§ 16. Волновая оптика

Значение показателя преломления n для некоторых веществ можно найти в таблице 18 приложения. В задачах 16.66, 16.67 дан авторский вариант решения.

16.1. При фотографировании спектра Солнца было найдено, что желтая спектральная линия ($\lambda = 589$ нм) в спектрах, полученных от левого и правого краев Солнца, была смещена на $\Delta\lambda = 0{,}008$ нм. Найти скорость v вращения солнечного диска.

Решение:

Согласно принципу Доплера при фотографировании левого края Солнца, т. е. когда источник света движется к нам, $\nu' = \dfrac{\nu c}{c - v}$ — (1); при фотографировании правого края диска, когда источник света движется от нас, $\nu'' = \dfrac{\nu c}{c + v}$ — (2). Частота излучения $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), получим $\Delta\lambda = \dfrac{2v\lambda}{c}$, отсюда $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3$ м/с.

16.2. Какая разность потенциалов U была приложена между электродами гелиевой разрядной трубки, если при наблюдении вдоль пучка α-частиц максимальное доплеровское смещение линии гелия ($\lambda = 492{,}2$ нм) получилось равным $\Delta\lambda = 0{,}8$ нм?

Решение:

За счет работы сил электрического поля α-частицы приобрели кинетическую энергию, т. е. $qU = \dfrac{mv^2}{2}$, где скорость частиц $v = \dfrac{c\Delta\lambda}{\lambda}$, т. е. $qU = \dfrac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2}$, откуда

$U = \dfrac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2 q}$. Подставляя числовые данные, получим $U = 2500$ В.

16.3. При фотографировании спектра звезды Андромеды было найдено, что линия титана ($\lambda = 495{,}4$ нм) смещена к фиолетовому концу спектра на $\Delta\lambda = 0{,}17$ нм. Как движется звезда относительно Земли?

Решение:

Смещение спектральных линий в сторону коротких волн означает, что звезда приближается к нам. Радиальная скорость ее движения (т. е. скорость вдоль линии, соединяющей звезду и Землю) находится из соотношения

$$v = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} = 103 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

16.4. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр ($\lambda_1 = 500$ нм) заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?

Решение:

Условие интерференционного максимума: $y_{max} = k\dfrac{L}{d}\lambda$ — (1), где $k = 0, 1, 2, 3...$ Условие интерференционного минимума: $y_{min} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{L}{d}\lambda$ — (2), где $k = 0, 1, 2, 3...$

Расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы. Из (1) и (2) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное $\Delta y = \frac{L}{d}\lambda$. Тогда расстояние между интерференционными полосами при зеленом светофильтре равно $\Delta y_1 = \frac{L}{d}\lambda_1$, при красном $\Delta y_2 = \frac{L}{d}\lambda_2$, где L — расстояние от экрана до источников света. Поскольку величины L и d не меняются, то $\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3$.

16.5. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом ($\lambda = 600$ нм). Расстояние между отверстиями $d = 1$ мм, расстояние от отверстий до экрана $L = 3$ м. Найти положение трех первых светлых полос.

Решение:

Первая светлая полоса находится на расстоянии $y_1 = \frac{L}{d}\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м. Вторая — на расстоянии $y_2 = 2y_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Третья — на расстоянии $y_3 = 3y_1 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ м.

16.6. В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света $d = 0{,}5$ мм, расстояние до экрана $L = 5$ м. В зеленом свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии $l = 5$ мм друг от друга. Найти длину волны λ зеленого света.

Решение:

Имеем $l = \frac{L}{d}\lambda$, откуда $\lambda = \frac{ld}{L} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.7. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает перпендикулярно к поверхности пластинки. Показатель преломления пластинки $n = 1{,}5$. Длина волны $\lambda = 600$ нм. Какова толщина h пластинки?

Решение:

Изменение разности хода лучей в результате внесения пластинки равно $\Delta = nh - h = h(n-1)$. Кроме того, произошло смещение на $k = 5$ полос, т. е. разность хода $\Delta = k\lambda$. Отсюда $h(n-1) = k\lambda$; $h = \dfrac{k\lambda}{n-1} = 6 \cdot 10^{-6}$ м.

