15.31. Найти фокусное расстояние F_1 кварцевой линзы для ультрафиолетовой линии спектра ртути ($\lambda_1 = 259$ нм), если фокусное расстояние для желтой линии натрия ($\lambda_2 = 589$ нм) $F_2 = 16$ см. Показатели преломления кварца для этих длин волн равны $n_1 = 1{,}504$ и $n_2 = 1{,}458$.

Решение:

Для линзы, имеющей радиусы кривизны R_1 и R_2, имеем $(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F}$ — (1), где n — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза. Для желтой линии из (1) имеем $F_2 = \frac{R_1 R_2}{(n_2-1)(R_2-R_1)}$, откуда $\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = F_2(n_2-1)$ — (2). Поскольку для ультрафиолетовой линии $F_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_1-1)(R_2-R_1)}$ — (3), то, подставляя (2) в (3), получим $F_1 = \frac{F_2(n_2-1)}{n_1-1} = 0{,}145$ м.

15.32. Найти фокусное расстояние F для следующих линз: а) линза двояковыпуклая: $R_1 = 15$ см и $R_2 = -25$ см; б) линза плоско-выпуклая: $R_1 = 15$ см и $R_2 = \infty$ см; в) линза вогнуто-выпуклая (положительный мениск): $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см; г) линза двояковогнутая: $R_1 = -15$ см и $R_2 = 25$ см; д) линза плоско-вогнутая: $R_1 = \infty$ см; $R_2 = -15$ см; е) линза выпукло-вогнутая (отрицательный мениск): $R_1 = 25$ см, $R_2 = 15$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$.

Решение:

По формуле линзы $(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F}$ — (1), откуда $F=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$ — (2). В случае плоско-выпуклой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=\frac{R_1}{n-1}$ — (3). В случае плоско-вогнутой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $-(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=-\frac{R_2}{n-1}$ — (4). Подставляя числовые данные, получим:

а) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot(-0{,}25)}{0{,}5\cdot(-0{,}25-0{,}15)}=0{,}188$ м;

б) из (3) $F=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

в) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5\cdot(0{,}25-15)}=0{,}75$ м;

г) из (2) $F=\frac{-0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5(0{,}25+0{,}15)}=-0{,}188$ м;

д) из (4) $F=-\frac{-0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

е) из (2) $F=\frac{0{,}25\cdot 0{,}15}{0{,}5(0{,}15-0{,}25)}=-0{,}75$ м.

15.33. Из двух стекол с показателями преломления $n_1=1{,}5$ и $n_2=1{,}7$ сделаны две одинаковые двояковыпуклые линзы. Найти отношение $\frac{F_1}{F_2}$ их фокусных расстояний. Какое действие каждая из этих линз произведет на луч, параллельный оптической оси, если погрузить линзы в прозрачную жидкость с показателем преломления $n = 1{,}6$?

Решение:

Имеем $F_1 = \dfrac{R_1R_2}{(n_1-1)(R_2-R_1)}$; $F_2 = \dfrac{R_1R_2}{(n_2-1)(R_2-R_1)}$ (см. задачу 15.32). Отсюда $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{n_2-1}{n_1-1} = 1{,}4$.

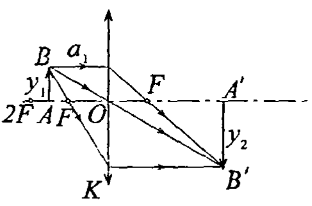
15.34. Радиусы кривизны поверхностей двояковыпуклой линзы $R_1 = R_2 = 50$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$. Найти оптическую силу D линзы.

Решение:

Согласно формуле тонкой линзы $D = (n-1)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$. Поскольку по условию $R_1 = R_2 = R$, то $D = \dfrac{2(n-1)}{R}$. Подставляя числовые данные, получим $D = \dfrac{2(1{,}5-1)}{0{,}5} = 2$ дптр.

