Глава V
ОПТИКА

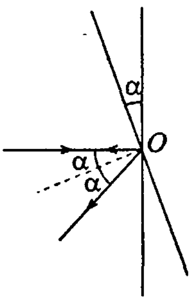
§ 15. Геометрическая оптика и фотометрия

Значение показателя преломления n для некоторых веществ можно найти в таблице 18 приложения.

15.1. Горизонтальный луч света падает на вертикально расположенное зеркало. Зеркало поворачивается на угол α около вертикальной оси. На какой угол θ повернется отраженный луч?

Решение:

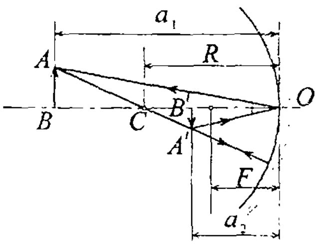
При повороте зеркала на угол α перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке O падения луча, также повернется на угол α, поэтому угол падения тоже будет равен α, а угол между падающим и отраженным лучами равен 2α.



15.2. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 20$ см. На расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 1$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:

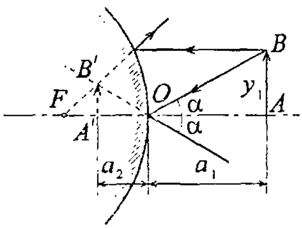
Фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 10$ см. Подставим значения a_1 и F в формулу вогнутого зеркала: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$; отсюда $a_2 = \frac{Fa_1}{a_1 - F} = 15$ см. Т. к. стержень



расположен за центром зеркала, то его изображение действительное ($f > 0$), обратное, уменьшенное. Увеличение $k = \frac{a_2}{a_1} = 0{,}5$. Следовательно, высота изображения $y_2 = ky_1 = 0{,}5$ см.

15.3. На каком расстоянии a_2 от зеркала получится изображение предмета в выпуклом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см, если предмет помещен на расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала? Какова будет высота y_2 изображения, если предмет имеет высоту $y_1 = 2$ см? Проверить вычисления, сделав чертеж на миллиметровой бумаге.

Решение:



Изображение $A'B'$ предмета AB мнимое, прямое, уменьшенное. Фокусное расстояние зеркала $F = -\frac{R}{2} = -20$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{12}$, откуда $a_2 = -12$ см. Увеличение $k = \frac{|a_2|}{a_1} = 0{,}4$. Высота изображения $y_2 = ky_1 = 0{,}8$ см.

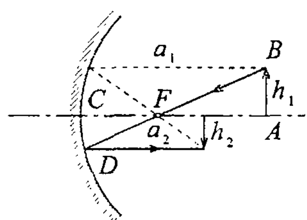
15.4. Выпуклое зеркало имеет радиус кривизны $R = 60$ см. На расстоянии $a_1 = 10$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:

Изображение мнимое, прямое, уменьшенное (см. рисунок к задаче 15.3). Фокусное расстояние зеркала $F = -\frac{R}{2} = -30$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_1}$, откуда $a_2 = -7{,}5$ см. Увеличение $k = \frac{|a_2|}{a_1} = 0{,}75$. Высота изображения $y_2 = ky_1 = 1.5$ см.

15.5. В вогнутом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см хотят получить действительное изображение, высота которого вдвое меньше высоты самого предмета. Где нужно поставить предмет и где получится изображение?

Решение:



Из подобия треугольников ABF и CDF следует, что $\frac{h_2}{h_1} = \frac{F}{a_1 - F}$ — (1). По формуле вогнутого зеркала имеем $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ — (2), откуда $a_2 = \frac{a_1 F}{a_1 - F}$ — (3). Из сравнения соотношений (1) и (2) получаем $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}$. По условию $\frac{h_1}{h_2} = 2$, следовательно, $\frac{a_1}{a_2} = 2$ или $a_1 = 2a_2$ — (4). Фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 20$ см. Из (2) найдем $F = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$, подставляя (4), получим $F = a_2$, следовательно, $a_1 = 2F = R$. Таким образом, предмет нужно поместить в центр кривизны зеркала, а его изображение получится в фокусе.

15.6. Высота изображения предмета в вогнутом зеркале вдвое больше высоты самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $a_1 + a_2 = 15$ см. Найти фокусное расстояние F и оптическую силу D зеркала.