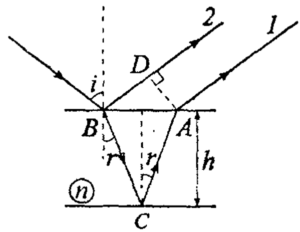
16.8. В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной $h = 12$ см помещается на пути одного из интерферирующих лучей перпендикулярно к лучу. На сколько могут отличаться друг от друга показатели преломления в различных местах пластинки, чтобы изменение разности хода от этой неоднородности не превышало $\Delta = 1$ мкм?

Решение:

Для двух различных значений n_1 и n_2 показателя преломления стеклянной пластинки изменение разности хода лучей соответственно равно $\Delta_1 = h(n_1 - 1)$ и $\Delta_2 = h(n_2 - 1)$. По условию $\Delta_1 - \Delta_2 = 10^{-6}$ м, т. е. $h(n_1 - 1) - h(n_2 - 1) = 10^{-6}$, откуда $h\Delta n = 10^{-6}$ м; $\Delta n = \dfrac{10^{-6}}{h} = 5 \cdot 10^{-5}$.

16.9. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45°$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

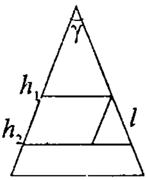
Решение:



По условию отраженные лучи окрашены в желтый цвет. Это означает, что максимум отражения наблюдается в желтой части спектра. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки (см. рисунок), усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода Δd пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу k длин волн: $\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda$. Слагаемое $\frac{\lambda}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т. е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda}{2}$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде — на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\varphi$, как на пути ns в вакууме: $\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c}$. Используя соотношения $AC = BC = \frac{h}{\cos r}$, $AD = 2h\sin i \cdot tg r$, а также применяя закон преломления, получаем $\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, откуда $h = \frac{(k - 1/2)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$. При $k = 1$ минимальная толщина пленки $h = 0{,}13 \cdot 10^{-6}$ м.

16.10. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги ($\lambda = 546{,}1$ нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами $l = 2$ см. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

Решение:



При попадании на любую прозрачную пленку свет частично проходит, частично отражается как от нижней, так и от верхней поверхностей. При этом световые пучки приобретают разность хода, зависящую от толщины пленки, ее показателя преломления и угла падения света. По условию свет падает перпендикулярно к поверхности пленки, толщина пленки всюду мала. Это позволяет считать, что интерференционная картина при рассмотрении ее в отраженном свете (сверху) локализована на верхней поверхности клина. Пусть h_1 и h_2 — толщины пленки, соответствующие разным полосам. Тогда $\Delta h = h_2 - h_1 = \dfrac{\lambda}{2n}$. Поскольку угол γ клина мал, то можно принять $\Delta h = l\,tg\gamma$. Отсюда $tg\gamma = \dfrac{k\lambda}{2nl} = 5{,}13 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 11''$.

16.11. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Интерференция наблюдается в отраженном свете через красное стекло ($\lambda_1 = 631$ нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом $l_1 = 3$ мм. Затем эта же пленка наблюдается через синее стекло ($\lambda_2 = 400$ нм). Найти расстояние l_2 между соседними синими полосами. Считать, что за время измерений форма пленки не изменится и свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

Решение:

Пусть угол клина равен γ, тогда $tg\gamma = \frac{k\lambda_1}{2nl_1} = \frac{k\lambda_2}{2nl_2}$ (см. задачу 16.10). Отсюда $l_2 = \frac{l_1\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ м.

16.12. Пучок света ($\lambda = 582$ нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина $\gamma = 20''$. Какое число k_0 темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Решение:

Для малых углов $AB = BC = h$ (рис.1) и $tg\gamma = \gamma$. Разность хода $\Delta = 2hn + \frac{\lambda}{2}$. Выразим h через длину участка поверхности клина $h = x \cdot tg\gamma$; $h = \gamma x$. Тогда разность хода

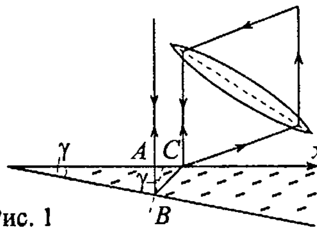


Рис. 1

будет равна $\Delta = 2\gamma xn + \frac{\lambda}{2}$ — (1). Если интенсивность интерферирующих волн одинакова, то результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна δ, определяется выражением $I = 2I_0(1 + cos\,\delta)$ — (2), где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ — (3). Подставляя (1) в (3), получим $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)\right)\right);$$