15.35. На расстоянии $a_1 = 15$ см от двояковыпуклой линзы, оптическая сила которой $D = 10$ дптр, поставлен перпендикулярно к оптической оси предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение:



Фокусное расстояние линзы $F = \dfrac{1}{D} = 0{,}1$ м, т. е. предмет находится за фокусом. По условию $AO = a_1 = 0{,}15$ м, $OF = F = 0{,}1$ м, $AB = y_1 = 0{,}02$ м.

Поскольку ΔABO подобен $\Delta A'B'O$, то $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AO}{A'O}$ — (1). Кроме того, ΔABF подобен ΔOKF, следовательно, $\dfrac{AB}{OK}=\dfrac{AF}{OF}$ или $\dfrac{0{,}02}{OK}=\dfrac{0{,}05}{0{,}1}$, откуда $OK=0{,}04$ м. По построению $A'B'=OK=0{,}04$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим $\dfrac{0{,}02}{0{,}04}=\dfrac{0{,}15}{OA'}$, откуда $OA'=0{,}3$ м.

15.36. Доказать, что в двояковыпуклой линзе с равными радиусами кривизны поверхностей и с показателем преломления $n=1{,}5$ фокусы совпадают с центрами кривизны.

Решение:

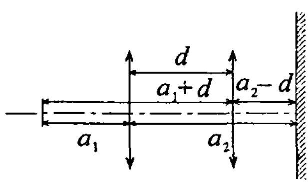
По формуле тонкой линзы $\dfrac{1}{F}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$, откуда при $R_1=R_2=R$, имеем $F=\dfrac{R}{2(n-1)}$. При $n=1.5$ получим $F=\dfrac{R}{2(1{,}5-1)}=R$.

15.37. Линза с фокусным расстоянием $F=16$ см дает резкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми $d=6$ см. Найти расстояние a_1+a_2 от предмета до экрана.

Решение:

Запишем формулу тонкой линзы для двух положений:

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{F}$ — (1) и $\dfrac{1}{a_1+d}+$ $+\dfrac{1}{a_2-d}=\dfrac{1}{F}$ — (2). Предмет и



экран неподвижны, следовательно, в первом случае предмет по отношению к линзе находится между первым и вторым фокусом, а во втором случае за вторым фокусом. Из (1) получим $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{1}{F}$ — (3). Из (2) получим $\frac{a_1 + a_2}{(a_1 + d)(a_2 - d)} = \frac{1}{F}$ — (4). Приравняем левые части уравнений (3) и (4) $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2}{(a_1 + d)(a_2 - d)}$, откуда $a_1 a_2 = (a_1 + d)(a_2 - d)$. Раскрыв скобки и проведя небольшое преобразование, получим $a_1 = a_2 - d$ — (5). Подставляя (5) в (3), получим $\frac{a_2 - d + a_2}{(a_2 - d)a_2} = \frac{1}{F}$; $1 + \frac{a_2}{a_2 - d} = \frac{1}{F}$; $a_2 = \frac{d(1-F)}{1-2F} = 0{,}74$ м. Тогда из (5) $a_1 + a_2 = 2a_2 - d = 0{,}88$ м.

15.38. Двояковыпуклая линза с радиусами кривизны поверхностей $R_1 = R_2 = 12$ см поставлена на таком расстоянии от предмета, что изображение на экране получилось в k раз больше предмета. Найти расстояние $a_1 + a_2$ от предмета до экрана, если: а) $k = 1$; б) $k = 20$; в) $k = 0{,}2$. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}5$.