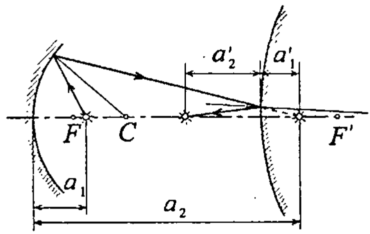
Решение:

Имеем $\frac{h_2}{h_1} = 2$, следовательно, $\frac{a_2}{a_1} = 2$ (см. задачу 15.5). По условию $a_1 + a_2 = 15$ см. Т. к. $a_2 = 2a_1$, то $a_1 + 2a_1 = 15$ см; $a_1 = 5$ см; $a_2 = 10$ см. Изображение получится прямое, мнимое и увеличенное, если предмет находится между зеркалом и фокусом. Тогда по формуле зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$, откуда фокусное расстояние $F = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = 10$ см. Оптическая сила зеркала $D = \frac{1}{F} = 10$ дптр.

15.7. Перед вогнутым зеркалом на главной оптической оси перпендикулярно к ней на расстоянии $a_1 = \frac{4F}{3}$ от зеркала поставлена горящая свеча. Изображение свечи в вогнутом зеркале попадает на выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F' = 2F$. Расстояние между зеркалами $d = 3F$, их оси совпадают. Изображение свечи в первом зеркале играет роль мнимого предмета по отношению ко второму зеркалу и дает действительное изображение, расположенное между обеими зеркалами. Построить это изображение и найти общее линейное увеличение k системы.

Решение:

Имеем $\frac{1}{F}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$ — (1);



$\frac{1}{2F}=\frac{1}{a_1'}-\frac{1}{a_2'}$ — (2); по условию $a_2-a_1'=3F$ — (3). Увеличение вогнутого зеркала $k_1=\frac{a_2}{a_1}$, увеличение выпуклого зеркала $k_2=\frac{a_2'}{a_1'}$, общее увеличение системы $k=k_1k_2=\frac{a_2a_2'}{a_1a_1'}$ — (4). По условию $a_1=\frac{4F}{3}$, тогда из (1) найдем $a_2=4F$. Подставляя значение a_2 в (3), получим $4F-a_1'=3F$, откуда $a_1'=F$. Тогда из (2) найдем $a_2'=2F$. Подставляя значения a_1, a_2, a_1' и a_2' в (4), найдем $k=\frac{4F\cdot 2F\cdot 3}{4F\cdot F}=6$.

15.8. Где будет находиться и какой размер y_2 будет иметь изображение Солнца, получаемое в рефлекторе, радиус кривизны которого $R=16$ м?

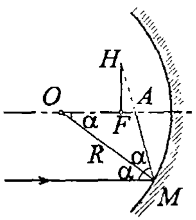
Решение:

Диаметр Солнца $y_1=1{,}4\cdot 10^9$ м, расстояние от Земли до Солнца $a_1=1{,}5\cdot 10^{11}$ м. Имеем $\frac{y_2}{y_1}=\frac{a_2}{a_1}$ — (1), где a_2 — расстояние от рефлектора до изображения Солнца (см. задачу 15.5). По формуле зеркала $\frac{2}{R}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$, откуда

$a_2 = \frac{Ra_1}{2a_1 - R} \approx 8$ м, т. е. изображение будет находиться в фокусе. Это следует также из того, что расстояние до Солнца очень велико и его лучи можно считать параллельными, следовательно, они дадут изображение в фокусе. Из (1) найдем $y_2 = y_1 a_2 / a_1 = 7{,}5$ см.

15.9. Если на зеркало падает пучок света, ширина которого определяется углом α, то луч, идущий параллельно главной оптической оси и падающий на край зеркала, после отражения от него пересечет оптическую ось уже не в фокусе, а на некотором расстоянии AF от фокуса. Расстояние $x = AF$ называется продольной сферической аберрацией, расстояние $y = FH$ — поперечной сферической аберрацией. Вывести формулы, связывающие эти аберрации с углом α и радиусом кривизны зеркала R.