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\gamma nx + \pi\right)\right) \text{ — (4).}$$

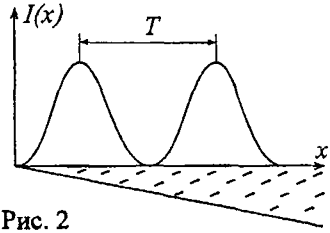
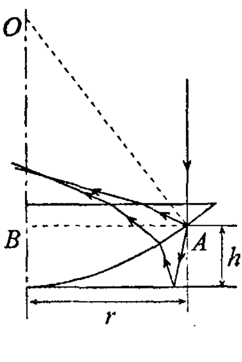


Рис. 2

Найдем период колебаний (рис. 2). Из (4) имеем $\omega = \frac{4\pi\gamma n}{\lambda}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = \frac{\lambda}{2\gamma n}$. Число темных полос, приходящихся на единицу клина, есть величина обратная периоду $k_0 = \frac{2\gamma n}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $k_0 = 5\ \text{см}^{-1}$.

16.13. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны $r_k = 4{,}0$ мм и $r_{k+1} = 4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 6{,}4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

Решение:



Появление колец Ньютона обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от двух поверхностей тонкой воздушной прослойки между линзой и пластинкой. Оптическая разность хода лучей $\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2}$ — (1) (см. задачу 16.9). Из прямоугольного треугольника ABO получим $R - h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Поскольку $r << R$, то имеет место равенство: $\sqrt{R^2 - r^2} = R - \frac{r^2}{2R}$.

Тогда $R - h = R - \frac{r^2}{2R}$, откуда $h = \frac{r^2}{2R}$ — (2). Запишем условие интерференционного минимума $\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ — (3). Приравнивая правые части (1) и (3), получим $2h = k\lambda$ или $h = \frac{k\lambda}{2}$. Тогда из (2) найдем $r_k = \sqrt{2Rh} = \sqrt{k\lambda R}$ — (4). Найдем порядковый номер k кольца. Имеем $\frac{r_{k+1}^2}{r_k^2} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$, откуда $k = \frac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} = 5$; $k+1 = 6$. Тогда из (4) найдем $\lambda = \frac{r_k^2}{kR} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.14. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 8{,}6$. Наблюдение ведется в отраженном свете. Измерениями установлено, что радиус четвертого темного кольца (считая центральное темное пятно за нулевое) r_4 = 4,5 мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение:

Имеем $\lambda = \frac{r_k^2}{kR}$ (см. задачу 16.13). Подставляя числовые данные, получим $\lambda = 589 \cdot 10^{-9}$ м.

16.15. Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 5$ м. Наблюдение ведется в проходящем свете. Найти радиусы $r_с$ и $r_{кр}$ четвертого синего кольца ($\lambda_с$ = 400 нм) и третьего красного кольца ($\lambda_{кр}$ = 630 нм).

Решение:

Радиус светлого кольца в проходящем свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $r_c = \sqrt{4\lambda_c R} = 2{,}8$ мм; $r_{кр} = \sqrt{3\lambda_{кр} R} = 3{,}1$ мм.

16.16. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 15$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона $l = 9$ мм. Найти длину волны λ монохроматического света.

Решение:

Радиус k-го светлого кольца в отраженном свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{(2k-1)R\dfrac{\lambda}{2}}$. Тогда $l = r_{25} - r_5 = \sqrt{49R\dfrac{\lambda}{2}} - \sqrt{9R\dfrac{\lambda}{2}}$; $l = 4\sqrt{R\dfrac{\lambda}{2}}$. Отсюда $\lambda = \dfrac{l^2}{8R} = 675 \cdot 10^{-9}$ м.

16.17. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение идет в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами $l_1 = 4{,}8$ мм. Найти расстояние l_2 между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона.

