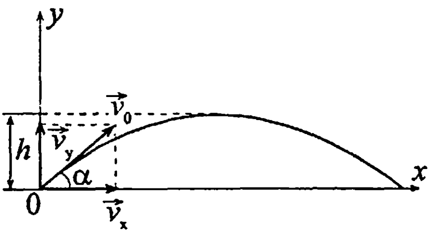
1.34. Тело брошено со скоростью v_0 под углом к горизонту. Время полета $t = 2{,}2$ с. На какую высоту h поднимется тело?

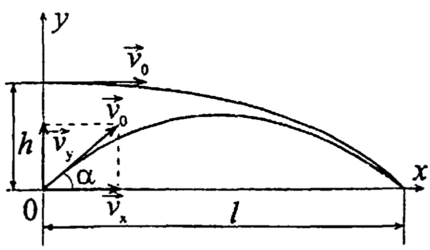
Решение:



Перемещение по вертикали $S_y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ — (1). Обозначим t_1 — время подъема тела на высоту h. Тогда из (1) получим $h = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$. В верхней точке $v_y = 0$, но $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$. Тогда $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$. Поскольку $t_1 = \frac{t}{2}$, то $h = \frac{gt^2}{8}$; $h = \frac{9{,}8 \cdot 2{,}2^2}{8} = 5{,}9$ м.

1.35. Камень, брошенный со скоростью $v_0 = 12$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости v_0 он упал на то же место?

Решение:

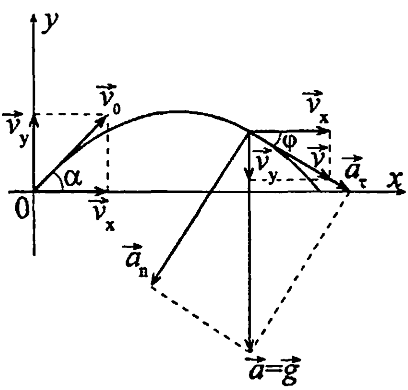


Если камень брошен под углом к горизонту, $l = v_0 \cos\alpha t_1$ — (1), где $t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (см. задачу 1.32.). Во втором случае

$l = v_0 t_2$. Подставив выражение для t_1 в (1), получим $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, откуда $t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g v_0} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$. Высота, с которой нужно бросить камень, $h = \frac{g t_2^2}{2} = \frac{g v_0^2 \sin^2 2h}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}$; $h = \frac{144 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 7{,}3$ м.

1.36. Тело брошено со скоростью $v_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1{,}25$ с после начала движения.

Решение:

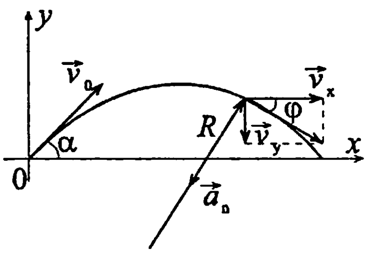


Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$. В верхней точке $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = g t_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}75$ с, т.е. при $t = 1{,}25$ с тело находится уже на спуске; таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$, и нужно найти a_n и a_τ через время $t_2 = t - t_1 = 0{,}5$ с. Изобразим треугольник ускорений и совместим его с треугольником скоростей. Тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной, так же, как вектор $\vec{v}$, $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, полное ускорение — ускорение свободного падения. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = v_x / v = a_n / g$; $\sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$; отсюда $a_n = g\frac{v_x}{v}$;

$a_\tau = g\frac{v_y}{v}$. Полная скорость тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$
$= \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}$, тогда $a_n = g\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$;
$a_\tau = g\frac{gt_2}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$. Подставив числовые значения, получим $a_n = 9{,}15$ м/с^2; $a_\tau = 3{,}52$ м/с^2.

1.37. Тело брошено со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела через время $t = 1$ с после начала движения.

Решение:

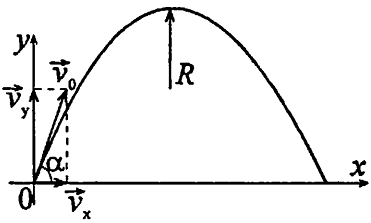


Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая его скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$. В верхней точке траектории $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}7$ с, т.е. при $t = 1$ с тело находится уже на спуске, таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Нормальное ускорение тела $a_n = \frac{v^2}{R}$, где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $a_n = g\sin\varphi$; $\sin\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. Тогда $a_n = g\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ и
$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$. Вычислим отдельно v_x и v_y:

$v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{2}$ м/с; $v_y = g(t - t_1) = 3$ м/с. Подставив числовые значения, получим $R \approx 6{,}3$ м.

