t_3 = t_1 + T = 4{,}842$ с и $t_4 = t_1 + \frac{3T}{2} = 6{,}842$ с и т.д. Подставляя соответствующие числовые значения в (2), получим $x_1 = 0,1$ см; $x_2 = 0,17$ см; $x_3 = 0,12$ см; $x_4 = 0,08$ см. По полученным данным построим график.



12.44. Построить график затухающего колебания, данного уравнением $x = 5e^{-0,1t} \sin\frac{\pi}{4}t$ м.

Решение:

Подставляя значения t в интервале от 0 до $2T$, построим график данного колебания (см. задачу 12.43)



12.45. Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Найти скорость v колеблющейся точки в моменты времени t, равные: 0, T, $2T$, $3T$ и $4T$.

Решение:

Скорость точки, совершающей колебания, в том числе затухающие, определяется соотношением $v = \frac{dx}{dt}$ — (1). По условию смещение $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $v = \frac{d}{dt}\left(5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$; $v = 5e^{-0,25t}\times$ $\times\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t - 0,25\sin\frac{\pi}{2}t\right)$. Подставляя числовые данные, составим таблицу:

t, с	0	T	$2T$	$3T$	$4T$
v, м/с	7.85	2.89	1,06	0.39	0.15

12.46. Логарифмический декремент затухания математического маятника $\aleph = 0.2$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

Решение:

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0\,exp\left(-\aleph\frac{t}{T}\right)$; $A_2 = A_0\,exp\left(-\aleph\frac{t+T}{T}\right)$, откуда $\frac{A_1}{A_2} =$ $= e^{\aleph} = 1,22$.

12.47. Найти логарифмический декремент затухания $\aleph$ математического маятника, если за время $t = 1$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника $l = 1$ м.

Решение:

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 \times \exp\left(-\varkappa \frac{t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Из уравнения (1) с учетом (2) получаем $\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{\varkappa t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). По условию $\frac{A_0}{A_1} = 2$, тогда из уравнения (3) получим $\exp\left(\frac{\varkappa t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 2$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $\frac{\varkappa t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \ln 2$, откуда логарифмический декремент затухания $\varkappa = \frac{2\pi}{t}\sqrt{\frac{l}{g}}\ln 2 = 0{,}023$.

12.48. Математический маятник длиной $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания. Через какое время t энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: а) $\varkappa = 0{,}01$; б) $\varkappa = 1$.

Решение:

Для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 \exp\left(-\varkappa \frac{t}{T}\right)$ или $\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{\varkappa t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{\varkappa t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). Полная энергия колебаний

$W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$, и по условию $\frac{W_0}{W_1} = k$, где $k = 9{,}4$ раза, тогда $k = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$ или, с учетом (3), $k = exp\left(\frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $ln\, k = \frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Отсюда время, за которое энергия колебаний уменьшится в k раз, $t = \frac{\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\, ln\, k$ — (5). Подставляя в (5) значение логарифмического декремента затухания, находим: а) для $\aleph_1 = 0{,}01$ время $t_1 = 144$ с; б) для $\aleph_2 = 1$ время $t_2 = 1{,}14$ с.

12.49. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\aleph = 0{,}2$. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

Решение:

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Для нахождения ускорения маятника продифференцируем дважды по времени уравнение (1). Имеем: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)\right]$;

$v = Ae^{-\delta t}\left[-\delta\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right]$ — (2) — скорость колебаний маятника. Тогда $v = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \times$

$\times\left[Ae^{-\delta t}\left(-\delta\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right)\right]$;

$v = Ae^{-\delta t}\left(\left(\delta^2 + \omega^2\right)\sin(\omega t + \varphi) + \delta\omega\cos(\omega t + \varphi)\right)$ — (3). Из уравнения (3) находим

$$\frac{a_0}{a} = \frac{-Ae^0\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right)\sin\varphi + \delta\,\omega\cos\varphi\right]}{-Ae^{-\delta T}\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right)\sin(2\pi + \varphi) + \delta\,\omega\cos(2\pi + \varphi)\right]};$$

$\frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$ — (4). По определению логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (5), тогда, подставляя (5) в (4), окончательно получаем $\frac{a_0}{a} = e^{\aleph} = 1{,}22$.