Решение:

Радиус темного кольца в отраженном свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $l_1 = r_{20} - r_2$ или $l_1 = \sqrt{20\lambda R} - \sqrt{2\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(\sqrt{20} - \sqrt{2}\right)$ — (1); $l_2 = \sqrt{16\lambda R} - \sqrt{3\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(4 - \sqrt{3}\right)$ — (2). Из (1) найдем $\sqrt{\lambda R} = \dfrac{l_1}{\sqrt{20} - \sqrt{2}}$ —

(3). Подставляя (3) в (2), получим $l_2 = l_1 \dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{20}-\sqrt{2}} =$
$= 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м.

16.18. Установка для получения колец Ньютона освещается светом от ртутной дуги, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии $\lambda_1 = 579{,}1$ нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим линии $\lambda_2 = 577$ нм?

Решение:

Радиус k-го светлого кольца, соответствующего линии λ_1, в проходящем свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{k\lambda_1 R}$. Радиус следующего светлого кольца, соответствующего линии λ_2, равен $\lambda_{(k+1)} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$. По условию $r_k = r_{k+1}$, т. е. $\sqrt{k\lambda_1 R} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$, откуда $k = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 275$.

16.19. Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 10$ м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете $r_3 = 3{,}65$ мм.

Решение:

Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая в случае нормального падения лучей имеет вид $\Delta = 2hn$. Наблюдение ведется в проходящем свете. Установка наиболее прозрачна для света с заданной длиной волны, если разность хода кратна четному числу полуволн: $\Delta = 2k\dfrac{\lambda}{2}$, т. е. условие максимума для наблюдения в проходящем свете выражается соотношением $2hn = k\lambda$ — (1). Радиус k-го светлого кольца $r_k = \sqrt{2hR}$, откуда $h = \frac{r_k^2}{2R}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\frac{nr_k^2}{R} = k\lambda$, откуда $n = \frac{k\lambda R}{r_k^2} = 1{,}33$.

16.20. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Найти толщину h воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается четвертое темное кольцо в отраженном свете.

Решение:
Условие минимума в отраженном свете: $2hn = k\lambda$. По условию $k = 4$, $n = 1$, тогда $2h = 4\lambda$, откуда $h = 2\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м.

16.21. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено водой. Найти толщину h слоя воды между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо в отраженном свете.

Решение:
Условие максимума в отраженном свете $2hn = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$.

По условию $k = 3$, $n = 1{,}33$, тогда $2hn = \frac{7\lambda}{2}$, откуда $h = \frac{7\lambda}{4n} = 658 \cdot 10^{-9}$ м.

16.22. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления жидкости.

Решение:

Пусть n_1 — показатель преломления воздуха, n_2 — показатель преломления жидкости. Тогда $n_1 = \frac{k\lambda R}{(1{,}25 r_k)^2}$; $n_2 = \frac{k\lambda R}{r_k^2}$ (см. задачу 16.19). Найдем отношение $\frac{n_2}{n_1} = 1{,}25^2$, отсюда $n_2 = 1{,}56$.

16.23. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $k = 500$ полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $L = 0{,}161$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение:

Перемещение зеркала на расстояние $\frac{\lambda}{2}$ соответствует изменению разности хода на λ, т. е. смещению интерференционной картины на одну полосу. Таким образом, $L = \frac{k\lambda}{2}$, откуда $\lambda = \frac{2L}{k} = 644 \cdot 10^{-9}$ м.

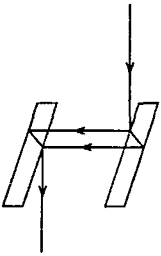
16.24. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плечей интерферометра Майкельсона поместили откачанную трубку длиной $l = 14$ см. Концы трубки закрыли плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 180$ полос. Найти показатель преломления n аммиака.

Решение:

Луч дважды проходит через трубку с аммиаком, при этом разность хода лучей, проходящих в аммиаке и в вакууме, равна $2(l \cdot n - l) = 2l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n - 1 = \frac{k\lambda}{2l}$; $n = \frac{k\lambda}{2l} +$ $+ 1 = 1{,}00038$.

16.25. На пути одного из лучей интерферометра Жамена (см. рисунок) поместили откачанную трубку длиной $l = 10$ см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 131$ полосу. Найти показатель преломления n хлора.