1.38. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела $h = 3$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 3$ м.

Решение:

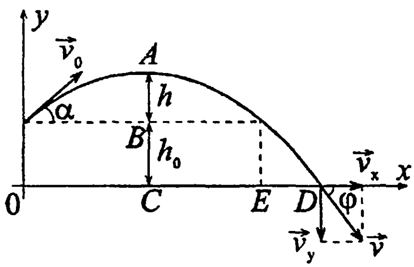


Уравнения движения тела по вертикали $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$; $s_y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. В верхней точке траектории $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, отсюда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Высота подъема $h = s_y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ — (1). Нормальное ускорение тела в верхней точке траектории $a_n = g = \frac{v_x^2}{R}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$. Тогда $g = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{R}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим: $h = \frac{gR \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 2g} = tg^2\alpha \frac{R}{2}$, откуда $tg\alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}}$; $tg\alpha = \sqrt{2}$; $\alpha \approx 60°30'$. Из уравнения (2) $v_0 = 9{,}35$ м/с.

1.39. С башни высотой $h_0 = 25$ м брошен камень со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Какое время t

камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

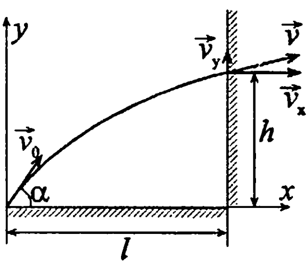
Решение:



Движение тела, брошенного с высоты h_0 под углом α к горизонту можно разложить на два этапа: движение тела до наивысшей точки A и движение тела, брошенного из точки A горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Высота подъема тела $s_y = AC = h_0 + h = h_0 + \frac{(v_0^2 \sin^2\alpha)}{2g}$. Общее время движения камня $t = t_1 + t_2$, где $t_1 = \frac{(v_0 \sin\alpha)}{g}$ — время подъема камня на высоту h и $t_2 = \sqrt{\frac{2s_y}{g}}$ — время падения камня. Подставляя данные задачи, получим $s_y = 27{,}9$ м, $t_1 = 0{,}77$ с, $t_2 = 2{,}39$ с; отсюда $t = 3{,}16$ с. Расстояние от основания башни до места падения камня на землю $l = OD = OC + CD$, где $OC = \frac{OE}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \approx 10$ м, $CD = v_x t_2 = v_0 t_2 \cos\alpha = 31{,}1$ м; отсюда $l = 41{,}1$ м. Скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha = 13$ м/с, $v_y = g t_2 = 23{,}4$ м/с; отсюда $v = 26{,}7$ м/с. Угол φ, составляемый траекторией камня с горизонтом в точке падения камня на землю, найдется из формулы $v_y = v_x \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 1{,}8$ и $\varphi = 61°$.

1.40. Мяч, брошенный со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l = 3$ м от места бросания. Когда происходит удар мяча о стенку (при подъеме мяча или при его опускании)? На какой высоте h мяч ударит о стенку (считая от высоты, с которой брошен мяч)? Найти скорость v мяча в момент удара.

Решение:



$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ — (1) — время подъема до верхней точки (см. задачу 1.38). Когда мяч находится в верхней точке, $s_x = (v_0 \cos\alpha) \cdot t_1$. С учетом (1) $s_x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$;

$s_x = \frac{100 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 5{,}1$ м, следовательно, мяч ударяется в стену при подъеме. Мяч ударится о стенку, когда координата $s_y = h = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ — (2). В этот момент времени $s_x = l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$, откуда $t = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим $h = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot l}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = l \cdot tg\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. После подстановки числовых значений $h = 2{,}1$ м. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = v_0 \cos\alpha$; $v_x = 7{,}07$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = v_0 \sin\alpha - \frac{gl}{v_0 \cos\alpha}$; $v_y = 2{,}91$ м/с.

Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $v = \sqrt{7{,}07^2 + 2{,}91^2} = 7{,}6$ м/с.

1.41. Найти угловую скорость ω: а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки на часах; в) минутной стрелки на часах; г) искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите с периодом вращения $T = 88$ мин. Какова линейная скорость v движения этого искусственного спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии $h = 200$ км от поверхности Земли?

