§ 14. Электромагнитные колебания и волны

В задачах данного раздела используются данные таблиц 3 и 15 приложения. Если в задаче приведена графическая зависимость нескольких величин от какой-либо одной и при этом все кривые изображены на одном графике, то по оси y задаются условные единицы.

14.1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 888$ пФ и катушки с индуктивностью $L = 2$ мГн. На какую длину волны λ настроен контур?

Решение:

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1). Длина волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2512$ м.

14.2. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур, если его индуктивность $L = 2$ мГн, а емкость может меняться от $C_1 = 69$ пФ до $C_2 = 533$ пФ?

Решение:

Длина волны, на которую можно настроить контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (1). Подставляя в (1) значения емкостей C_1 и C_2, получаем диапазон длин волн от $\lambda_1 = 700$ м до $\lambda_2 = 1946$ м.

14.3. Какую индуктивность L надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости $C = 2$ мкФ получить частоту $\nu = 1000$ Гц?

Решение:

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1), а частота $\nu = \frac{1}{T}$ — (2). Из (1) и (2) следует, что $\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — (3). Возводя обе части уравнения (3) в квадрат, получаем $\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$, откуда индуктивность контура $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 12{,}66$ мГн.

14.4. Катушка с индуктивностью $L = 30$ мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ и расстоянием между ними $d = 0{,}1$ мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны $\lambda = 750$ м.

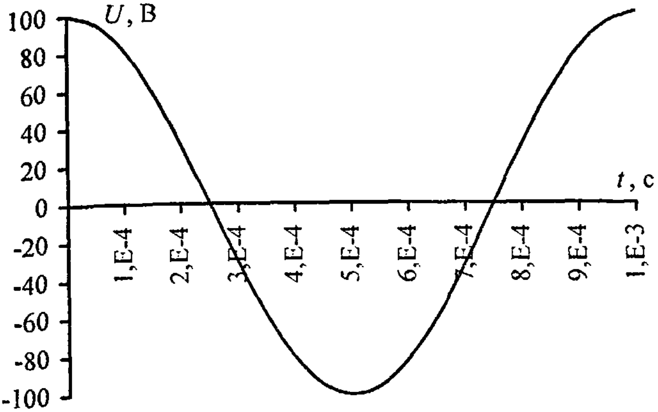
Решение:

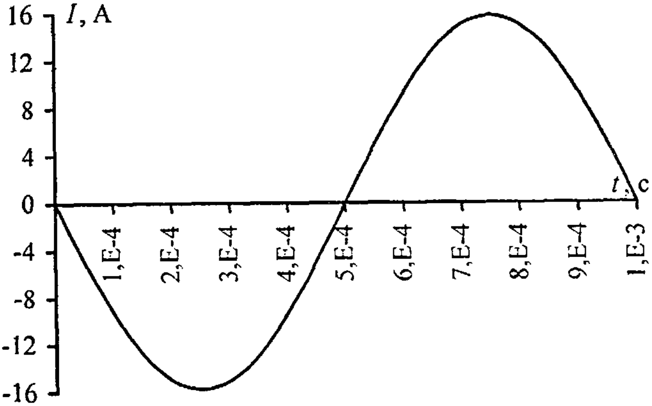
Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1), где ε — диэлектрическая проницаемость среды, S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между ними. Длина волны, на которую настроен контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}}$ — (3). Возведя уравнение (3) в квадрат, получим $\lambda^2 = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}$, откуда диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора, $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 SL} = 5{,}96$.

14.5. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 25$ нФ и катушки с индуктивностью $L = 1{,}015$ Гн. Обкладки конденсатора имеют заряд $q = 2{,}5$ мкКл. Написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов U на обкладках конденсатора и тока I в цепи. Найти разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решение:

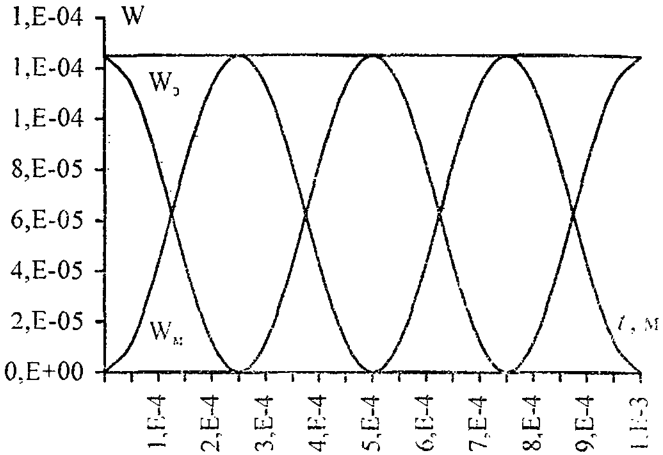
Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U = U_0 \cos \omega t$ — (1). Начальное значение разности потенциалов $U_0 = \dfrac{q}{C}$ — (2), а циклическая частота колебаний $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — (3), где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (4) — период колебаний. Подставляя (4) в (3), находим $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — (5). Подставляя (2) и (5) в (1), получим $U = \dfrac{q}{C} \cos \dfrac{t}{\sqrt{LC}}$ — (6). Подставляя числовые данные в (6), получим $U = 100 \cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Ток в цепи контура $I = C\dfrac{dU}{dt} = -CU_0\omega \sin \omega t$ — (7). Подставляя числовые данные в (7) и учитывая (2) и (5), получим $I = -15{,}7 \sin\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Если $t_1 = \dfrac{T}{8}$, то $U_1 = 70.7$ В и $I_1 = -11{,}1$ мА. Если $t_2 = \dfrac{T}{4}$, то $U_2 = 0$ В и $I_2 = -15.7$ мА. Если $t_3 = \dfrac{T}{2}$, то $U_3 = -100$ В и $I_3 = 0$. Для заданного интервала значений t построим графики.





14.6. Для колебательного контура предыдущей задачи написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения со временем t энергии электрического поля $W_э$, энергии магнитного поля $W_м$ и полной энергии поля W. Найти энергию электрического поля, энергию магнитного поля и полную энергию поля в моменты времени $\frac{T}{8}$, $\frac{T}{4}$ и $\frac{T}{2}$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решение:



Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м = \frac{LI^2}{2}$ — (1) и конденсатора $W_э = \frac{cU^2}{2}$ — (2). В предыдущей задаче мы нашли: $U = 100\,cos\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)$В — (3); $I = -15{,}7\cdot 10^{-3}\left(2\pi\cdot 10^3\right)$А — (4). Подставляя (3) в (2) и (4) в (1), а также числовые значения индуктивности L и емкости C из предыдущей задачи, получим $W_м = 125\cdot 10^{-6}\,sin^2\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)$Дж и $W_э = 125\cdot 10^{-6}\,cos^2\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)$Дж. Полная энергия поля $W = W_м + W_э = 125\cdot 10^{-6}\left(sin^2\left(2\pi\cdot 10^3 t\right) + cos^2\left(2\pi\cdot 10^3 t\right)\right)$; $W = 125\cdot 10^{-6}$Дж. При $t = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4\omega}$ имеем $\omega t = \frac{\pi}{4}$, тогда

$W_м = 125\cdot 10^{-6}\,sin^2\frac{\pi}{4} = 62.5\cdot 10^{-6}$ Дж;

$W_э = 125\cdot 10^{-6}\,cos^2\frac{\pi}{4} = 62.5\cdot 10^{-6}$ Дж; $W = 125\cdot 10^{-6}$Дж. При

$t=\frac{T}{4}$ имеем $\omega t=\frac{\pi}{2}$, тогда $W_м=125\cdot10^{-6}$ Дж; $W_э=0$; $W=125\cdot10^{-6}$ Дж. При $t=\frac{T}{2}$ имеем $\omega t=\pi$, тогда $W_м=0$; $W_э=125\cdot10^{-6}$ Дж; $W=125\cdot10^{-6}$ Дж.