Решение:



В отличие от интерферометра Майкельсона в данном случае луч проходит через трубку с хлором только один раз. Поэтому разность хода лучей, проходящих в хлоре и в вакууме, равна $nl - l = l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n = \frac{k\lambda}{l} + 1 = 1{,}000773$.

16.26. Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной $d = 0{,}4$ мкм. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Какие длины волн λ, лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отраженном свете?

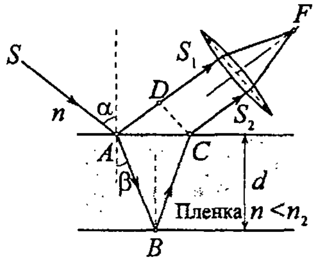
Решение:

Условие максимума в отраженном свете $2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

Отсюда $\lambda = \frac{4dn}{2k+1}$. При $k = 1$ получаем $\lambda = 800$ нм, данная волна не лежит в пределах видимого спектра. При $k = 2$ получим $\lambda = 480$ нм, что удовлетворяет условию. При $k = 3$ получим $\lambda = 343$ нм, эта длина волны также не лежит в пределах видимого спектра. Таким образом, искомая длина волны $\lambda = 480$ нм.

16.27. На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1{,}5$) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1{,}2$ («просветляющая» пленка). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

Решение:



Стеклянная пластинка $n_1 > n_2$

Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой. Т. к. показатель преломления воздуха $(n_1 = 1)$ меньше показателя преломления вещества пленки, который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла, то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B. Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того ни у другого пучка не было. Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн: $\Delta = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Как видно из рисунка, оптическая разность хода $\Delta = l_2 n_2 - l_1 n = (|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n$. Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид $(|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Если угол падения α будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \to 0$ и $|AB| + |BC| \to 2d$, где d — толщина пленки. В пределе при $\alpha = 0$ будем иметь $\Delta = 2dn_2 = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, откуда искомая толщина пленки $d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$. Минимальное значение d соответствует значению $k = 0$. Подставляя числовые данные, получим $d = 115 \cdot 10^{-9}$ м.

16.28. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия $d = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $l = 3$ м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Решение:

Пусть в отверстии диафрагмы укладывается k зон Френеля, тогда радиус k-й зоны равен радиусу диафрагмы $r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{bk\lambda}$. Отсюда $k = \frac{d^2}{4b\lambda} = 5$. Поскольку число открытых зон нечетно, то центр дифракционной картинки будет светлым.

16.29. Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности $a = 1$ м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Решение:

Радиус внешней границы k-й зоны Френеля для сферической волны $r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}5$ мм, $r_2 = 0{,}71$ мм, $r_3 = 0{,}86$ мм, $r_4 = 1{,}0$ мм, $r_5 = 1{,}12$ мм.

16.30. Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Решение:

В случае плоской волны радиус k-й зоны Френеля определяется по формуле $r_k = \sqrt{bk\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}71$ мм; $r_2 = 1$ мм; $r_3 = 1{,}22$ мм; $r_4 = 1{,}41$ мм; $r_5 = 1{,}58$ мм.

16.31. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). На расстоянии $a = 0{,}5l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром $D = 1$ см. Найти расстояние l, если преграда закрывает только центральную зону Френеля.

Решение:

Радиус центральной (первой) зоны Френеля $r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}$.

Кроме того, $r_1 = \frac{d}{2}$. По условию $a + b = l$; $a = b = 0{,}5l$, тогда $r_1 = \frac{d}{2} = 0{,}5\sqrt{l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{\lambda} = 167$ м.

16.32. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $l = 4$ м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе

R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Решение:

Радиус отверстия соответствует радиусу k-й зоны Френеля при условии, что отверстие пропускает k зон. Т. е. $R = r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$. Наименьшая освещенность центра колец соответствует двум зонам ($k = 2$). Подставляя числовые данные, получим $R = 10^{-3}$ м.

16.33. На диафрагму с диаметром отверстия $D = 1{,}96$ мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). При каком наибольшем расстоянии l между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

Решение:

Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картинки будет темное пятно. Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля. Радиус диафрагмы должен равняться радиусу второй зоны, т. е. $\frac{d}{2} = r_2 = \sqrt{2l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{8\lambda} = 0{,}8$ м.