Решение:

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения.

а) $T = 24$ ч $= 86{,}4 \cdot 10^3$ с; $\omega = 72{,}7 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

б) $T = 12$ ч $= 43{,}2 \cdot 10^3$ с; $\omega = 145{,}4 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

в) $T = 1$ ч $=3600$ с; $\omega = 1{,}74 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

г) $T = 88$ мин $=5280$ с; $\omega = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Линейная скорость спутника $\vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]$, в скалярном виде $v = \omega R \sin 90^o = \omega R$, где $R = R_З + h$. Здесь $R_З$ — радиус Земли. Тогда $v = \omega(R_З + h)$; $v = 7{,}83$ км/с.

1.42. Найти линейную скорость v вращения точек земной поверхности на широте Ленинграда ($\varphi = 60^o$).

Решение:

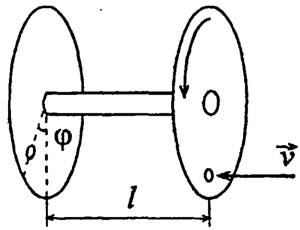
Линейная скорость $v = \omega \cdot r$ (см. задачу 1.41), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Период вращения Земли $T = 24$ ч $= 86400$ с; $r = R\cos\varphi$, где R — радиус Земли. Отсюда $v = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$;

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5}{86400} \approx 231 \text{ м/с}.$$

1.43. С какой линейной скоростью должен двигаться самолет на экваторе с востока на запад, чтобы пассажирам этого самолета Солнце казалось неподвижным?

Решение:
Очевидно, что самолет должен двигаться со скоростью, равной линейной скорости вращения Земли $v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$; где $T = 24$ ч — период вращения Земли; $R = 6378$ км — радиус Земли. Отсюда $v = 1669$ км/ч.

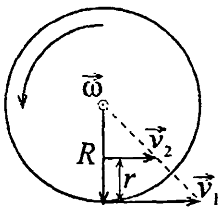
1.44. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 0{,}5$ м друг от друга, вращается с частотой $n = 1600$ об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 12°$. Найти скорость v пули.



Решение:
Уравнение вращательного движения $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} \cdot t + \frac{\vec{\beta} t^2}{2}$. Выберем $\varphi_0 = 0$. Из условия следует, что движение осуществляется с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi n$, следовательно, угловое ускорение равно 0, т.е. смещение $\varphi = \omega \cdot t$, откуда $t = \frac{\varphi}{\omega}$ — (1); $\omega = n \cdot 2\pi$ — (2). Скорость пули $v = \frac{l}{t}$ — (3). Подставив (2) в (1), а затем (1) в (3) получим: $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. Произведя вычисления, найдем скорость пули $v = 419$ м/с.

1.45. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии $r = 5$ см ближе к оси колеса.

Решение:



Вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, в скалярном виде $v = \omega \cdot r$; $v_1 = \omega \cdot R$; $v_2 = \omega \cdot (R - r)$.

Отсюда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega \cdot R}{\omega \cdot (R - r)} = 2{,}5$; $\frac{R}{R - r} = 2{,}5$;

$1{,}5 \cdot R = 12{,}5$; $R = 8{,}3$ см.

1.46. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20$ рад/с через $N = 10$ об после начала вращения. Найти угловое ускорение ε колеса.

Решение:

Уравнения движения колеса: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$.

По условию $\omega_0 = 0$. Тогда $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1), $\omega = \varepsilon t$ — (2). Выражая из уравнения (1) ε и учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, получим $\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}$ — (3). Из уравнения (2) найдем $t = \frac{\omega}{\varepsilon}$ и подставим в (3). Получим $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}$; $\varepsilon = 3{,}2$ рад/с^2. Поскольку $\varepsilon > 0$, то направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$ (см. рисунок к задаче 1.45).

1.47. Колесо, вращаясь равноускоренно, через время $t = 1$ мин после начала вращения приобретает частоту $n = 720$ об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение:

Угловая скорость колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$. В скалярном виде при $\omega_0 = 0$ получим $\omega = \varepsilon t$, кроме того, $\omega = n \cdot 2\pi$. Отсюда $\varepsilon = \omega / t = n \cdot 2\pi / t$; $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2.