14.7. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U=50cos10^4\pi t$ В. Емкость конденсатора $C=0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем t тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Решение:

По условию уравнение изменения со временем разности потенциалов $U=50cos10^4\pi t$ — (1). Общий вид уравнения $U=U_0 cos\,\omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим $\omega=10^4\pi$ и учитывая, что $\omega=\frac{2\pi}{T}$, находим $T=0{,}2$ мс. Поскольку период колебаний $T=2\pi\sqrt{LC}$ — (3), то, возведя обе части уравнения (3) в квадрат, находим $T^2=4\pi^2LC$, откуда индуктивность контура $L=\frac{T}{4\pi^2C}=10{,}13$ мГн. Закон изменения со временем тока в цепи $I=C\frac{dU}{dt}=-CU_0\omega\,sin\,\omega t$ — (4). Подставляя в (4) числовые значения, получаем $I=-157\,sin10^4\pi t$. Длина волны, соответствующая контуру, $\lambda=cT=60$ км.

14.8. Уравнение изменения со временем тока в колебательном контуре имеет вид $I=-0{,}02\,sin\,400\pi t$ А. Индуктивность контура $L=1$ Гн. Найти период T колебаний, емкость C контура, максимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Решение:

По условию уравнение изменения тока со временем $I = -0{,}02\sin 400\pi t$ — (1). Закон изменения со временем тока в цепи (см. задачу 14.7) $I = -CU_0\omega\sin\omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим период колебаний $T = 5$ мс. С другой стороны, по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (3), откуда после возведения (3) в квадрат емкость конденсатора $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L} = 0{,}63$ мкФ. Ток максимален, когда $\sin 400\pi t = -1$, т. е. $I_{max} = 0{,}02$ А. Тогда максимальная энергия магнитного поля $W_м = \dfrac{LI^2}{2} = 0{,}2$ мДж. Поскольку колебания в контуре не затухают, то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля $W_{эл} = W_м = 0{,}2$ мДж.

14.9. Найти отношение энергии $\dfrac{W_м}{W_{эл}}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

Решение:

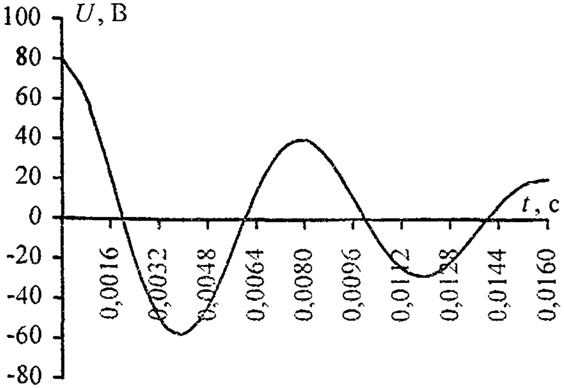
Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м = \dfrac{LI^2}{2}$ и конденсатора $W_э = \dfrac{cU^2}{2}$. Напряжение в колебательном контуре изменяется по следующему закону: $U = U_0\cos\omega t$, а сила тока в цепи $I = C\dfrac{dU}{dt}$, где C — электроемкость конденсатора. $I = -CU_0\omega\sin\omega t$. Тогда выражения для $W_м$ и $W_э$ можно записать в виде $W_м = \dfrac{LC^2U_0\omega^2\sin^2\omega t}{2}$.

$W_э = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2}$, а их отношение

$\frac{W_м}{W_э} = \frac{LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t \cdot 2}{2CU_0^2 \cos^2 \omega t} = LC\omega^2 tg^2 \omega t$. Циклическая частота и период колебаний связаны следующим соотношением: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. При $t = \frac{T}{8}$, $\omega t = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, $\frac{W_м}{W_э} = tg^2 \frac{\pi}{4} = 1$.

14.10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0{,}23$ Гн и сопротивлением $R = 40$ Ом. Обкладки конденсатора имеют заряд $q = 0{,}56$ мКл. Найти период T колебаний контура и логарифмический декремент затухания $\aleph$ колебаний. Написать уравнение изменения со временем t разности потенциалов U на обкладках конденсатора. Найти разность потенциалов в моменты времени, равные: $\frac{T}{2}$, T, $\frac{3T}{2}$ и $2T$. Построить график $U = f(t)$ в пределах двух периодов.