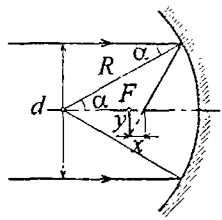
Решение:



Из равнобедренного треугольника OAM имеем $OA = \frac{R}{2} cos\,\alpha$. Продольная сферическая аберрация $x = AF = OA - \frac{R}{2}$, или $x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{cos\,\alpha} - 1\right)$. При $\alpha = 0$ имеем $cos\,\alpha = 1$, следовательно, $x = 0$. Поперечная сферическая аберрация $y = FH = x tg\angle HAF$. Но $\angle HAF = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AOM, отсюда $y = \frac{R}{2} \times \left(\frac{1}{cos\,\alpha} - 1\right) tg 2\alpha$. При $\alpha = 0$ имеем $cos\,\alpha = 1$, следовательно, $tg 2\alpha = 0$ и $y = 0$.

15.10. Вогнутое зеркало с диаметром отверстия $d = 40$ см имеет радиус кривизны $R = 60$ см. Найти продольную x и поперечную y сферическую аберрацию краевых лучей, параллельных главной оптической оси.

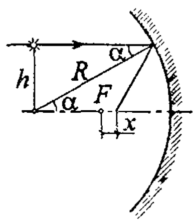
Решение:



Из задачи 15.9 имеем $x=\frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$ — (1); $y=\frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)tg2\alpha$ — (2). Из рисунка видно, что $\sin\alpha\approx\frac{d/2}{R}\approx 0{,}33$, отсюда $\alpha\approx 19.3°$; $\cos\alpha\approx 0{,}94$; $tg2\alpha\approx 0{,}8$. Подставляя числовые данные, получим $x=1{,}8$ см; $y=1{,}44$ см.

15.11. Имеется вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F=20$ см. На каком наибольшем расстоянии h от главной оптической оси должен находиться предмет, чтобы продольная сферическая аберрация x составляла не больше 2% фокусного расстояния F?

Решение:

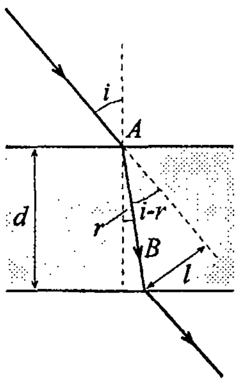


Имеем $x=F\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$ — (1) (см. задачу 15.9). Из рисунка видно, что $h=R\sin\alpha$ или $\sin\alpha=\frac{h}{R}=\frac{h}{2F}$ — (2). Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ или, с учетом (2), $\cos\alpha=\sqrt{1-h^2/4F^2}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и учитывая, что $x=0{,}02F$, получим $0{,}02F=F\left(\frac{1}{\sqrt{1-h^2/\left(4F^2\right)}}-1\right)$;

$\frac{1}{\sqrt{1-h^2/\left(4F^2\right)}}=1{,}02$; $\frac{h^2}{4F^2}=0{,}04$; $h=2F\cdot 0{,}2=0{,}08$ м.

15.12. Луч света падает под углом $i = 30°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Какова толщина d пластинки, если расстояние между лучами $l = 1{,}94$ см?

Решение:



Смещение луча $l = AB\sin(i - r)$, где r — угол преломления луча в стекле. Толщина пластинки d связана со смещением луча следующим соотношением: $d = AB\cos r = \dfrac{l\cos r}{\sin i\cos r - \cos i\sin r}$. Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$, т. е. $\cos r = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}$, поэтому $d = \dfrac{l\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin i\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i\right)}$.

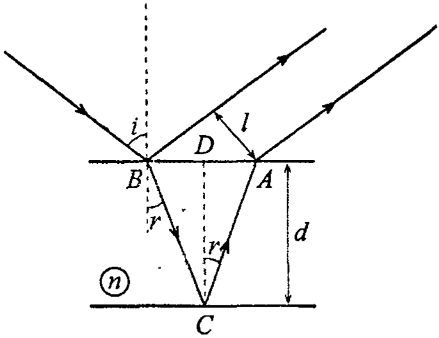
Подставляя числовые данные, получим $d = 0{,}1$ м.

15.13. На плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 1$ см падает луч света под углом $i = 60°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}73$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности пластинки и, преломляясь вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Найти расстояние l между лучами.

Решение:

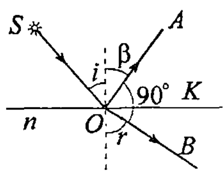
Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = 0{,}5$, следовательно, угол преломления $r = 30°$. Из ΔADC найдем $AD = d \cdot tg r$, тогда $AB = 2d \cdot tg r$, а $l = AB\sin(90° - i) =$

$= 2d \cdot tgr\, sin 30°$. Подставляя числовые данные, получим $l = 0{,}58$ см.