1.48. Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшило свою частоту с $n_1 = 300$ об/мин до $n_2 = 180$ об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение:

Переведем числовые данные в единицы системы СИ: $t = 1$ мин $= 60$ с; $n_1 = 300$ об/мин $= 5$ об/с; $n_2 = 180$ об/мин$=$ $= 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то $N = \dfrac{n_1 + n_2}{2} t = 240$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (1), где $\omega_0 = n_1 \cdot 2\pi$; $\omega = n_2 \cdot 2\pi$. Из (1) имеем $\varepsilon t = \omega_0 - \omega$, откуда $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 - \omega}{t} = \dfrac{2\pi(n_1 - n_2)}{t}$; $\varepsilon = \dfrac{2 \cdot 3{,}14(5-3)}{60} = 0{,}21$ рад/с^2.

1.49. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Решение:

$n = 900$ об/мин $= 15$ об/с. Запишем уравнения движения в скалярном виде: $\varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1); $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (2), где $\varphi = 2\pi N$ — (3); $\omega = 0$; $\omega_0 = 2\pi n$ — (4). Тогда из (2) $t = \dfrac{\omega_0}{\varepsilon} = \dfrac{2\pi n}{\varepsilon}$ — (5). Перепишем уравнение (1) с учетом (3), (4) и (5): $2\pi N = \dfrac{(2\pi n)^2}{\varepsilon} - \dfrac{\varepsilon (2\pi n)^2}{2\varepsilon^2} = \dfrac{(2\pi n)^2}{2\varepsilon}$;

$N = \dfrac{2\pi n^2}{2\varepsilon} = \dfrac{\pi n^2}{\varepsilon}$; отсюда $\varepsilon = \dfrac{\pi n^2}{N}$. Подставив это уравнение в (5), получим: $t = \dfrac{2\pi n \cdot N}{\pi n^2} = \dfrac{2N}{n}$; $t = \dfrac{2 \cdot 75}{15} = 10$ с.

1.50. Вал вращается с частотой $n = 180$ об/мин. С некоторого момента вал начинает вращаться равнозамедленно с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Через какое время t вал остановится? Найти число оборотов N вала до остановки.

Решение:

$n = 180$ об/мин $= 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов вала до остановки $N = \frac{n}{2} \cdot t$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. По условию $\omega = 0$, следовательно, $\omega_0 = \varepsilon t$, кроме того, $\omega_0 = n2\pi$, тогда $\varepsilon t = n \cdot 2\pi$, откуда $t = \frac{n \cdot 2\pi}{\varepsilon} = 6{,}28$ с. $N = 9{,}4$ об/с.

1.51. Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5$ см/с^2. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному; б) вдвое больше тангенциального?

Решение:

По условию вращение является равноускоренным, следовательно, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; отсюда $t = \frac{v}{a_\tau}$, $v = \sqrt{a_n R}$. Тогда $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. а) Если $a_n = a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$ с; б) если $a_n = 2a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2{,}8$ с.

1.52. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 79{,}2$ см/с.

Решение:

$a_\tau = dv/dt$, по условию $a_\tau = const$, следовательно, $a_\tau = v/t$ — (1), где $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n = 2\pi N/t$. Отсюда $t = \dfrac{2\pi NR}{v}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_\tau = \dfrac{v^2}{2\pi NR}$; $a_\tau = 0{,}2$ м/с.

1.53. Точка движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время $t = 20$ с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 10$ см/с.

Решение:

Имеем $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$; отсюда $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$ — (1). Найдем угловое ускорение ε. При равноускоренном движении среднее число оборотов в единицу времени (по аналогии со средней скоростью при прямолинейном равноускоренном движении) $\overline{n} = \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{N}{t_1}$, где t_1 — момент времени, соответствующий концу пятого оборота. $\overline{n} = \dfrac{n_0 + n}{2}$; $n_0 = 0$, следовательно, $N = \dfrac{n}{2} \cdot t_1$ — (2). Частота оборотов $n = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{v}{2\pi R}$ — (3). Выразим из (2) t_1, с учетом (3): $t_1 = \dfrac{4\pi NR}{v}$ — (4). Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{\omega_1}{t_1}$ — (5), где $\omega_1 = v/R$ — (6). Подставив в (5) уравнения (4) и (6), получим: $\varepsilon = \dfrac{v^2}{4\pi NR^2}$. Тогда из уравнения (1) $a_n = \dfrac{v^4t^2R}{16\pi^2N^2R^3}$; $a_n = \dfrac{0{,}1^4 \cdot 20^2 \cdot 0{,}1}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5^2 0{,}1^3} = 0{,}01$ м/с^2.