Решение:



Период электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и сопротивления R, определяется формулой $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC-(R/2L)^2}}$ [illegible] мс. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $\delta = \frac{R}{2L}$ — (2) — коэффициент затухания. Подставляя (2) в (1), находим $\aleph = \frac{RT}{2L} = 0{,}7$. Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T} = 250\pi$ -- (4), $U_o = \frac{q}{C} = 80$ В — (5). Подставляя (4) и (5) в (3), получаем $U = 80e^{-87{,}5t} \cos 250\pi t$. Если $t_1 = \frac{T}{2}$, то $U_1 = -56.5$ В. Если $t_2 = T$, то $U_2 = 40$ В. Если $t_3 = \frac{3T}{2}$, то $U_3 = -28$ В. Если $t_4 = 2T$, то $U_1 = 20$ В. Характер зависимости $U = f(t)$ показан на графике.

14.11. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 5{,}07$ мГн. При каком логарифмическом декременте затухания $\aleph$ разность потенциалов на обкладках конденсатора за время $t = 1$ мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление R контура?

Решение:

Период электромагнитных колебаний в контуре равен $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC-(R/2L)^2}}$. Предположим, что R достаточно мало, тогда период колебаний найдем по формуле $T = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с. Разность потенциалов на обладках конденсатора изменяется со временем по закону $U = U_0\, exp\left(-\frac{\aleph t}{T}\right)$, откуда $\aleph = \frac{T\, ln(U_0 / U)}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $\aleph = \frac{0.2 \cdot 10^{-3}\, ln 3}{10^{-3}} = 0{,}22$. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T = \frac{R}{2L}T$, откуда $R = \frac{2\aleph L}{T} = 11{,}1$ Ом. Величина $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ намного меньше величины $\frac{1}{LC} \approx 10^9$, следовательно, мы действительно могли применять формулу $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

14.12. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивления $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний?

Решение:

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$, следовательно, за время $t = T$ отношение $\frac{U_0}{U} = e^{\delta T}$ — (1), где $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ — (2) — период электромагнитных колебаний в контуре, $\delta = \frac{R}{2L}$ — (3) — коэффициент затухания. Подставляя (2) и (3) в (1), окончательно получаем $\frac{U_0}{U} = exp\left(\frac{\pi R}{\sqrt{L/C - R^2/4}}\right) = 1{,}02$.

14.13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2{,}22$ нФ и катушки длиной $l = 20$ см из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания $\aleph$ колебаний.

Решение:

Пусть D — диаметр катушки, тогда ее площадь поперечного сечения равна $S_к = \frac{\pi D^2}{4}$ — (1). Число витков катушки $N = \frac{l}{d}$ — (2), где l — длина катушки, d — диаметр проволоки. Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 l S_к$ — (3), где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды, $n = \frac{N}{l} = \frac{1}{d}$ — (4) — число витков на единицу длины. Подставляя (1) и (4) в (3), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 l \pi D^2}{4d^2}$ — (5). Длина одного витка катушки составляет $l_1 = \pi D$, а всей проволоки, намотанной на катушку, $l_{пр} = Nl_1 = \frac{\pi D l}{d}$ — (6). Активное сопротивление проволоки $R = \rho \frac{l_{пр}}{S_{пр}}$, где ρ — удельное сопротивление меди, $S_{пр} = \frac{\pi d^2}{4}$ — (8) — площадь поперечного сечения проволоки. Подставляя (6) и (8) в (7), получаем $R = \frac{4\rho D l}{d^3}$ — (9). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (10), где $\delta = \frac{R}{2L}$ — (11) — коэффициент затухания, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (12) — период электромагнитных колебаний в контуре. Подставляя (5) в (12), находим

$T = \frac{\pi D}{d}\sqrt{\mu\mu_0 \pi l C}$ — (14), затем, подставляя (13) и (14) в (10), окончательно получаем $\aleph = \frac{8\rho}{d}\sqrt{\frac{\pi l C}{\mu\mu_0}} = 0{,}018$.