15.14. Луч света падает под углом i на тело с показателем преломления n. Как должны быть связаны между собой величины i и n, чтобы отраженный луч был перпендикулярен к преломленному?

Решение:



Согласно закону преломления $\frac{sin\, i}{sin\, r} = \frac{1}{n}$ — (1). Из рисунка видно, что $\angle KOB = \beta$, $\angle KOA = r$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поскольку по закону отражения $\beta = i$, а $\angle KOB + \angle KOA = 90°$ (по условию), то $i + r = 90°$. Совместное решение (1) и (2) дает $\frac{sin\, i}{sin\, r} = \frac{sin\, i}{sin(90° - i)} = \frac{sin\, i}{cos\, i} = tg i = n$.

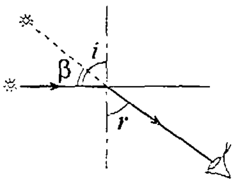
15.15. Показатель преломления стекла $n = 1{,}52$. Найти предельный угол полного внутреннего отражения β для поверхности раздела: а) стекло — воздух; б) вода — воздух; в) стекло — вода.

Решение:

Полное внутреннее отражение происходит, если значение преломленного угла $r \geq 90°$. При $r = 90°$ из закона преломления имеем $sin\,\beta = \frac{n_2}{n_1}$. Подставляя значение n_1 и n_2 для различных поверхностей раздела, найдем: а) $sin\,\beta = \frac{1}{1{,}52} = 0{,}65$; $\beta \approx 41°$; б) $sin\,\beta = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$; $\beta \approx 49°$; в) $sin\,\beta = \frac{1{,}33}{1{,}52} = \frac{1{,}33}{1{,}52} = 0{,}88$; $\beta \approx 61°$.

15.16. В каком направлении пловец, нырнувший в воду, видит заходящее Солнце?

Решение:



Угол падения солнечных лучей $i = 90°$. Из закона преломления имеем $\frac{sin\,i}{sin\,r} = n$ или $\frac{1}{sin\,r} = n$, откуда $sin\,r = \frac{1}{n} = 0{,}75$; $r \approx 49°$. Следовательно, пловец видит Солнце под углом $\beta = i - r = 41°$ к поверхности воды.

15.17. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения для этого луча $\beta = 42°23'$. Найти скорость v_1 распространения света в скипидаре.

Решение:

Физический смысл абсолютного показателя преломления заключается в том, что он показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в данном веществе. Тогда скорости распространения света в скипидаре и в воздухе связаны с соответствующими показателями преломления соотношением $\frac{n_1}{n_2}=\frac{v_2}{v_1}$ — (1).

Поскольку $n_2=1$, а $v_2=c$, то из (1) $n_1=\frac{c}{v_1}$ — (2), где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в воздухе. Значение n_1 найдем из соотношения $\sin\beta=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{n_1}$, откуда $n_1=\frac{1}{\sin\beta}$.

Тогда из (2) найдем $v_1=\frac{c}{n_1}=c\sin\beta$. Подставляя числовые данные, получим $v_1=2{,}02\cdot10^8$ м/с.

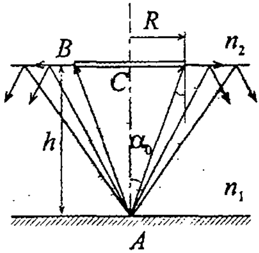
15.18. На стакан, наполненный водой, положена стеклянная пластинка. Под каким углом i должен падать на пластинку луч света, чтобы от поверхности раздела вода — стекло произошло полное внутреннее отражение? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

Решение:

По закону преломления $\frac{\sin i}{\sin\beta}=n$. Если $\sin\beta=\frac{n_1}{n}$, где n_1 — показатель преломления воды, то произойдет полное внутреннее отражение от поверхности раздела стекло — вода. Тогда $\sin i=n\sin\beta=n_1=1{,}33$, т. е. условия задачи неосуществимы.