Решение:

Линейное увеличение линзы $k = \frac{a_2}{a_1}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ или, при $R_1 = R_2 = R$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2(n-1)}{R}$; $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{2(n-1)}{R}$ — (2). Из (1) имеем

$a_2 = ka_1$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{1+k}{ka_1} = \frac{2(n-1)}{R}$, откуда $a_1 = \frac{R(1+k)}{2k(n-1)}$. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a_1 = 0{,}24$ м; $a_2 = ka_1 = 0{,}24$ м; $a_1 + a_2 = 0{,}48$ м;

б) $a_1 = 0{,}126$ м; $a_2 = ka_1 = 2{,}52$ м; $a_1 + a_2 = 2{,}65$ м;

в) $a_1 = 0{,}72$ м; $a_2 = ka_1 = 0{,}144$ м; $a_1 + a_2 = 0{,}864$ м.

15.39. Линза предыдущей задачи погружена в воду. Найти ее фокусное расстояние F.

Решение:

В общем случае формула для расчета фокусного расстояния линзы имеет вид: $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ — (1), где $n_1 = 1{,}5$ — показатель преломления стекла, $n_2 = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Т. к. $R_1 = R_2 = R$, то из (1) получим $F = \frac{R}{2(n_1/n_2 - 1)}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 0{,}46$ м.

15.40. Решить предыдущую задачу при условии, что линза погружена в сероуглерод.

Решение:

Имеем $F = \frac{R}{2(n_1/n_2 - 1)}$. Показатель преломления сероуглерода $n_2 = 1{,}63$. Подставляя числовые данные, получим $F = -0{,}75$ м. Т. е. линза будет рассеивающей.

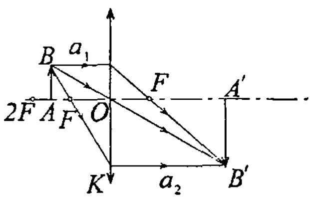
15.41. Найти фокусное расстояние F_2 линзы, погруженной в воду, если ее фокусное расстояние в воздухе $F_1 = 20$ см. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}6$.

Решение:

Имеем $F_1 = \dfrac{R}{2(n/n_1 - 1)}$ — (1); $F_2 = \dfrac{R}{2(n/n_2 - 1)}$, где n_1 — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Разделив (1) на (2), получим $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{n/n_2 - 1}{n/n_2 - 1} = \dfrac{n_1(n - n_2)}{n_2(n - n_1)}$. Отсюда $F_2 = \dfrac{F_1 n_2(n - n_1)}{n_1(n - n_2)} = 0{,}59$ м.

15.42. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны $R = 30$ см и показателем преломления $n = 1{,}5$ дает изображение предмета с увеличением $k = 2$. Найти расстояния a_1 и a_2 предмета и изображения от линзы. Дать чертеж.

Решение:



Толстые линзы, имеющие радиус кривизны R_1 и R_2 — двояковыпуклые, или $R_1 = \infty$ и R_2 — плоско-выпуклые, проявляют себя как тонкие линзы, если рассматривать лучи, находящиеся вблизи главной оптической оси. Тогда аберрация не учитывается и построения аналогичны построениям в тонкой линзе. Линейное увеличение линзы $k = \dfrac{a_2}{a_1}$, откуда $a_2 = ka_1$ — (1). Для плоско-выпуклой линзы $\dfrac{1}{F} = \dfrac{n-1}{R} = -\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}$ — (2) (см. задачу 15.32). Из (2) имеем $\dfrac{n-1}{R} = \dfrac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$. Подставляя это выражение в (1), получим $\dfrac{n-1}{R} = \dfrac{1-k}{ka_1}$, откуда $a_1 = \dfrac{R(1-k)}{k(n-1)} = -0{,}9$ м. Тогда из (1) найдем $a_2 = 1{,}8$ м.

15.43. Найти продольную хроматическую аберрацию двояковыпуклой линзы из флинтгласа с радиусами кривизны $R_1 = R_2 = 8$ см. Показатели преломления флинтгласа для красного ($\lambda_{кр} = 760$ нм) и фиолетового ($\lambda_ф = 430$ нм) лучей равны $n_{кр} = 1{,}5$ и $n_ф = 1{,}8$.