12.50. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t = 3$ мин?

Решение:

Отношение начальной и конечной амплитуд колебаний (см. задачу 12.48) $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (1).

Прологарифмируем уравнение $ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) = \frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, отсюда время уменьшения амплитуды $t = \frac{2\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\, ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)$.

Следовательно, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{ln(A_0 / A_1)}{ln(A_0 / A_2)}$, отсюда $ln\frac{A_0}{A_2} = \frac{t_2}{t_1} ln\frac{A_0}{A_1}$, следовательно, $\frac{A_0}{A_2} = exp\left(\frac{t_2}{t_1} ln\frac{A_0}{A_1}\right) = 8$.

12.51. Математический маятник длиной $l = 0{,}5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1 = 5$ см, а при втором (в ту же сторону) — на $x_2 = 4$ см. Найти время релаксации t, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз, где e — основание натуральных логарифмов.

Решение:

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Из уравнения (1) находим $\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^0 \sin\varphi}{Ae^{-\delta T} \sin(2\pi + \varphi)} = \frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$ — (2). По условию $e^{\delta t} = e$ — (3). Прологарифмировав уравнения (2) и (3), получаем $\delta T = \ln\frac{x_1}{x_2}$ — (4) и $\delta t = 1$ — (5). Разделив (4) на (5), имеем $\frac{T}{t} = \ln\frac{x_1}{x_2}$ или $t = \frac{T}{\ln(x_1/x_2)}$ — (6). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ — (7). Подставляя (7) в (6), находим время релаксации $t = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\ln(x_1/x_2)} = 6{,}44$ с.

12.52. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на $\Delta l = 9{,}8$ см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Каким должен быть коэффициент затухания δ, чтобы: а) колебания прекратились через время $t = 10$ с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1% от начальной); б) груз возвращается в положение равновесия апериодически; в) логарифмический декремент затухания колебаний был равным $\aleph = 6$?

Решение:

а) По условию $\frac{A_1}{A_0} = 0{,}01 = 1\%$ — (1), где $A_0 = Ae^0$ — (2) и $A_1 = Ae^{-\delta t}$ — (3) — соответственно начальная и конечная амплитуда колебания груза на пружине. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $\frac{e^{-\delta t}}{e^0} = 0{,}01$ или $e^{\delta t} = 100$ — (4).

Логарифмируя уравнение (4), получаем $\delta t = ln 100$, откуда коэффициент затухания $\delta = \frac{ln 100}{t} = 0{,}46\ с^{-1}$.

б) В случае апериодического возвращения системы в положение равновесия коэффициент затухания $\delta = \omega_0$ — (1), где ω_0 — начальная циклическая частота колебаний. Поскольку (см. пункт в) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\delta = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 10\ с^{-1}$.

в) По определению логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — (2) — период затухающих колебаний. Из (1) с учетом (2) коэффициент затухания $\delta = \frac{\aleph\omega}{2\pi}$ — (3). Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\delta = \frac{\aleph\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi}$ — (5). Поскольку колебания груза на пружине совершаются под действием двух сил: силы тяжести mg и силы упругости $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины, то в состоянии покоя $mg = k\Delta l$, откуда $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$ — (6). Начальный период колебания груза $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ или, с учетом (6), $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$ — (7). Из формулы (2) начальная циклическая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ или, с учетом (7), $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$, тогда $\omega_0^2 = \frac{g}{\Delta l}$ — (8). Подставляя

(8) в (5), получаем $\delta = \dfrac{\aleph\sqrt{\dfrac{g}{\Delta l} - \delta^2}}{2\pi}$ — (9) и, возведя обе части уравнения (9) в квадрат, окончательно находим $\delta = \dfrac{\aleph}{\sqrt{4\pi^2 + \aleph^2}}\sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}} = 6{,}98\ \text{с}^{-1}$.