16.34. На щель шириной $a = 2$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 589$ нм). Под какими углами φ будут наблюдаться дифракционные минимумы света?

Решение:

В соответствии с принципом Гюйгенса щель можно рассматривать как цепочку N источников света S_1, S_2 ... S_N, расстояние между которыми $\Delta x \to 0$, при этом $N\Delta x = a$ (рис. 1). Колебания, создаваемые источниками в точках их расположения, можно представить в виде: $E_i = E_0 \cos \omega t$. В точке наблюдения P, расположенной под углом α к нормали $\vec{n}$, эти источники создадут колебания, которые можно представить в виде:

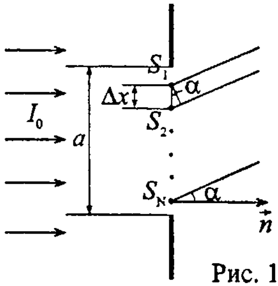


Рис. 1

$$E_1' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_1\right); \qquad E_2' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_2\right) \qquad \ldots$$

$$E_N' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_N\right)$$ — (1). Из (1) следует, что разность фаз соседних колебаний равна $\delta = -\frac{2\pi}{\lambda} n(r_2 - r_1) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin\alpha\right)$ — (2). Построим векторную диаграмму для точки наблюдения P (рис. 2). Т. к. длины векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ... $\vec{E}_N$ и углы между ними равны, то цепочка векторов является частью правильного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность радиусом R. Резуль-

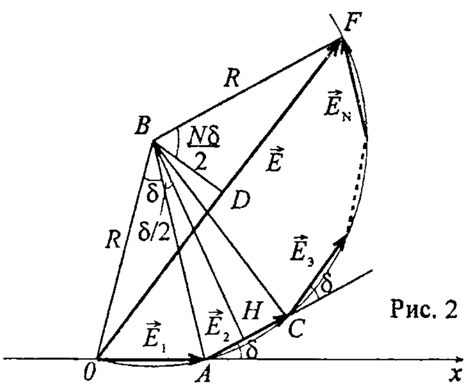


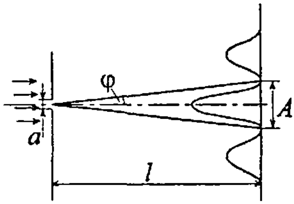
Рис. 2

тирующий вектор $\vec{E}$ является хордой этой окружности, а центральный угол, соответствующий этой хорде, равен $N\delta$. Проведем перпендикуляры из точки B к сторонам AC и OF. Из прямоугольных треугольников ABH и DBF, учитывая, что $\left|\vec{E}_i\right| = E_0$, найдем $\frac{E_0}{2} = R\sin\frac{\delta}{2}$, $\frac{E}{2} = R\sin\frac{N\delta}{2}$, откуда $E = E_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$. Тогда интенсивность в точке наблюдения P равна $I = I_1\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$ — (3), где I_1 — интенсивность, обусловленная отдельным источником света. При малых δ имеет место равенство $\sin\frac{N\delta}{2} \approx \frac{N\delta}{2}$ и $\sin\frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2}$. Тогда из выражения (3) следует, что интенсивность падающего света $I_0 = I_{1Б}N^2$ — (4). Подставляя (2) в (3), получим $I = I_1\frac{\sin^2(2\pi N\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}{\sin^2(2\pi\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}$. Отсюда с учетом того, что $\Delta x \to 0$ и $N\Delta x = a$, получим $I = I_1N^2\frac{\sin^2(\pi a/\lambda\sin\alpha)}{N^2(\pi\Delta x/\lambda\sin\alpha)^2}$, или, с учетом (4), $I = I_0\frac{\sin^2(\pi a/\pi a\sin\alpha)}{(\pi a/\lambda\sin\alpha)^2}$. Минимумы интенсивности будут наблюдаться при $\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha = k\pi$, где $k = 1, 2, 3...$ Таким образом, при дифракции света на одной щели (в случае нормального падения лучей) условие минимумов интенсивности имеет вид $a\sin\varphi = k\lambda$. Отсюда $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{a}$. При $k = 1$ имеем $\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = 0{,}295$; $\varphi \approx 17°$. При $k = 2$ имеем $\sin\varphi_2 = 0{,}589$; $\varphi \approx 36°$. При $k = 3$ имеем

$sin\varphi_2 = 0{,}884$; $\varphi \approx 62°$. Очевидно, что при $k = 4$ мы получим $sin\varphi > 1$, что не имеет смысла.