Решение:

Имеем $F_1 = \dfrac{R_1}{2(n_1 - 1)}$ (см. задачу 15.36). Подставляя числовые данные, получим $F_1 = 0{,}08$ м. Аналогично $F_2 = \dfrac{R_2}{2(n_2 - 1)} = 0{,}05$ м. Таким образом, продольная хроматическая аберрация составляет $F_1 - F_2 = 0{,}03$ м.

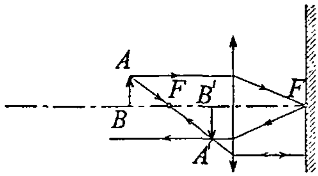
15.44. На расстоянии $a_1 = 40$ см от линзы предыдущей задачи на оптической оси находится светящаяся точка. Найти положение изображения этой точки, если она испускает монохроматический свет с длиной волны: а) $\lambda_1 = 760$ нм; б) $\lambda_2 = 430$.

Решение:

Из формулы линзы имеем $a_2 = \dfrac{Fa_1}{a_1 - F}$ — (1). В задаче 15.43 мы нашли, что для данной линзы длине волны $\lambda_1 = 760$ нм соответствует фокусное расстояние $F_1 = 0{,}08$ м, а длине волны $\lambda_2 = 430$ нм соответствует фокусное расстояние $F_2 = 0{,}05$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим: а) $a_2 = 0{,}1$ м; б) $a_2 = 0{,}057$ м.

15.45. В фокальной плоскости двояковыпуклой линзы расположено плоское зеркало. Предмет находится перед линзой между фокусом и двойным фокусным расстоянием. Построить изображение предмета.

Решение:



Построение хода лучей показано на рисунке.

15.46. Найти увеличение k, даваемое лупой с фокусным расстоянием $F = 2$ см, для: а) нормального глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 25$ см; б) близорукого глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 15$ см.

Решение:

Увеличение лупы $k = \dfrac{L}{F}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $k = \dfrac{0{,}25}{0{,}02} = 12{,}5$; б) $k = \dfrac{0{,}15}{0{,}02} = 7{,}5$.

15.47. Какими должны быть радиусы кривизны $R_1 = R_2$ поверхностей лупы, чтобы она давала увеличение для нормального глаза $k = 10$? Показатель преломления стекла, из которого сделана лупа, $n = 1{,}5$.

Решение:

Для нормального глаза расстояние наилучшего зрения $L = 0{,}25$ м — (1). Фокусное расстояние лупы $F = \dfrac{R}{2(n-1)}$ (см. задачу 15.36), откуда $R = 2F(n-1)$ — (2). Увеличение лупы $k = \dfrac{L}{F}$, откуда $F = \dfrac{L}{k}$ — (3). Подставляя (3) в (2) и с учетом (1), получим $R = \dfrac{2L(n-1)}{k} = 0{,}025$ м.

15.48. Зрительная труба с фокусным расстоянием $F = 50$ см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы передвинули на некоторое расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на расстояние $a = 50$ м. На какое расстояние d передвинули окуляр при наводке?

Решение:

Зрительная труба дает изображение предметов, находящихся на бесконечности, в своей фокальной плоскости. Изображение предметов, находящихся на расстоянии a_1 от объектива, получается на расстоянии $a_2 = \dfrac{a_1 F}{a_1 - F}$, т. е. на $\Delta a = a_2 - F = \dfrac{F^2}{a_1 - F}$ дальше. Следовательно, окуляр нужно отодвинуть на столько же, чтобы созданное объективом изображение по-прежнему находилось в фокальной плоскости окуляра. Таким образом, $d = \dfrac{F^2}{a_1 - F} = 0{,}005$ м.

15.49. Микроскоп состоит из объектива с фокусным расстоянием $F_1 = 2$ мм и окуляра с фокусным расстоянием $F_2 = 40$ мм. Расстояние между фокусами объектива и окуляра $d = 18$ см. Найти увеличение k, даваемое микроскопом.