15.19. На дно сосуда, наполненного водой до высоты $h=10$ см, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка так, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус r должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

Решение:



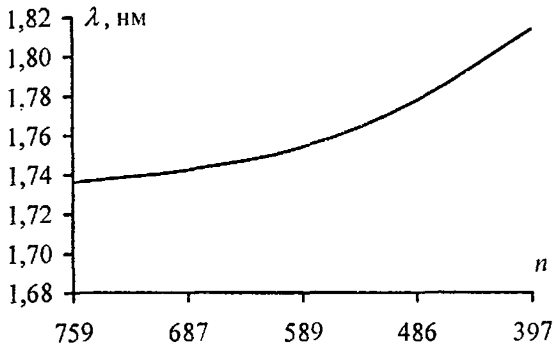
Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного α_0, отразятся в воду, испытывая полное отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса радиусом r и вершиной в точке A. Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать: $sin\,\alpha_0 = \dfrac{n_2}{n_1}$ — (1), где n_1 и n_2 — показатели преломления воды и воздуха соответственно. Из ΔABC $r = htg\alpha_0$ — (2). Решая совместно (1) и (2) относительно радиуса пластинки, получим: $r = \dfrac{hn_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$. Полагая, что показатели преломления воздуха и воды соответственно $n_1 = \dfrac{4}{3}$ и $n_2 = 1$, находим: $r = \dfrac{3}{\sqrt{7}} h = 11{,}3$ см.

15.20. При падении белого света под углом $i = 45°$ на стеклянную пластинку углы преломления β лучей различных длин волн получились следующие:

λ, нм	759	687	589	486	397
β	24°2′	23°57′	23°47′	23°27′	22°57′

Построить график зависимости показателя преломления n материала пластинки от длины волны λ.

Решение:



Имеем $\frac{\sin i}{\sin\beta} = n$. Т. к. $\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $n = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. Подставляя числовые данные, дополним таблицу значениями n и построим график зависимости $n = f(\lambda)$.

λ, нм	759	687	589	486	397
β	24°2′	23°57′	23°47′	23°27′	22°57′
N	1,74	1,74	1,75	1,78	1,81

15.21. Показатели преломления некоторого сорта стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1{,}51$ и $n_ф = 1{,}53$. Найти предельные углы полного внутреннего отражения $\beta_{кр}$ и $\beta_ф$ при падении этих лучей на поверхность раздела стекло — воздух.

Решение:

Имеем $\sin\beta = \frac{1}{n}$ (см. задачу 15.15). Отсюда $\sin\beta_{кр} = \frac{1}{n_{кр}} = 0{,}66$; $\beta_{кр} = 41{,}5°$; $\sin\beta_ф = \frac{1}{n_ф} = 0{,}65$; $\beta_ф = 40{,}8°$.

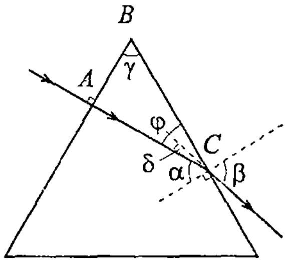
15.22. Что происходит при падении белого луча под углом $i = 41°$ на поверхность раздела стекло — воздух, если взять стекло предыдущей задачи? (Воспользоваться результатами предыдущей задачи.)

Решение:

Поскольку полное внутреннее отражение происходит при значениях угла падения $i > \beta$ (предельного угла полного отражения), то фиолетовые лучи испытают полное внутреннее отражение, а красные лучи выйдут из стекла в воздух.

15.23. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы, преломляющий угол которой $\gamma = 40°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}5$. Найти угол отклонения δ луча, выходящего из призмы, от первоначального направления.

Решение:



Т. к. луч падает по нормали, то на первой поверхности он испытывает преломления. Обозначим через α и β углы падения и преломления на второй поверхности. δ — угол между входящим лучом и продолжением луча, выходящего из призмы. Угол $\varphi = \delta + (90° - \beta)$ — (1). Из ΔABC: $90° + \gamma + \varphi = 180°$; $\gamma + \varphi = 90°$ — (2). Подставим (2) в (1): $\gamma + \varphi + 90° - \beta = 90°$. Отсюда $\delta = \beta - \gamma$ — (3). Угол $\alpha = 90° - \varphi$. Из уравнения (2) $\varphi = 90° - \gamma$, следовательно, $\alpha = \gamma = 40°$. Угол β найдем из закона преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$, откуда $\sin\beta = n\sin\alpha = n\sin\gamma$; $\sin\beta = 1{,}5 \cdot 0{,}64 =$ $= 0{,}96$, отсюда $\beta \approx 74°$. Тогда из (2) $\delta \approx 74° - 40° = 34°$.