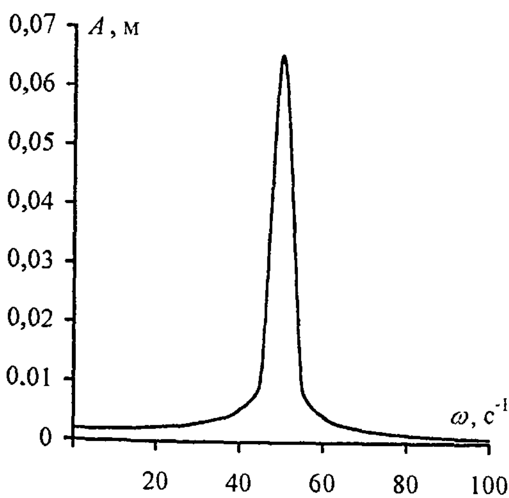
12.53. Тело массой $m = 10$ г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой $A_{max} = 7$ см, начальной фазой $\varphi = 0$ и коэффициентом затухания $\delta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x = 5 sin\left(10\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и уравнение внешней периодической силы.

Решение:

В случае, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением $\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, где δ — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота системы, ω — частота силы. Общее решение данного уравнения является уравнением собственных колебаний и имеет вид $x = A_0 e^{-\delta t} sin\,\omega_0 t$. По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен $-\dfrac{3\pi}{4}$, следовательно, $tg\varphi = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = tg\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$, отсюда $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}$. Подставляя числовые данные, получим $\omega_0 = 10{,}5\pi$. Тогда уравнение собственных колебаний примет вид $x = 0{,}07 e^{-1{,}6t} sin 10{,}5\pi t$ м. Уравнение внешней периодической силы имеет вид $F = F_0 \sin\omega t$. Максимальное значение внешней периодической силы $F_0 = Am\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72$ мН. Тогда уравнение внешней периодической силы будет иметь вид $F = 72\sin 10\pi t$ мН.

12.54. Гиря массой $m = 0{,}2$ кг, висящая на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания $\delta = 0{,}75\ \text{с}^{-1}$. Жесткость пружины $k = 0{,}5$ кН/м. Начертить зависимость амплитуды A вынужденных колебаний гирьки от частоты внешней периодической силы, если известно, что максимальное значение внешней силы $F_0 = 0{,}98$ Н. Для построения графика найти значение A для частот: $\omega = 0$, $\omega = 0{,}5$, $\omega = 0{,}75$, $\omega = \omega_0$, $\omega = 1{,}5\omega_0$ и $\omega = 2\omega_0$, где ω_0 — частота собственных колебаний подвешенной гири.

Решение:



Период колебаний гири, висящей на вертикальной пружине. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (1). С другой стороны, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\omega_0}$, тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50\ \text{с}^{-1}$ — (3). Амплитуда вынужденных колебаний $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ — (4).

Произведя расчет значений амплитуды по формуле (4), с учетом (3), строим график.

ω, с$^{-1}$	0	25	37.5	50	75	100
A, м	0.0020	0.0026	0,0045	0.0653	0.0016	0.0007

12.55. По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на $x_0 = 2$ см под действием груза массой $m_1 = 1$ кг. С какой скоростью v катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски $M = 10$ кг.

Решение:

Коляска начнет сильно раскачиваться, если промежуток между двумя последовательными толчками на углублениях будет равен периоду собственных колебаний коляски, который можно найти по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. На каждую рессору приходится масса $m = \frac{M}{2} = 5$ кг. Коэффициент упругости $k = \frac{m_1 g}{x_0} = 490$ Н/м. Подставляя числовые данные, получим $T = 0{,}63$ с. Кроме того, $T = \frac{l}{v}$, откуда $v = \frac{l}{T} = 0{,}48$ м/с.

12.56. Найти длину волны λ колебания, период которого $T = 10^{-14}$ с. Скорость распространения колебаний $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Решение:
По определению длина волны колебания $\lambda = cT = 3$ мкм.