Решение:

Поскольку созданное объективом изображение лежит в фокальной плоскости окуляра, то $\dfrac{aF_1}{a - F_1} + F_2 = d$ — (1), где a — расстояние от рассматриваемого предмета до объектива. Объектив дает изображение в фокальной плоскости окуляра, линейное увеличение объектива $k = \dfrac{F_1}{a - F_1}$.

Окуляр работает как лупа, поэтому угловое увеличение окуляра $k_2 = \frac{L}{F_2}$, где $L = 0{,}25$ м — расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Отсюда полное увеличение микроскопа $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{F_1 L}{F_2(a - F_1)}$ — (2). Из (1) найдем $a = \frac{F_1(l - F_2)}{l - (F_2 + F_1)} = 2{,}022 \cdot 10^{-3}$ м. Подставляя числовые данные в (2), получим $k = 568$.

15.50. Картину площадью $S = 2 \times 2$ м^2 снимают фотоаппаратом, установленным от нее на расстоянии $a = 4{,}5$ м. Изображение получилось размером $s = 5 \times 5$ см^2. Найти фокусное расстояние F объектива аппарата. Расстояние от картины до объектива считать большим по сравнению с фокусным расстоянием.

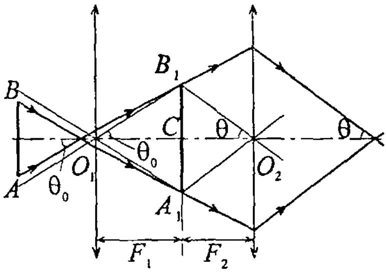
Решение:

Поперечное увеличение объектива $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{1}{40}$, отсюда $a_2 = \frac{a_1}{40}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$, откуда $F = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $F = \frac{a_1}{39} = 0{,}115$ м.

15.51. Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_1 = 150$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_2 = 10$ см. Под каким углом зрения θ видна полная Луна в этот телескоп, если невооруженным глазом она видна под углом $\theta_0 = 31'$?

Решение:

Из ΔCB_1O_1 найдем $tg\theta_0 = \frac{CB_1}{CO_1} = \frac{CB_1}{F_1}$. Из ΔCB_1O_2 найдем $tg\theta = \frac{CB_1}{CO_2} = \frac{CB_1}{F_2}$. Углы θ_0 и θ малы, поэтому можно записать $\theta_0 = \frac{CB_1}{F_1}$ и $\theta = \frac{CB_1}{F_2}$. Угловое увеличение телескопа $k = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{F_1}{F_2} = 15$. Отсюда $\theta = 15\theta_0 = 7°45'$.



15.52. При помощи двояковыпуклой линзы, имеющей диаметр $D = 9$ см и фокусное расстояние $F = 50$ см, изображение Солнца проектируется на экран. Каким получается диаметр d изображения Солнца, если угловой диаметр Солнца $\alpha = 32'$? Во сколько раз освещенность, создаваемая изображением Солнца, будет больше освещенности, вызываемой Солнцем непосредственно?

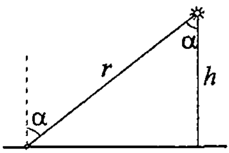
Решение:

Диаметр изображения $d = 2Ftg\frac{\alpha}{2} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Поток лучей, попадающих на поверхность линзы площадью $\frac{\pi D^2}{4}$, концентрируется в изображении Солнца площадью $\frac{\pi d^2}{4}$.

Тогда $\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\pi D^2}{4\pi d^2} = 383$.

15.53. Свет от электрической лампочки с силой света $I = 200$ кд падает под углом $\alpha = 45°$ на рабочее место, создавая освещенность $E = 141$ лк. На каком расстоянии r от рабочего места находится лампочка? Над какой высоте h от рабочего места она висит?

