16.49. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке был разрешен дублет натрия $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение:

Имеем $d = \dfrac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1}$ (см. задачу 16.48). Подставляя числовые данные, получим $d = 25{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.50. Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей ($\lambda = 600$ нм) в спектре второго порядка? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение:

Имеем $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\dfrac{a}{d}$ (см. задачу 16.48), откуда $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda d}{ka} = 24 \cdot 10^{-12}$ м.

16.51. Постоянная дифракционной решетки $d = 2{,}5$ мкм. Найти угловую дисперсию $\dfrac{d\varphi}{d\lambda}$ решетки для $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка.

Решение:

Имеем $d\,sin\,\varphi = k\lambda$. Дифференцируя, получим $d\,cos\,\varphi d\varphi = kd\lambda$ или $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = \dfrac{k}{d\,cos\,\varphi}$. Подставляя числовые данные, получим $sin\,\varphi = 0{,}236$, откуда $\varphi \approx 13{,}5°$. Тогда $cos\,\varphi = 0{,}972$ и $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = 4{,}1 \cdot 10^5$ рад/м.

16.52. Угловая дисперсия дифракционной решетки для $\lambda = 668$ нм в спектре первого порядка $\dfrac{d\varphi}{d\lambda} = 2{,}02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти период d дифракционной решетки.

Решение:

По формуле дифракционной решетки $d\,sin\,\alpha = \lambda$ — (1). Кроме того, $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{d\,cos\,\varphi}$ — (2) (см. задачу 16.51). Из (1) найдем $sin\,\varphi = \frac{\lambda}{d}$ или $cos\,\varphi = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{d\sqrt{1 - \lambda^2 / d^2}} = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}}$. Отсюда $d = \sqrt{\frac{1}{(d\varphi / d\lambda)^2} + \lambda^2} = 5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.53. Найти линейную дисперсию D дифракционной решетки в условиях предыдущей задачи, если фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, равно $F = 40$ см.

Решение:

Линейная дисперсия D дифракционной решетки определяется по формуле $D = F\frac{d\varphi}{d\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $D = 81$ мкм/(Н·м).

16.54. На каком расстоянии l друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной дуги ($\lambda_1 = 577$ нм и $\lambda_2 = 579{,}1$ нм) в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки? Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, $F = 0{,}6$ м. Постоянная решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Согласно условию главных максимумов дифракционной решетки $d\,sin\,\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 1$, поэтому для первой и второй линии ртутной дуги из формулы (1) соответственно имеем $d\,sin\,\varphi_1 = \lambda_1$ и $d\,sin\,\varphi_2 = \lambda_2$, откуда

$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{d}$ — (2) и $\sin\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{d}$ — (3). Поскольку расстояние от линзы до решетки $f << F$, где F — фокусное расстояние линзы, то $\frac{l_1}{F} = tg\varphi_1$ и $\frac{l_2}{F} = tg\varphi_2$, откуда $l_1 = Ftg\varphi_1$ — (4) и $l_2 = Ftg\varphi_2$ — (5). Расстояние между двумя линиями ртутной дуги на экране равно $l = l_2 - l_1$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), получаем $l = F(tg\varphi_2 - tg\varphi_1)$ — (7). По определению $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ — (8) и, согласно основному тригонометрическому тождеству, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, откуда $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ — (9). Подставляя (9) в (8), получаем $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$ — (10), затем, подставляя (2) и (3) в (10), находим $tg\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2-\lambda_1^2}}$ — (11) и $tg\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2-\lambda_2^2}}$ — (12). Подставляя (11) и (12) в (7), окончательно получаем $l = F\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2-\lambda_2^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2-\lambda_1^2}}\right) = 0{,}68$ мм.

16.55. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Красная линия ($\lambda_1 = 630$ нм) видна в спектре третьего порядка под углом $\varphi = 60°$. Какая спектральная линия λ_2 видна под этим же углом в спектре четвертого порядка? Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка? Найти угловую дисперсию $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ этой решетки для длины волны $\lambda_1 = 630$ нм в спектре третьего порядка.