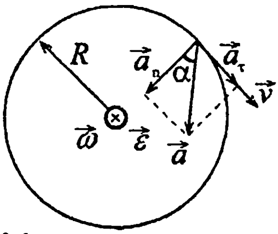
1.54. В первом приближении можно считать, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите с линейной скоростью v. Найти угловую скорость ω вращения электрона вокруг ядра и его нормальное ускорение a_n. Считать радиус орбиты $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м и линейную скорость электрона на этой орбите $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Решение:

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$; $a_n = \dfrac{4{,}84 \cdot 10^{12}}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} 9{,}7 \cdot 10^{22}$. $\omega = \dfrac{v}{r}$; $\omega = \dfrac{2{,}2 \cdot 10^6}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} =$
$= 4{,}4 \cdot 10^{16}$ рад/с.

1.55. Колесо радиусом $R = 10$ см вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3{,}14$ рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) нормальное ускорение a_n; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Решение:



а) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию $\omega_0 = 0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, при $t = 1$ с угловая скорость $\omega = 3.14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v=\omega R$, при $t=1$ с имеем $v=0{,}314$ м/с.

в) Тангенциальное ускорение $a_\tau=\varepsilon R$ постоянно во все время движения; при $t=1$ с имеем $a_\tau=0{,}314$ м/с^2.

г) Нормальное ускорение $a_n=\omega^2 R=\varepsilon^2 t^2 R$, при $t=1$ с имеем $a_n=0{,}986$ м/с^2.

д) Полное ускорение $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=a_\tau\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$; при $t=1$ с имеем $a=1{,}03$ м/с^2.

е) $\sin\alpha=\dfrac{a_\tau}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}}$, где α — угол между вектором полного ускорения и радиусом колеса. К концу первой секунды $\sin\alpha=\dfrac{a_\tau}{a_n}=\dfrac{0{,}314}{1{,}03}=0{,}305$ и $\alpha=17°46'$.

1.56. Точка движется по окружности радиусом $R=2$ см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s=Ct^3$, где $C=0{,}1$ см/с^3. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v=0{,}3$ м/с.

Решение:

$a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{0{,}09}{0{,}02}=4{,}5$ м/с^2; $a_\tau=\dfrac{d^2s}{dt^2}=6Ct$. Выразим a_n через t: $v=\dfrac{ds}{dt}=3Ct^2$, следовательно, $a_n=\dfrac{\left(3Ct^2\right)^2}{R}=\dfrac{9C^2t^4}{R}$. Отсюда $t^2=\sqrt{\dfrac{a_nR}{9C^2}}=\dfrac{\sqrt{a_nR}}{3C}$; $t=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a_nR}}{3C}}$. Тогда тангенциальное ускорение $a_\tau=6C\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a_nR}}{3C}}$; $a_\tau=0{,}06$ м/с^2.

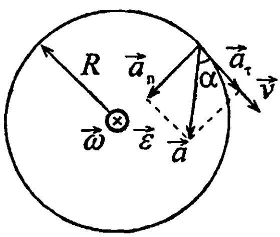
1.57. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $B = 2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения через время $t = 3$ с после начала движения, если известно, что при $t' = 2$ с нормальное ускорение точки $a_n' = 0{,}5$ м/с^2.

Решение:

Линейная скорость точки $v = \dfrac{ds}{dt} = -B + 2Ct$; $v = 4$ м/с. Тангенциальное ускорение $a_\tau = dv/dt = 2C = 2$ м/с^2. Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ — (1). Через время $t' = 2$ с точка будет иметь линейную скорость $v' = -B + 2Ct'$; $v' = 2$ м/с. Радиус окружности можно выразить следующим образом: $R = \dfrac{(v')^2}{a_n'}$. Тогда из (1) получим $a_n = \dfrac{v^2 a_n'}{(v')^2}$; $a_n = 2$ м/с^2. Полное ускорение $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 2{,}8$ м/с^2.

1.58. Найти угловое ускорение ε колеса, если известно, что через время $t = 2$ с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором ее линейной скорости.