14.14. Колебательный контур имеет емкость $C = 1{,}1$ нФ и индуктивность $L = 5$ мГн. Логарифмический декремент затухания $\aleph = 0{,}005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

Решение:

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos\omega t$ — (1). Из формулы (1) следует, что $\frac{U_0}{U} = e^{\delta t}$ — (2). По условию $\frac{U_0 - U}{U_0} = 0{,}99$, следовательно, $\frac{U_0}{U} = 100$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $e^{\delta t} = 100$ — (4). Логарифмируя уравнение (4), находим $\delta t = \ln 100$ — (5). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$, откуда $\delta = \frac{\aleph}{T}$ — (6). Подставляя (6) в (5), получаем $\frac{\aleph t}{T} = \ln 100$ или $t = \frac{T \ln 100}{\aleph}$ — (7). По формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (8). Подставляя (8) в (7), окончательно находим $t = \frac{2\pi\sqrt{LC}\ln 100}{\aleph} = 13{,}6$ м/с.

14.15. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки длиной $l = 40$ см из медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 0{,}1$ мм^2. Найти емкость конденсатора C, если, вычисляя период колебаний контура по приближенной формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$, мы допускаем ошибку $\varepsilon = 1\%$.

Указание: учесть, что ошибка $\varepsilon=\frac{T_2-T_1}{T_2}$, где T_1 — период колебаний, найденный по приближенной формуле, а T_2 — период колебаний, найденный по точной формуле.

Решение:

Индуктивность катушки (см. задачу 14.13) $L=\frac{\mu\mu_0 l\pi D^2}{4d}$ — (1), где D — диаметр катушки, d — диаметр проволоки. Поскольку $S=\frac{\pi d^2}{4}$, то $d^2=\frac{4S}{\pi}$ — (2) и $d=2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ (3). Подставляя (2) в (1), получаем $L=\frac{\mu\mu_0 l\pi^2 D^2}{16S}$ — (4). Активное сопротивление проволоки $R=\frac{4\rho Dl}{d^3}$ — (5), где ρ — удельное сопротивление меди. Подставляя (3) в (5), получаем $R=\frac{\rho Dl}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (6). По формуле Томсона $T_1=2\pi\sqrt{LC}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $T_1=\frac{\pi^2 D}{2}\sqrt{\frac{\mu\mu_0 lC}{S}}$ — (8). По точной формуле, с учетом активного сопротивления проволоки, намотанной на катушку, $T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{1/LC-(R/2L)^2}}$ — (9). Подставляя (4) и (6) в (9), получаем $T_2=\frac{\pi^2\mu\mu_0 D}{2}\sqrt{\frac{lC}{S\left(\mu\mu_0-\rho^2 lC\pi^{-2}\right)}}$ — (10). По условию $\varepsilon=1-\frac{T_1}{T_2}$ — (11). Подставляя (8) и (10) в (11), находим $\varepsilon=1-\sqrt{1-\frac{\rho^2 lC\pi}{\mu\mu_0}}$ — (12). Возводя обе части уравнения (12) в квадрат, получаем $\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 = 1 - \frac{\rho^2 l C\pi}{\mu\mu_0}$, откуда окончательно находим $C = \frac{(2-\varepsilon)\varepsilon\mu\mu_0}{\pi\rho^2 l} = 0{,}68$ мкФ.

14.16. Катушка длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 10\,\text{см}^2$ включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Число витков катушки $N = 3000$. Найти сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — (1). Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула (1) примет упрощенный вид $tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$ — (2). Циклическая частота колебаний связана с обычной соотношением $\omega = 2\pi\nu$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $tg\varphi = \frac{2\pi\nu L}{R}$ — (4). Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 l S$ — (5), где $n = \frac{N}{l}$ — (6) — число витков на единицу длины. Подставляя (6) в (5), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$ — (7), затем, подставляя (7) в (4), находим $tg\varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{Rl}$, откуда активное сопротивление катушки $R = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{l tg\varphi} = 4{,}1$ Ом.

14.17. Обмотка катушки состоит из $N = 500$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 1\,\text{мм}^2$.

Длина катушки $l = 50$ см, ее диаметр $D = 5$ см. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R?