Решение:
Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$ — (1) имеем: $d\,sin\varphi = k_1\lambda_1$ — (2) и $d\,sin\varphi = k_2\lambda_2$ — (3), где $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$. Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{k_1\lambda_1}{k_2} = 472{,}5$ м. По определению число штрихов на единицу длины $N_0 = \frac{1}{d}$, откуда $d = \frac{1}{N_0}$ — (4). Подставляя (4) в (1), получаем $\frac{sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \frac{sin\varphi}{k\lambda} = 458\ мм^{-1}$. Дифференцируя уравнение (1), получаем $d\,cos\,d\varphi = kd\lambda$, откуда угловая дисперсия дифракционной решетки $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\,cos\varphi}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получаем $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{kN_0}{cos\varphi} = 2{,}75\cdot 10^4$ рад/см.

16.56. Для какой длины волны λ дифракционная решетка имеет угловую дисперсию $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 6{,}3\cdot 10^5$ рад/м в спектре третьего порядка? Постоянная решетки $d = 5$ мкм.

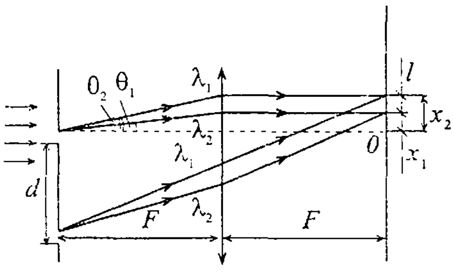
Решение:
Угловая дисперсия дифракционной решетки (см. задачу 16.55) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\,cos\varphi}$, откуда $cos\varphi = \frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi}$ — (1). Из основного тригонометрического тождества (см. задачу 16.54) $cos\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$, откуда

$sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{k}{d}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2}$ — (3). Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$ длина волны $\lambda = \frac{d}{k}sin\varphi$ — (4). Подставляя (3) в (4), окончательно получаем $\lambda = \sqrt{\frac{d^2}{k^2}-\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2} = 508$ нм.

16.57. Какое фокусное расстояние F должна иметь линза, проектирующая на экран спектр, полученный при помощи дифракционной решетки, чтобы расстояние между двумя линиями калия $\lambda_1 = 404{,}4$ нм и $\lambda_2 = 404{,}7$ нм в спектре первого порядка было равным $l = 0.1$ мм? Постоянная решетки $d = 2$ мкм.

Решение:

Расстояние от решетки до линзы равно расстоянию от линзы до экрана и равно фокусному расстоянию линзы F. Из рисунка видно, что расстояние $x_1 = Ftg\theta_1$, а



$x_2 = Ftg\theta_2$. Поскольку $x_2 - x_1 = l$, то можно записать $l = F(tg\theta_2 - tg\theta_1)$ — (1). Т. к. $tg\theta_2 - tg\theta_1$ есть приращение функции $f(\theta) = tg\theta$, то можно принять $tg\theta_2 - tg\theta_1 = (tg\theta)' \cdot \Delta\theta$ — (2). Кроме того, $\Delta\theta = \frac{sin\theta_2 - sin\theta_1}{(sin\theta)'}$ — (3).

Подставив (3) в (2) и вычислив производные, найдем $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{sin\theta_2 - sin\theta_1}{cos^3\theta_1}$ — (4). По формуле дифракционной решетки $d\sin\theta_1 = \lambda_1$; $d\sin\theta_2 = \lambda_2$, откуда $\sin\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d}$ и $\sin\theta_2 = \frac{\lambda_2}{d}$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{\lambda_2/d - \lambda_1/d}{\cos^3\theta_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d\cos^3\theta_1}$ — (5). Подставим (5) в (1), получим $l = \frac{F(\lambda_2 - \lambda_1)}{d\cos^3\theta_1}$, откуда $F = \frac{dl\cos^3\theta}{\lambda_2 - \lambda_1}$ — (6). Величину $\cos\theta_1$ найдем из соотношения $\cos\theta_1 = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2}$; $\cos\theta_1 = 0{,}9793$. Подставляя числовые данные в (6), получим $F = 0{,}65$ м.

16.58. Найти угол $i_Б$ полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого $n = 1{,}57$.