12.57. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость c распространения колебаний и максимальную скорость v_{max} частиц воздуха.

Решение:
По определению длина волны колебания $\lambda = cT$ — (1). Т. к. частота колебаний ν есть величина, обратная периоду, т. е. $\nu = \frac{1}{T}$ — (2), тогда, подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{c}{\nu}$, откуда скорость распространения колебаний $c = \lambda\nu = 350$ м/с. Рассматривая частицы воздуха как материальные точки, запишем для скорости уравнение $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Поскольку $v = v_{max}$, когда $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, то $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$ или, с учетом (2), окончательно получим $v_{max} = 2\pi\nu A = 0{,}785$ м/с.

12.58. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 10\sin\frac{\pi}{2}t$ см. Найти уравнение волны, если скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точки, отстоящей на расстоянии

$l = 600$ м от источника колебаний. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точек волны в момент времени $t = 4$ с после начала колебаний.

Решение:

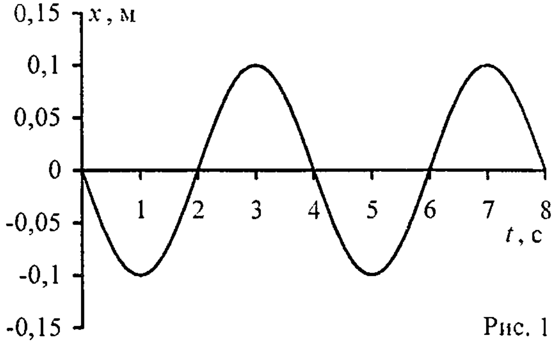


Рис. 1

При распространении незатухающих колебаний со скоростью c вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии x, определяется выражением: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны.

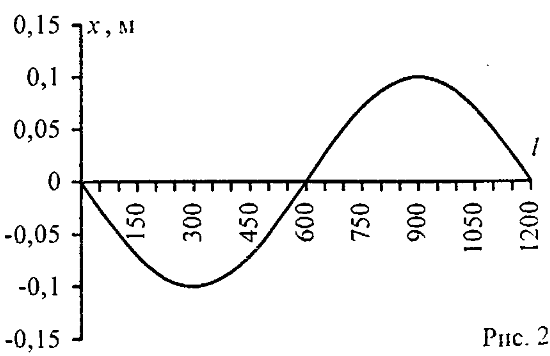


Рис. 2

Подставляя числовые данные в (1), с учетом (2), получим уравнение волны: $x = 0{,}1\,sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi l}{600}\right)$ м — (3). При $l = 600$ м уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\,sin\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right)$ м (рис.1), т. е. при $l = const$ получим $x = f(t)$ — смещение фиксированной точки, лежащей на луче, меняется со временем. При $t = 4$ с уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\,sin\left(2\pi - \frac{\pi l}{600}\right)$ м (рис.2), т. е. при $t = const$ получим $x = f(l)$ — различные точки, лежащие на луче, имеют различные смещения в данный момент времени.

12.59. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\,sin\,600\pi\,t$ см. Найти смещение x от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $l = 75$ см от источника колебаний, для момента времени $t = 0{,}01$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с.

Решение:

Имеем $x = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1) (см. задачу 12.58), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны. Т. к. по условию уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\,sin\,600\pi\,t$ — (3), то, сопоставляя (1) и (3) и учитывая (2), окончательно получаем $x = 4\,sin\left(600\pi t - \frac{2\pi l}{cT}\right) = 4\,sin\left(600\pi t - 600\pi\frac{l}{c}\right) = 4$ см.

12.60. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = sin\,2{,}5\pi\,t$ см. Найти смещение x от положения равновесия, скорость v и ускорение a точки, находящейся на расстоянии

$l = 20$ м от источника колебаний, для момента времени $t = 1$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 100$ м/с.