15.24. Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы и выходит из нее отклоненным на угол $\delta = 25°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}7$. Найти преломляющий угол γ призмы.

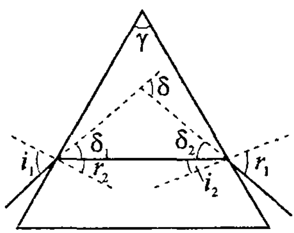
Решение:

См. решение задачи 15.23. Из уравнения (3) $\beta = \delta + \gamma$. Из закона преломления $n\sin\alpha = \sin\beta$; $\sin\beta = \sin(\delta + \gamma) = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$. Но $\alpha = \gamma$, отсюда $\sin\alpha = \sin\gamma$; $n\sin\gamma = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$; $\sin\gamma(n - \cos\delta) = \sin\delta\cos\gamma$;

$$tg\gamma = \frac{\sin\delta}{n - \cos\delta};\ tg\gamma = \frac{0{,}42}{1{,}7 - 0{,}9} = 0{,}53;\ \gamma \approx 28°.$$

15.25. Преломляющий угол равнобедренной призмы $\gamma = 10°$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $i = 10°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}6$. Найти угол отклонения δ луча от первоначального направления.

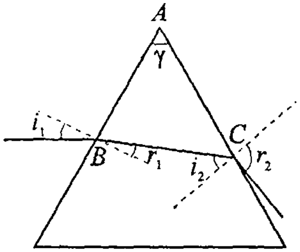
Решение:



Преломляющий угол призмы и угол падения луча малы, для малых углов падения и преломления получаем $r_2 = \frac{\gamma}{n}$, $r_1 = i_2 n$. Поскольку $i_2 = \gamma - r_2$, находим $i_2 = \gamma - r_2$, $r_1 = \gamma n - i_1$. Угол отклонения луча призмой $\delta = \delta_1 + \delta_2 = (i_1 - r_2) + (r_1 - i_2) = \gamma(n - 1)$. Подставляя числовые данные, получим $\delta = 6{,}2°$.

15.26. Преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатель преломления материала призмы для некоторого монохроматического луча $n = 1{,}6$. Каков должен быть наибольший угол падения i этого луча на призму, чтобы при выходе луча из нее не наступало полное внутреннее отражение?

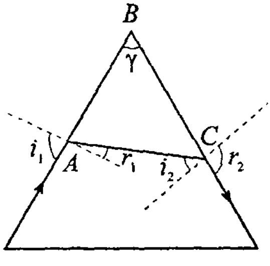
Решение:



Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \frac{1}{n} = 0{,}625$; $i_2 = 38{,}7°$. Поскольку сумма углов γ, $90^o - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $r_1 = \gamma - i_2 = 6{,}3°$. Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n \sin r_1) = 10°$. Т. е. при углах падения больших $10°$ наступит полное внутреннее отражение.

15.27. Пучок света скользит вдоль боковой грани равнобедренной призмы. При каком предельном преломляющем угле γ призмы преломленные лучи претерпят полное внутреннее отражение на второй боковой грани? Показатель преломления материала призмы для этих лучей $n = 1{,}6$.

Решение:

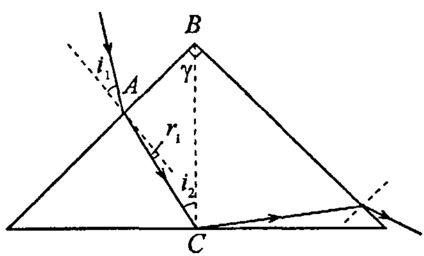


Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \frac{1}{n} = 0{,}625$; $i_2 = 38{,}7°$. Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника

ABC равна $180°$, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (1). Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $r_1 = \arcsin\frac{1}{n} = 38{,}7°$. Тогда из (1) $\gamma = 2 \cdot 38{,}7° = 77{,}4°$.

15.28. Монохроматический луч падает на боковую поверхность прямоугольной равнобедренной призмы. Войдя в призму, луч претерпевает полное внутреннее отражение от основания призмы и выходит через вторую боковую поверхность призмы. Каким должен быть наименьший угол падения i луча на призму, чтобы еще происходило полное внутреннее отражение? Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1{,}5$.