Решение:



Освещенность, создаваемая лампочкой, равна $E = \frac{I}{r^2} \cos\alpha$, отсюда $r = \sqrt{\frac{I\cos\alpha}{E}} = 1$ м. Высота $h = r\cos\alpha = $ $= 0{,}7$ м.

15.54. Лампа, подвешенная к потолку, дает в горизонтальном направлении силу света $I = 60$ кд. Какой световой поток Φ падает на картину площадью $S = 0{,}5$ м^2, висящую вертикально на стене на расстоянии $r = 2$ м от лампы, если на противоположной стене находится большое зеркало на расстоянии $a = 2$ м от лампы?

Решение:

Лампа создает на площади S картины освещенность $E_1 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$ или, поскольку $\cos\alpha = 1$, $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Изображение лампы в зеркале, находящемся на расстоянии $r + 2a$ от картины, создает освещенность $E_2 = \frac{I}{(r+2a)^2}$. Результирующая напряженность $E = E_1 + E_2 = I\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2a)^2}\right)$.

Кроме того, $E = \frac{\Phi}{S}$, откуда $\Phi = ES = IS\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2a)^2}\right)$.

Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 8{,}3$ лм.

15.55. Большой чертеж фотографируют сначала целиком, затем отдельные его детали в натуральную величину. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции при фотографировании деталей?

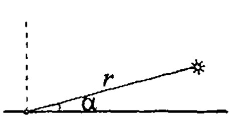
Решение:

При фотографировании всего чертежа, размеры которого гораздо больше фотопластинки, изображение получается приблизительно в главном фокусе объектива. При фотографировании деталей изображение в натуральную величину получается при помещении предмета на двойном фокусном расстоянии от объектива (на таком же расстоянии получается и изображение на фотопластинке). Площадь изображения при этом увеличится в $\left(\frac{2F}{F}\right)^2 = 4$ раза. Во столько же раз уменьшится освещенность фотопластинки, следовательно, время экспозиции надо увеличить в 4 раза.

15.56. 21 марта, в день весеннего равноденствия, на Северной Земле Солнце стоит в полдень под углом $\alpha = 10°$ к горизонту. Во сколько раз освещенность площадки, поставленной вертикально, будет больше освещенности горизонтальной площадки?

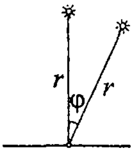
Решение:

Освещенность вертикальной площадки $E_1 = \frac{I}{r^2} cos\alpha$. Освещенность горизонтальной площадки $E_2 = \frac{I}{r^2} cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{I}{r^2} sin\alpha$. Отсюда $\frac{E_1}{E_2} = ctg\alpha = 5{,}7$.



15.57. В полдень во время весеннего и осеннего равноденствия Солнце стоит на экваторе в зените. Во сколько раз в это время освещенность поверхности Земли на экваторе больше освещенности поверхности Земли в Ленинграде? Широта Ленинграда $\varphi = 60°$.

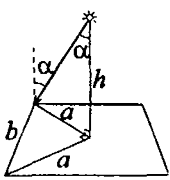
Решение:



Освещенность поверхности Земли на экваторе $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Освещенность поверхности Земли в Ленинграде $E_2 = \frac{I}{r^2} cos\varphi$. Отсюда отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{cos\varphi} = 2$.

15.58. В центре квадратной комнаты площадью $S = 25\,\text{м}^2$ висит лампа. На какой высоте h от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

Решение:

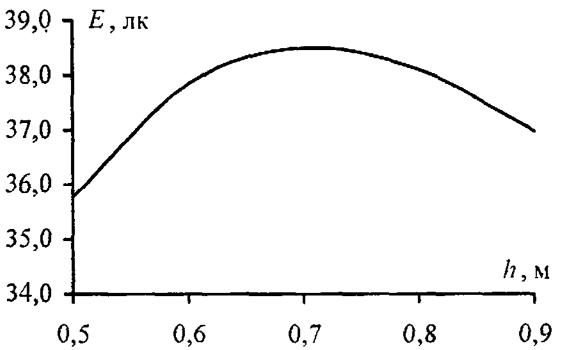


Освещенность E находится по формуле $E = \frac{I}{r^2} cos\alpha$, где I — сила света источника, r — расстояние от источника до угла комнаты, α — угол падения лучей. Из рисунка видно, что $a = r\,sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{2}} = htg\alpha$, поэтому можно записать $E = \frac{I}{a^2} cos\alpha\, sin^2\alpha$. Для нахождения максимума E возьмем производную $\frac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dE}{d\alpha} = \frac{I}{a^2}\left(2cos^2\alpha\, sin\alpha - sin^3\alpha\right) = 0$. отсюда $tg^2\alpha = 2$. Тогда $h = \frac{b}{\sqrt{2}tg\alpha} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}tg\alpha} = 2{,}5\,\text{м}$.

15.59. Над центром круглого стола диаметром $D = 2$ м висит лампа с силой света $I = 100$ кд. Найти изменение освещенности E края стола при постепенном подъеме лампы в интервале $0,5 \le h \le 0.9$ м через каждые 0,1м. Построить график $E = f(h)$.

Решение:

Освещенность края стола $E = \frac{I}{r^2} cos\alpha$, где $r = \sqrt{h^2 + \frac{D^2}{4}}$; $cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + D^2/4}}$. Отсюда $E = \frac{Ih}{\left(h^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Подставляя числовые данные, получим $E = \frac{100h}{\left(h^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$. Для заданного интервала значений h построим график.



15.60. В центре круглого стола диаметром $D = 1,2$ м стоит настольная лампа из одной электрической лампочки, расположенной на высоте $h_1 = 40$ см от поверхности стола. Над центром стола на высоте $h_2 = 2$ м от его поверхности висит люстра из четырех таких же лампочек. В каком случае получится большая освещенность на краю стола (и во сколько раз): когда горит настольная лампа или когда горит люстра?

Решение:

Настольная лампа создает освещенность $E_1 = \frac{Ih_1}{\left(h_1^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$ (см. задачу 15.59). Люстра создает освещенность $E_2 = \frac{4Ih_2}{\left(h_2^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Отсюда отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{h_1}{4h_2} \times \left(\frac{h_2^2 + D^2/4}{h_1^2 + D^2/4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{E_1}{E_2} = 1{,}2$.

15.61. Предмет при фотографировании освещается электрической лампой, расположенной от него на расстоянии $r_1 = 2$ м. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции, если эту же лампу отодвинуть на расстояние $r_2 = 3$ м от предмета?

Решение:

Имеем $E_1 = \frac{I}{r_1^2}$; $E_2 = \frac{I}{r_2^2}$, отсюда $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 2{,}25$. Освещенность уменьшилась в 2,25 раза, следовательно, время экспозиции необходимо увеличить в 2,25 раза.

15.62. Найти освещенность E на поверхности Земли, вызываемую нормально падающими солнечными лучами. Яркость Солнца $B = 1{,}2 \cdot 10^9$ кд/м^2.

Решение:

Яркость Солнца можно определить по формуле $B = \frac{I}{S\cos\theta}$, где S — площадь видимого диска Солнца. По условию $\theta = 90°$, следовательно, $\cos\theta = 1$; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — (1), где $D \approx 1{,}4 \cdot 10^9$ м — диаметр Солнца. Отсюда освещенность поверхности Земли $E = \frac{I}{R^2}$ — (2), где $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м — расстояние от поверхности Земли до Солнца. Из (1) найдем $I = \frac{B\pi D^2}{4}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $E = \frac{B\pi D^2}{4R^2} = 82 \cdot 10^3$ лк.

15.63. Спираль электрической лампочки с силой света $I = 100$ кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром: а) $d = 5$ см; б) $d = 10$ см. Найти светимость R и яркость B лампы. Потерей света в оболочке колбы пренебречь.