Решение:



Из рисунка видно, что $tg\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau}$ — (1). При равноускоренном вращении $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$, но $v_0 = 0$, следовательно, $a_\tau = \frac{v}{t}$. Линейная скорость $v = \omega R$, где $\omega = \varepsilon t$, следовательно, $v = \varepsilon t R$. Тогда $a_n = \frac{\varepsilon^2 t^2 R^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R$; $a_\tau = \frac{\varepsilon t R}{t} = \varepsilon R$. Подставив эти выражения в (1), получим: $tg\alpha = \frac{\varepsilon^2 t^2 R}{\varepsilon R} = \varepsilon t^2$, откуда $\varepsilon = \frac{tg\alpha}{t^2}$; $\varepsilon = \frac{1{,}7}{4} \approx 0{,}43$ рад/с^2.

1.59. Колесо вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Через время $t = 0{,}5$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 13{,}6$ см/с^2. Найти радиус R колеса.

Решение:

Нормальное ускорение колеса $a_n = v^2 / R$ — (1). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, но $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, откуда $\omega = \varepsilon t$. Линейная скорость точек на ободе колеса $v = \omega R = \varepsilon t R$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$. Полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$; $a^2 = \varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2 = \varepsilon^2 R^2 \left(\varepsilon^2 t^4 + 1\right)$. Отсюда $R = a / \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1}$; $R = 0{,}06$ м.

1.60. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $B = 2$ рад/с и $C = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время $t = 2$ с после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) угловое ускорение ε; г) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения.

Решение:

а) Угловая скорость вращения колеса $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$; $\omega = 2 + 3 \cdot 4 = 14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v = \omega R$; $v = 14 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$ м/с.

в) Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct$; $\varepsilon = 12$ рад/с^2.

г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$; $a_n = 14^2 \cdot 0{,}1 = 19{,}6$ м/с^2.
Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$; $a_\tau = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$ м/с^2.

1.61. Колесо радиусом $R = 5$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти изменение тангенциального ускорения Δa_τ за единицу времени.

Решение:

Изменение тангенциального ускорения связано с изменением углового ускорения следующим соотношением: $\Delta a_\tau = \Delta\varepsilon R$; где $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. $\frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$; $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2C + 6Dt = \varepsilon$. Тогда $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$; $\Delta\varepsilon = (2C + 6Dt_2) - (2C + 6Dt_1) = 6D(t_2 - t_1) = 6D$, учитывая, что $t_2 - t_1 = 1$ с. Отсюда $\Delta a_\tau = 6 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}3$ м/с^2.

1.62. Колесо радиусом $R = 5$ см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v = At + Bt^2$, где $A = 3$ см/с^2 и $B = 1$ см/с^3. Найти угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t, равные: 0, 1, 2, 3, 4 и 5с после начала движения.

Решение:

Угол α можно определить следующим образом: $tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}$, где a_τ и a_n — тангенциальное и нормальное ускорения Но $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; следовательно, $tg\alpha = \frac{(3+2t)R}{(3t+t^2)^2}$. Подставляя в эту формулу значения $t = 0$, 1, 2, 3, 4 и 5с, получим: $t = 0$, $tg\alpha = \infty$, т.е. $\alpha = 90°$ — полное ускорение направлено по касательной. Значения при t, равном от 1 до 5с, приведены в таблице:

t, с	1	2	3	4	5
$tg\alpha$	3,13	0,7	0,278	0,14	0,081
α	72°17′	35°0′	15°32′	7°58′	4°38′

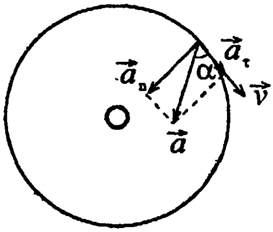
1.63. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2 и $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус R колеса, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, нормальное ускорение $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

Решение:

$a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$. Радиус колеса $R = \frac{a_n}{\omega^2} = \frac{a_n}{(B + 2Ct + 3Dt^2)^2}$; $R = \frac{3{,}46 \cdot 10^2}{(1+4+12)^2} = 1{,}2$ м.

1.64. Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол $\alpha = 30°$ с вектором ее линейной скорости?

Решение:



Нормальное ускорение точки $a_n = a\sin\alpha$; тангенциальное ускорение $a_\tau = a\cos\alpha$, отсюда $\dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \approx$ $\approx 0{,}58$.