Решение:



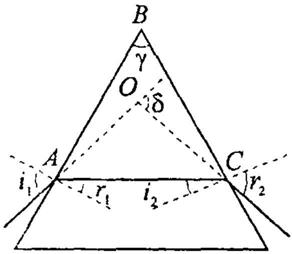
Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда

$i_2 = \arcsin\frac{1}{n} = 41{,}8°$.

Поскольку сумма углов $45°$, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника *ABC* равна $180°$, найдем $r_1 = 45° - i_2 = 3{,}2°$. Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n \sin r_1) = 4{,}7°$.

15.29. Монохроматический луч падает на боковую поверхность равнобедренной призмы и после преломления идет в призме параллельно ее основанию. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол δ от своего первоначального направления. Найти связь между преломляющим углом призмы γ, углом отклонения луча δ и показателем преломления для этого луча n.

Решение:



Согласно закону преломления $\sin i_1 = n \sin r_1$ — (1). Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна 180°, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). ΔABC — равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ или $90° - r_1 = 90° - i_2$, откуда $r_1 = i_2$ — (3). Тогда из (2) $\gamma = 2i_2$ или $i_2 = \frac{\gamma}{2}$ — (4). ΔAOC также равнобедренный, сумма его углов $180° - \delta + 2(i_1 - r_1) = 180°$, откуда $\delta = 2i_1 - 2r_1$; $r_1 = i_1 = \frac{\delta}{2}$ — (5). Подставляя (5) в (2), с учетом (4), получим $\gamma = i_1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, откуда $i_1 = \frac{\gamma + \delta}{2}$ — (6). Поскольку $r_1 = i_2 = \frac{\gamma}{2}$, и с учетом (6), уравнение (1) можно записать в виде $\sin\frac{\gamma + \delta}{2} = n \sin\frac{\gamma}{2}$.

15.30. Луч белого света падает на боковую поверхность равнобедренной призмы под таким углом, что красный луч выходит из нее перпендикулярно к второй грани. Найти углы отклонения $\delta_{кр}$ и $\delta_{ф}$ красного и фиолетового лучей от первоначального направления, если преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатели преломления материала призмы для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1{,}37$ и $n_{ф} = 1{,}42$.

Решение:

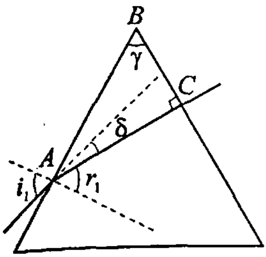


Рис.1

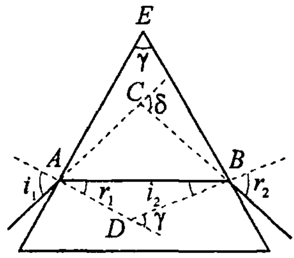


Рис.2

Красный луч выходит из второй грани под углом $0°$ (рис. 1), следовательно, $n_{кр}\, sin\, i_2 = 0$, откуда $\alpha_2 = 0°$, т. е. красный луч падает на вторую грань перпендикулярно к ней. В ΔABC угол $\angle BAC$ равен $45°$. Тогда $r_1 = 90° - BAC = 45°$. По закону преломления $sin\, i_1 = n_{кр}\, sin\, r_1$, откуда $i_1 = arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}n_{кр} = 75{,}6°$. Таким образом, мы найдем угол падения белого луча. Сумма углов треугольника ABC равна $\delta_{кр}(90° - i_1) + 45° + 90° = 180°$, откуда найдем угол отражения красного луча $\delta_{кр} = 30{,}6°$. Угол отражения фиолетового луча $\delta_ф = (i_1 - r_1) + (r_2 - i_2)$ — (1), как внешний угол ΔABC (рис. 2). Кроме того, $\angle AEB = \angle BDK$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Угол BDK является внешним углом треугольника ABD, поэтому $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). По закону преломления света $sin\, i_1 = n_ф\, sin\, r_1$ — (3) и $sin\, r_2 = n_ф\, sin\, i_2$ — (4). Из (3) найдем $r_1 = arcsin\left(\dfrac{sin\, i_1}{n_ф}\right) = 43°$. Из (2): $i_2 = \gamma - r_1 = 45° - 43° = 2°$. Из (4): $r_2 = arcsin(n_ф\, sin\, i_2) = 2{,}8°$. Подставив найденные значения углов в (1), получим $\delta_ф = (75{,}6° - 43°) + (2{,}8° - 2°) = 33{,}4°$.