Решение:

Согласно закону Брюстера свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения $tgi_Б = \frac{n_2}{n_1}$, где $n_1 = 1$ — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}57$ — показатель преломления стекла. Отсюда $i_Б = arctgn_2 = 57{,}5°$.

16.59. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества $i = 45°$. Найти для этого вещества угол $i_Б$ полной поляризации.

Решение:

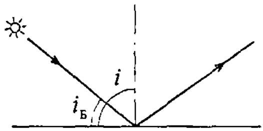
Предельный угол полного внутреннего отражения для границы раздела вещество — воздух определяется соотношением $\sin i = \frac{1}{n}$. По условию $i = 45°$, отсюда $n = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}4$.

По закону Брюстера $tg i_Б = n$, откуда $i_Б = arctg(n) = 54{,}7°$.

16.60. Под каким углом $i_Б$ к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы?

Решение:

Пусть i — угол падения солнечных лучей, $i_Б$ — угол между направлением на Солнце и горизонтом. По закону Брюстера $tg i_Б = n$, где $n = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Тогда $i = arctg(n) = 53°$. Отсюда $i_Б = 90° - i = 37°$.



16.61. Найти показатель преломления n стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления $\beta = 30°$.

Решение:

По закону Брюстера $tg i_Б = n$. В связи с обратимостью хода лучей можно записать $tg\beta = \frac{1}{n}$, откуда $n = \frac{1}{tg\beta} = 1{,}73$.

16.62. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный ($n = 1{,}5$) сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_Б = 42°37'$. Найти показатель преломления жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Решение:

По закону Брюстера $tg(i_Б)=\frac{n_2}{n_1}$ — (1), где $n_2=1,5$ — показатель преломления стекла, n_1 — показатель преломления жидкости. Из (1) найдем $n_1=\frac{n_2}{tg(i_Б)}=1,63$. Полное внутреннее отражение наступает при условии $\sin i=\frac{n_2}{n_1}=0,92$, откуда угол падения $i\approx 67°$.

16.63. Пучок поляризованного света ($\lambda=589$ нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и для необыкновенного лучей равны $n_o=1,66$ и $n_e=1,49$.

Решение:

Имеем $\lambda_o=\frac{\lambda}{n_o}=355$ нм, $\lambda_e=\frac{\lambda}{n_e}=395$ нм.

16.64. Найти угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

Решение:

После прохождения через поляризатор луч имеет интенсивность $I_1=0,5I_0$, где I_0 — интенсивность естественного света. После прохождения через анализатор луч имеет интенсивность $I_2=I_1\cos^2\varphi=0,5I_0\cos^2\varphi$. По условию $\frac{I_2}{I_0}=0,25$, тогда $\cos^2\varphi=0,5$ и $\varphi=45°$.

16.65. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Решение:

Согласно закону Малюса интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, $I = I_0'' \cos^2 \varphi$ — (1), где I_0'' — интенсивность естественного света с учетом поглощения и отражения поляризатора и анализатора. Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна $I_0' = (1 - 0{,}08)I_0 = 0{,}92 I_0$ — (2). Интенсивность света, прошедшего через анализагор с учетом (2), равна $I_0'' = 0{,}92 I_0' = 0{,}8464 I_0$ — (3). По условию интенсивность света, вышедшего из анализатора, $I = 0{,}09 I_0$ — (4). Из формулы (1) имеем: $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$, откуда угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $\varphi = 70°54'$.

16.66. Найти коэффициент отражения ρ естественного света, падающего на стекло ($n = 1{,}54$) под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей, прошедших в стекло.

Решение:

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \dfrac{I}{I_0}$, где $I = I_\perp + I$, причем $I_\perp = 0{,}5 I_0 \dfrac{\sin^2(i-\beta)}{\sin^2(i+\beta)}$, $I = 0{,}5 I_0 \times$

$\times \dfrac{tg^2(i-\beta)}{tg^2(i+\beta)}$. В нашем случае при падении под углом полной поляризации $tg(i_Б) = n = 1{,}54$; следовательно, $i_Б = 57°$. Т. к. $i_Б + \beta = 90°$, то угол преломления $\beta = 33°$ и $i_Б - \beta = 24°$. Поэтому $I_{\perp} = 0{,}5 I_0 \dfrac{\sin^2 24°}{\sin^2 90°} = 0{,}083 I_0$,