Решение:

Активное сопротивление катушки (см. задачу 14.15) $R = \frac{\rho D l}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (1), а ее полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ — (2). Индуктивность катушки (см. задачу 14.16) $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S_к}{l}$ — (3), где $S_к = \frac{\pi D^2}{4}$ — (4) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (4) в (3), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi D^2}{4l}$ — (5). Поскольку $\omega = 2\pi\nu$ — (6), то, подставляя (1), (5) и (6) в (2), получаем $Z = \frac{D}{2l}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3}$ — (7). По условию $Z = 2R$. Подставляя (1) и (7) в (8), получаем $\frac{1}{l}\sqrt{\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3} = 2\rho l$ — (9). Возведя обе части уравнения (9) в квадрат, имеем $\rho^2 l^4 + \pi\nu^2\mu^2\mu_0^2 \times$ $\times N^4 D^2 S^3 = 4\rho^2 l^4$, отсюда $\nu^2 = \frac{3\rho^2 l^4}{\pi\mu^2\mu_0^2 N^4 D^2 S^3}$ или окончательно $\nu = \frac{\rho l^2}{\mu\mu_0 N^2 D}\sqrt{\frac{3}{\pi S^3}} = 265$ Гц.

14.18. Два конденсатора с емкостями $C_1 = 0{,}2$ мкФ и $C_2 = 0{,}1$ мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти ток I

в цепи и падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

Решение:

Емкостное сопротивление конденсатора выражается формулой $x_c = \frac{1}{\omega C}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), найдем сопротивления конденсаторов: $x_{c1} = \frac{1}{2\pi\nu C_1}$ и $x_{c2} = \frac{1}{2\pi\nu C_2}$.

Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то их общее сопротивление $x_c = x_{c1} + x_{c2} = \frac{C_1 + C_2}{2\pi\nu C_1 C_2}$ — (3).

По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{X_c}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) в (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{2\pi\nu C_1 C_2 U}{C_1 + C_2} = 4{,}6$ мА. Падения потенциала на первом и втором конденсаторах будут соответственно равны $U_1 = IX_{c1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 73{,}34$ В и $U_2 = IX_{c2} = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 146{,}6$ В.

14.19. Катушка длиной $l = 25$ см и радиусом $r = 2$ см имеет обмотку из $N = 1000$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $s = 1$ мм^2. Катушка включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть полного сопротивления Z катушки составляет активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X_L ?

Решение:

Индуктивность катушки выражается формулой $L = \mu\mu_0 \times$ $\times n^2 l S_к$ — (1), где $n = \frac{N}{l}$ — (2) — число витков на единицу длины и $S_к = \pi r^2$ — (3) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 \pi r^2}{l}$ — (4). Индуктивное сопротивление катушки выражается формулой $X_L = \omega L$ — (5), где $\omega = 2\pi\nu$ — (6) — циклическая частота колебаний. Подставляя (4) и (6) в (5), получаем $X_L = \frac{2\pi^2 \nu\mu\mu_0 N^2 r^2}{l}$ — (7). Активное сопротивление проволоки выражается формулой $R = \rho\frac{l_{пр}}{S}$ — (8), где $l_{пр} = 2\pi r N$ — (9) — длина проволоки, намотанной на катушку. Подставляя (9) в (8), получаем $R = \frac{2\pi r N\rho}{S}$ — (10). Полное сопротивление цепи $Z = \frac{2\pi r N}{Sl}\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}$ — (11). Из формул (7), (10) и (11) следует, что доли активного и емкостного сопротивлений от полного соответственно равны

$$\frac{R}{Z} = \frac{\rho l}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}74 \cdot 100\% = 74\% \text{ и}$$

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{\pi\nu\mu\mu_0 N r S}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}68 \cdot 100\% = 68\%.$$

14.20. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения U, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_C и на резисторе U_R?

Решение:
Емкостное сопротивление конденсатора (см. задачу 14.18) $X_C=\frac{1}{2\pi\nu C}$ — (1). Полное сопротивление цепи $Z=\sqrt{R^2+X_C^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z=\sqrt{R^2+\frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф}=\frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф}=\frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф}=\frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I=\frac{U}{\sqrt{R^2+1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}$ — (7). Токи через резистор и конденсатор соответственно равны $I_R=\frac{U_R}{R}$ — (8) и $I_C=2\pi\nu CU_C$ — (9), где U_R и U_C — падения напряжения на резисторе и конденсаторе. Поскольку резистор и конденсатор соединены последовательно, то $I=I_C=I_R$ — (10). Подставляя (7), (8) и (9) в (10), получаем

$$\frac{U}{\sqrt{R^2+1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}=2\pi\nu CU_C \quad \text{и} \quad \frac{U}{\sqrt{R^2+1/4\pi^2\nu^2C^2}}=\frac{U_R}{R},$$

откуда $\frac{U_C}{U}=\frac{1}{2\pi\nu C\sqrt{R^2+1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}=0{,}727\cdot100\%=72{,}7\%$

и $\frac{U_R}{U}=\frac{1}{\sqrt{R^2+1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}=0{,}685\cdot100\%=68{,}5\%$.