16.35. На щель шириной $a = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние $l = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Решение:



Из рисунка видно, что $\frac{A}{2} = l tg\varphi$. Поскольку угол φ мал, то можно принять $tg\varphi = sin\varphi$. Тогда $A = 2l\,sin\varphi$ — (1). Условие максимумов интенсивности света $a\,sin\varphi = k\lambda$, откуда при $k = 1$ $sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \frac{2l\lambda}{a} = 0{,}05$ м.

16.36. На щель шириной $a = 6\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

Решение:
Имеем $a\,sin\varphi = k\lambda$. По условию $a = 6\lambda$, $k = 3$. Отсюда $6\lambda\,sin\varphi = 3\lambda$; $sin\varphi = 0{,}5$; $\varphi = 30°$.

16.37. На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Для того чтобы увидеть красную линию ($\lambda = 700$ нм) в спектре этого порядка, зрительную трубку пришлось установи под углом $\varphi = 30°$ к оси коллиматора. Найти постоянную дифракционной решетки. Какое число штрихов N_0 нанесено единицу длины этой решетки?

Решение:

Согласно формуле дифракционной решетки $d \sin\varphi = k\lambda$ (1). По условию $k = 2$, тогда из (1) найд $d = \frac{2\lambda}{\sin\varphi} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ м. Число штрихов N_0, приходящих на единицу длины решетки, связано с периодом решет d соотношением $N_0 = \frac{1}{d}$, откуда $N_0 = 357 \cdot 10^{-3}$ м.

16.38. Какое число штрихов N_0 на единицу длины име дифракционная решетка, если зеленая линия ртути ($\lambda = 546.1$ н в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 19°8'$?

Решение:

Согласно формуле дифракционной решетки $d \sin\varphi = k\lambda$ Поскольку число штрихов N_0, приходящихся на едини длины решетки, связано с периодом решетки d соотнош нием $N_0 = \frac{1}{d}$, то $\frac{\sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \frac{\sin\varphi}{k\lambda} = 600$ мм

16.39. На дифракционную решетку нормально падает пуч света. Натриевая линия ($\lambda_1 = 589$ нм) дает в спектре перво порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17°8'$. Некоторая линия дает спектре второго порядка дифракции $\varphi_2 = 24°12'$. Найти дли волны λ_2 этой линии и число штрихов N_0 на единицу длин решетки.

Решение:

По формуле дифракционной решетки для натриевой линии имеем $d\sin\varphi_1 = \lambda_1$ — (1), для неизвестной линии $d\sin\varphi_2 = 2\lambda_2$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$, откуда $\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \sin\varphi_2}{2\sin\varphi_2}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_2 = \frac{589\cdot 10^{-9}\cdot 0.41}{2\cdot 0{,}295} = 409\cdot 10^{-9}$ м. Число штрихов N_0, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N_0 = \frac{1}{d}$. Из (1) найдем $d = \frac{\lambda_1}{\sin\varphi_1}$, тогда $N_0 = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1} = 500\ \text{мм}^{-1}$.

16.40. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в направлении $\varphi = 41°$ совпадали максимумы линий $\lambda_1 = 656.3$ нм и $\lambda_2 = 410.2$ нм?

Решение:

Имеем $\sin\varphi = \frac{k_1\lambda_1}{d} = \frac{k_2\lambda_2}{d}$, следовательно, $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$. Отсюда $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1.6$ — (1). Поскольку числа k_1 и k_2 должны быть целыми, то из условия (1) найдем $k_1 = 5$ и $k_2 = 8$. Тогда $d = \frac{k_1\lambda_1}{\sin\varphi} = 5\cdot 10^{-6}$ м.

16.41. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия $\lambda_1 = 440$ нм в спектре третьего порядка. Будут ли видны под этим же углом φ другие спектральные линии, соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 до 700нм)?