$I_{\parallel} = 0{,}5 I_0 \dfrac{tg^2 24°}{tg^2 90°} = 0$, т. е. в отраженном свете при угле падения, равном углу полной поляризации, колебания происходят только в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. При этом $\rho = \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{I_{\perp} + I_{\parallel}}{I_0} = 0{,}083$, т. е. отражается от стекла только 8,3% энергии падающих естественных лучей. Следовательно, энергия колебаний, перпендикулярных к плоскости падения и прошедших во вторую среду, будет составлять 41,7% от общей энергии лучей, упавших на границу раздела, а энергия колебаний, лежащих в плоскости падения, равна 50%. Степень поляризации лучей, прошедших во вторую среду, $P = \dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \dfrac{0{,}083}{0{,}917} = 0{,}091 = 9{,}1\%$.

16.67. Лучи естественного света проходят сквозь плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1{,}54$), падая на нее под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей, прошедших сквозь пластинку.

Решение:

При падении естественного луча на стеклянную пластинку под углом полной поляризации преломленный луч имеет интенсивность $I_1 = 0{,}917 I_0$ (см. задачу 16.66). В этом преломленном луче $0{,}417 I_0$ составляют колебания, перпендикулярные к плоскости падения, и $0{,}5 I_0$ — колебания, параллельные плоскости падения. Интенсивность луча, отразившегося от второй грани пластинки, $I_2 = 0{,}083 \cdot 0{,}0917 I_0 = 0{,}076 I_0$. Интенсивность луча, вышедшего из пластинки в воздух, будет $I_3 = 0{,}917 I_0 - 0{,}076 I_0$, причем $0{,}5 I_0$ составляют лучи с колебаниями, параллельными плоскости падения, и $0{,}341 I_0$ — с колебаниями, перпендикулярными к плоскости падения. Тогда степень поляризации $P = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \frac{0{,}159}{0{,}841} = 18{,}9\%$, т. е. степень поляризации увеличилась. На этом основании в качестве поляризатора употребляется «стопа» плоскопараллельных стеклянных пластинок («стопа Столетова»).

16.68. Найти коэффициент отражения ρ и степень поляризации P_1 отраженных лучей при падении естественного света на стекло ($n = 1{,}5$) под углом $i = 45°$. Какова степень поляризации P_2 преломленных лучей?

Решение:

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \frac{I}{I_0}$ — (1), где $I = I_{\perp} + I$ — (2), причем $I_{\perp} = \frac{I_0}{2}\left[\frac{sin(i-\beta)}{sin(i+\beta)}\right]^2$ — (3) и $I = \frac{I_0}{2}\left[\frac{tg(i-\beta)}{tg(i+\beta)}\right]^2$ — (4). Показатель преломления среды $n = \frac{sin\, i}{sin\,\beta}$, откуда $sin\,\beta = \frac{sin\, i}{n}$ или $\beta = arcsin\left(\frac{sin\, i}{n}\right)$ — (5).

Подставляя (5) в (3) и (4), получаем

$$I_{\perp} = \frac{I_0}{2}\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 \text{ — (6) и}$$

$I = \frac{I_0}{2}\left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (2), получаем $I = \frac{I_0}{2}\left\{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2\right\}$ — (8). Подставляя (8) в (1), окончательно получаем $\rho = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2\right\}$; $\rho = 0{,}0503 \cdot 100\% = 5{,}03\%$.

Степень поляризации отраженных лучей $P_1 = \frac{I_\perp - I}{I_\perp + I}$ — (9). Подставляя (6) и (7) в (9), получаем

$$P_1 = \frac{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 - \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2}{\left[\frac{sin(i - arcsin(sin(i)/n))}{sin(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i - arcsin(sin(i)/n))}{tg(i + arcsin(sin(i)/n))}\right]^2};$$

$P_1 = 0{,}84 \cdot 100\% = 84\%$. Степень поляризации преломленных лучей $P_2 = \rho P_1 = 0{,}0422 \cdot 100\% = 4{,}22\%$.