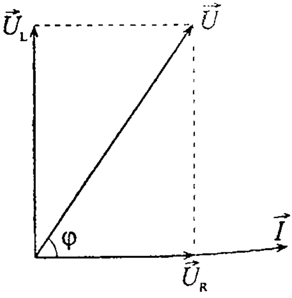
14.21. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением $U=440$ В и частотой $\nu=50$ Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток $I = 0{,}5\,\text{А}$ и падение потенциала на ней было равным $U_\text{л} = 110\,\text{В}$?

Решение:

Ток, протекающий через лампочку (см. задачу 14.20), $I = \frac{U_\text{л}}{R_\text{л}}$ — (1), где $R_\text{л}$ — сопротивление лампочки. С другой стороны, $I = \frac{U}{\sqrt{R_\text{л}^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}$ — (2). Из (1) имеем $R_\text{л} = \frac{U_\text{л}}{I}$ — (3). Возведя (3) в квадрат и подставляя в (2), получим $I = \frac{U}{\sqrt{U_\text{л}^2 / I^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}$, откуда после преобразований находим емкость конденсатора $C = \frac{I}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_\text{л}^2}} = 3{,}74\,\text{мкФ}$.

14.22. Катушка с активным сопротивлением $R = 10\,\text{Ом}$ и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением $U = 127\,\text{В}$ и частотой $\nu = 50\,\text{Гц}$. Найти индуктивность L катушки, если известно, что катушка поглощает мощность $P = 400\,\text{Вт}$ и сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:



Изобразим векторную диаграмму напряжений. Катушка обладает индуктивностью L и активным сопротивлением R. Напряжение на R будет иметь такую же фазу, что и ток I, а напряжение на индуктивности U_L опередит ток на $\frac{\pi}{2}$. Полное напряжение можно изобразить (см. рисунок) векторной суммой $\vec{U}=\vec{U}_R+\vec{U}_L$. Индуктивное сопротивление катушки (см. задачу 14.19) $X_L=2\pi\nu L$ — (1), а ее полное сопротивление $Z=\sqrt{R^2+X_L^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z=\sqrt{R^2+4\pi^2\nu^2L^2}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф}=\frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф}=\frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф}=\frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I=\frac{U}{\sqrt{R^2+1/\left(4\pi^2\nu^2L^2\right)}}$ — (7). Мощность, поглощаемая катушкой, $P=I_{эф}U_{эф}\cos\varphi$ — (8). Подставляя (7) в (8), получаем $P=\frac{U^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2+4\pi^2\nu^2L^2}}$, откуда после преобразований находим индуктивность катушки $L=\frac{\sqrt{U^4\cos^2\varphi-P^2R^2}}{2\pi\nu P}=55$ мГн.

14.23. Найти формулы для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз φ между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: а) R и C включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, L и C включены последовательно.

Решение:

Если цепь содержит сопротивление R, емкость C и индуктивность L, соединенные последовательно, то полное сопротивление цепи равно $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ —

(1), а сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — (2).

а) Если R и C включены последовательно, то $L = 0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ и } tg\varphi = \frac{1}{\omega C R}.$$

б) Если R и C включены параллельно, то $L = 0$. Тогда

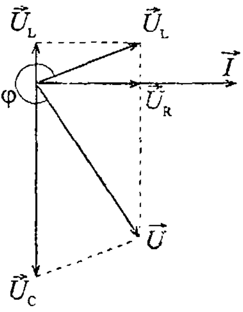
$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}, \text{ откуда } Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \text{ и } tg\varphi = -\omega C R.$$

в) Если R и L включены последовательно, то $C = 0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \text{ и } tg\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