Решение:

Если потерь света в оболочке колбы не происходит, то светимость R численно равна освещенности E, т. е. $R = E = \frac{4I}{d^2}$ — (1). Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \frac{R}{\pi}$ — (2). Подставляя числовые данные, получим: а) $R = 16 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 5{,}1 \times \times 10^4$ кд/м^2; б) $R = 4 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 1{,}27 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.64. Лампа, в которой светящим телом служит накаленный шарик диаметром $d = 3$ мм, дает силу света $I = 85$ кд. Найти яркость B лампы, если сферическая колба лампы сделана: а) из прозрачного стекла; б) из матового стекла. Диаметр колбы $D = 6$ см.

Решение:

Яркость лампы $B = \frac{I}{S}$, где S — площадь проекции излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения. а) Излучающей поверхностью является поверхность шарика, т. е. $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi d^2} = 1,2 \cdot 10^7$ кд/м^2. б) Если колба лампы сделана из матового стекла, то свет рассеивается и излучающей поверхностью является поверхность лампы, т. е. $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi D^2} = 3 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.65. Какую освещенность E дает лампа предыдущей задачи на расстоянии $r = 5$ м при нормальном падении света?

Решение:

По определению $E = \frac{I}{r^2}$. Таким образом, освещенность будет одинакова и для прозрачной и для матовой колбы. Подставляя числовые данные, получим $E = 3,4$ лк.

15.66. На лист белой бумаги площадью $S = 20 \times 30\,\text{см}^2$ перпендикулярно к поверхности падает световой поток $\Phi = 120$ лм. Найти освещенность E, светимость R и яркость B бумажного листа, если коэффициент отражения $\rho = 0,75$.

Решение:

Имеем $E = \frac{\Phi}{S} = 2 \cdot 10^3$ лк. Поскольку светимость листа обусловлена его освещенностью, то $R = \rho E = 1,5 \cdot 10^3$ лм/м^2. Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \frac{R}{\pi} = 480$ кд/м^2.

15.67. Какова должна быть освещенность E листа бумаги в предыдущей задаче, чтобы его яркость была равна $B = 10^4$ кд/м^2?

Решение:

Имеем $B = \dfrac{R}{\pi}$ — (1); $R = \rho E$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $B = \dfrac{\rho E}{\pi}$, откуда $E = \dfrac{\pi B}{\rho} = 4{,}2 \cdot 10^4$ лк.

15.68. Лист бумаги площадью $S = 10 \times 30$ см^2 освещается лампой с силой света $I = 100$ кд, причем на него падает 0,5% всего посылаемого лампой света. Найти освещенность E листа бумаги.

Решение:

Полный световой поток, испускаемый лампой, $\Phi_0 = 4\pi I$. На лист падает световой поток $\Phi = 5 \cdot 10^{-3} \Phi_0$. Освещенность листа $E = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi I}{S}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 210$ лк.

15.69. Электрическая лампа с силой света $I = 100$ кд посылает во все стороны в единицу времени $W_т = 122$ Дж/мин световой энергии. Найти механический эквивалент света K и к.п.д. η световой отдачи, если лампа потребляет мощность $N = 100$ Вт.

Решение:

Принято переходный множитель, определяющий в ваттах мощность, необходимую для получения светового ощущения, вызываемого потоком в 1 люмен, измерять для определенного узкого интервала длин волн, соответствующего максимуму чувствительности глаза, а именно, $\lambda = 555$ нм. Этот фактор носит название механического эквивалента света. Он равен $K = \dfrac{W_\tau}{4\pi I}$. Пересчитаем световую энергию W_τ из Дж/мин в Вт. $W_\tau = \dfrac{122}{60} = 2{,}03$ Дж/с $= 2{,}03$ Вт. Подставляя числовые данные, получим $K = 0{,}0016$ Вт/лм. К.п.д. световой отдачи $\eta = \dfrac{W_\tau}{N} \cdot 100\%$; $\eta \approx 2\%$.