Решение:

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.59) определяется соотношением

$x = sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right) = 0$. Тогда скорость точки можно

определить как $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)\right]$;

$v = 2.5 cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)$; $v = 7{,}85$ см/с, а ее ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[2{,}5 cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right)\right];$$

$$a = -6{,}25\pi^2 sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi \frac{l}{c}\right) = 0.$$

12.61. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях l_1 = ... и $l_2 = 16$ м. Период колебаний $T = 0{,}04$ с; скорость распространения $c = 300$ м/с.

Решение:

Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l_2 от источника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda}$ — (1). Поскольку длина волны λ связана с периодом колебаний T и скоростью их распространения соотношением $\lambda = cT$ — (2), то, подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{cT} = \pi$, т. е. точки колеблются в противоположных фазах.

12.62. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии $l = 2$ м друг от друга, если длина волны $\lambda = 1$ м.

Решение:
Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l_2 от источника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda}$ — (1). В нашем случае $l = l_2 - l_1$ — (2), поэтому, подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l}{\lambda} = 4\pi$, т. е. точки колеблются в одинаковых фазах.

12.63. Найти смещение x от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \frac{\lambda}{12}$, для момента времени $t = \frac{T}{6}$. Амплитуда колебаний $A = 0{,}05$ м.

Решение:
При распространении незатухающих колебаний вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии l, дается уравнением $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = 0{,}05 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2.5$ см.

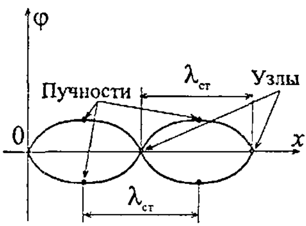
12.64. Смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = 4$ см, в момент времени $t = \frac{T}{6}$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.

Решение:

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.63) дается уравнением $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = A\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{A}{2}$, отсюда $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ или $\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Тогда окончательно $\lambda = 12l =$ $= 0{,}48$ м.

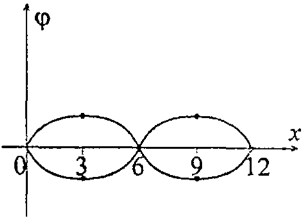
12.65. Найти положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны, если: а) отражение происходит от менее плотной среды; б) отражение происходит от более плотной среды. Длина бегущей волны $\lambda = 12$ см.

Решение:

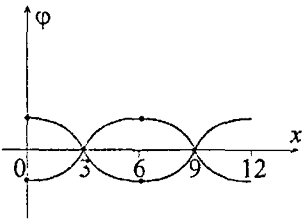


Стоячей называется волна, которая образуется в результате наложения двух бегущих синусоидальных когерентных волн, распространяющихся навстречу друг другу. В отличие от бегущей волны она состоит из узлов и пучностей, причем расстояние между двумя соседними узлами или пучностями есть величина постоянная, называемая длиной стоячей волны, $\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина бегущей волны. Подставляя значение λ в (1), получим $\lambda_{ст} = 6$ см.

а) Если отражение происходит от менее плотной среды, то положение узлов будет определяться из условия $x = (2n+1)\frac{\lambda_{ст}}{2}$ (2), где $n = 0$, 1, 2... Подставляя в (2) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 3$, 9, 15 см ... Положение пучностей будет определяться из условия $x = 2n\frac{\lambda_{ст}}{2} = n\lambda_{ст}$ — (3). Подставляя в (3) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 0$, 6, 12, 18 см...



б) Если отражение происходит от более плотной среды, то узлы и пучности поменяются местами и положение узлов будет определяться из условия (3), т. е. $x = 0$, 6, 12, 18 см, а положение пучностей — из условия (2), т. е. $x = 3$, 9, 15 см...



12.66. Найти длину волны λ колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны $l = 15$ см.

Решение:

Длина стоячей волны (см. задачу 12.65) $\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина волны колебаний. С другой стороны, $\lambda_{ст} = \frac{l}{n_1 - n_2}$ — (2), где n_1 и n_2 — порядковые номера пучностей. По условию $n_1 = 1$ и $n_2 = 4$, тогда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{3}$, откуда длина волны колебаний $\lambda = \frac{2l}{3} = 10$ см $= 0{,}1$ м.