г) Если R и L включены параллельно, то $C = 0$. Тогда

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}, \text{ откуда } Z = \frac{R \omega L}{\sqrt{1 + (\omega L)^2}} \text{ и } tg\varphi = \frac{R}{\omega L}.$$



д) Если R, L и C включены последовательно, то формулы для Z и $tg\varphi$ будут иметь начальный вид (1) и (2). В качестве примера построим векторную диаграмму для данного случая. Векторы $\vec{U}_R$ и $\vec{I}$ будут параллельны, вектор $\vec{U}_L$ повернут на $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, а $\vec{U}_C$ — по часовой стрелке относительно $\vec{I}$ (см. рисунок).

14.24. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 3$ кОм включены в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Найти полное сопротивление Z цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

Решение:

а) Если конденсатор и резистор включены в цепь последовательно, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) равно $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получим $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}} = 4{,}37$ кОм. б) Если конденсатор и резистор включены в цепь параллельно, тогда $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получим $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2\nu^2C^2R^2}} = 2{,}18$ кОм.

14.25. В цепь переменного тока напряжением $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно емкость $C = 35{,}4$ мкФ, сопротивление $R = 100$ Ом и индуктивность $L = 0{,}7$ Гн. Найти ток I в цепи и падения напряжения U_C, U_R и U_L на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Решение:

По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (1), где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (2) — полное сопротивление цепи, $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (3) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (4) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (2) в (1), с учетом (3) и (4), и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота колебаний, находим ток в цепи $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L - 1/2\pi\nu C)^2}} = 1{,}34$ А. Падение напряжения на емкости равно $U_C = IX_C = \frac{I}{2\pi\nu C} = 120{,}49$ В. Падение напряжения на резисторе $U_R = IR = 134$ В. Падение напряжения на индуктивности равно $U_L = IX_L = 2\pi\nu LI = 294{,}68$ В.

14.26. Индуктивность $L = 22{,}6$ мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сопротивление R, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Если индуктивность и сопротивление включены параллельно в цепь переменного тока, то сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.23) определяется формулой $tg\varphi = \frac{R}{\omega L}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получаем $tg\varphi = \frac{R}{2\pi\nu L}$, откуда сопротивление $R = 2\pi\nu L tg\varphi = 12{,}3$ Ом.

14.27. Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением $U = 127$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L, если известно, что цепь поглощает мощность $P = 404$ Вт и сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение:

Если активное сопротивление и индуктивность включены параллельно в цепь переменного тока, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) определяется формулой $Z=\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ — (1), где $\omega=2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний, а сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.26) равен $tg\varphi=\frac{R}{2\pi\nu L}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получаем $Z=\frac{2\pi\nu RL}{\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}$ — (4). По закону Ома для переменного тока $I_{эф}=\frac{U_{эф}}{Z}$ — (5), где $I_{эф}=\frac{I}{\sqrt{2}}$ — (6) и $U_{эф}=\frac{U}{\sqrt{2}}$ — (7) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (4) в (5), с учетом (6) и (7), получим $I=\frac{U\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}{2\pi\nu RL}$ — (8), а мощность переменного тока $P=I_{эф}U_{эф}\cos\varphi$ — (9). Подставляя (8) в (9), получаем $P=\frac{U^2\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}{4\pi\nu RL}$ — (10). Решая совместно (3), (4) и (10), находим $R=\frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi+1}}{2P}=40$ Ом и

$$L=\frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi+1}}{4\pi\nu P tg\varphi}=74\text{ мГн}.$$

14.28. В цепь переменного тока напряжением $U=220$ В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C=2U_R$, на индуктивности $U_L=3U_R$.

Решение:

Если емкость сопротивление и индуктивность включены в цепь переменного тока последовательно, то $U=\frac{U_R}{\sqrt{2}}+\frac{U_L}{\sqrt{2}}-\frac{U_C}{\sqrt{2}}$ — (1), где U_R, U_L и U_C, — падения напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости. По условию $U_C=2U_R$ — (2) и $U_L=3U_R$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $U=\frac{2U_R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}U_R$, откуда падение напряжения на сопротивлении $U_R=\frac{U}{\sqrt{2}}=155{,}56\,\text{В}$.