Решение:

Имеем $d\sin\varphi = 3\lambda_1$, откуда $\sin\varphi = \frac{3\lambda_1}{d}$ — (1). Для спектральных линий λ_2 имеем $d\sin\varphi = k\lambda_2$ или, подставляя (1), $3\lambda_1 = k\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k=1$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k=1$ имеем $\lambda_2 = 3\lambda_1 = 1320$ нм. Эта длина волны не соответствует видимому спектру. При $k=2$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 660$ нм. При $k=3$ получим $\lambda_2 = \lambda_1$. Таким образом, искомая длина волны $\lambda_2 = 660$ нм в спектре второго порядка.

16.42. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 670$ нм) спектра второго порядка?

Решение:

Имеем $d\sin\varphi = 2\lambda_1$; $d\sin\varphi = 3\lambda_2$. Отсюда $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 =$ $= 447$ нм — синяя линия спектра гелия.

16.43. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Сначала зрительная труба устанавливается на фиолетовые линии ($\lambda_ф = 389$ нм) по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{ф1} = 27°33'$ и $\varphi_{ф2} = 36°27'$. После этого зрительная труба устанавливается на красные линии по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{кр1} = 23°54'$ и $\varphi_{кр2} = 40°6'$. Найти длину волны $\lambda_{кр}$ красной линии спектра гелия.

Решение:

Имеем $d\,sin\dfrac{\varphi_{ф2} - \varphi_{ф1}}{2} = \lambda_ф$; $d\,sin\dfrac{\varphi_{кр2} - \varphi_{кр1}}{2} = \lambda_{кр}$. Отсюда $\lambda_{кр} = \dfrac{\lambda_ф\, sin(\varphi_{кр2}/2 - \varphi_{кр1}/2)}{\varphi_{ф2}/2 - \varphi_{ф1}/2}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{кр} = 706$ нм.

16.44. Найти наибольший порядок k спектра для желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм), если постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Из формулы дифракционной решетки найдем $k = \dfrac{d\,sin\varphi}{\lambda}$.

Поскольку $sin\varphi \le 1$, то $k \le \dfrac{d}{\lambda} = 3{,}4$, т. е. $k_{max} = 3$.

16.45. На дифракционную решетку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка наблюдается под углом $\varphi = 36°48'$ к нормали. Найти постоянную d решетки, выраженную в длинах волн падающего света.

Решение:

По формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = 3\lambda$, откуда $\dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{3}{sin\varphi} = 5$, т. е. $d = 5\lambda$.

16.46. Какое число максимумов k (не считая центрального) дает дифракционная решетка предыдущей задачи?

Решение:
При $d = 5\lambda$ имеем $5\lambda \sin\varphi = k\lambda$. Отсюда наибольшее число максимумов по одну сторону от центрального равно $k_{max} = 5$. Тогда по обе стороны от центрального максимума $k = 2k_{max} = 10$.

16.47. Зрительная труба гониометра с дифракционной решеткой поставлена под углом $\varphi = 20°$ к оси коллиматора. При этом в поле зрения трубы видна красная линия спектра гелия ($\lambda_{кр} = 668$ нм). Какова постоянная d дифракционной решетки, если под тем же углом видна и синяя линия ($\lambda_c = 447$ нм) более высокого порядка? Наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при помощи решетки, $k = 5$. Свет падает на решетку нормально.

Решение:
Имеем $d\sin\varphi = k_1\lambda_{кр}$; $d\sin\varphi = k_2\lambda_c$, откуда $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\lambda_{кр}}{\lambda_c} = 1.5$.
Поскольку значения k_1 и k_2 должны быть целыми числами, то очевидно, что $k_1 = 2$; $k_2 = 3$. Тогда $d = \dfrac{k_1\lambda_{кр}}{\sin\varphi} =$
$= 3.9\cdot 10^{-6}$ м.

16.48. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке были разрешены линия спектра калия $\lambda_1 = 404.4$ и $\lambda_2 = 404.7$ нм? Ширина решетки $a = 3$ см.

Решение:
Разрешающая способность дифракционной решетки определяется формулой $\dfrac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = kN$. По условию $k = 1$, тогда
$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = N = \dfrac{a}{d}$, откуда $d = \dfrac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1} = 22\cdot 10^{-6}$ м.