§ 17. Элементы теории относительности

17.1. При какой относительной скорости v движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25%?

Решение:

Имеем $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — (1). По условию $\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}25$, отсюда $l = 0{,}75 l_0$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}75$; $1-\frac{v^2}{c^2} = 0{,}5625$; $v = \sqrt{c^2(1-0{,}5625)} =$ $= 1{,}98\cdot 10^8$ м/с.

17.2. Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его предельные размеры уменьшились в 2 раза?

Решение:

Пусть тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы K'. Поскольку в системе K' длина тела $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, а по условию задачи $l_0 = 2l$, то $l = 2l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Отсюда $\frac{1}{4} = 1-\frac{v^2}{c^2}$, следовательно, $v = c\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2{,}6\cdot 10^8$ м/с.

17.3. Мезоны космических лучей достигают поверхности Земли с самыми разнообразными скоростями. Найти релятивистское сокращение размеров мезона, скорость которого равна 95% скорости света.

Решение:

Т. к. поперечные размеры тела при его движении не меняются, то изменение объема тела определяется лоренцовым сокращением продольного размера, определяемого формулой $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Следовательно, объем тела сокращается по аналогичной формуле $V = V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Подставляя числовые данные, получим $V = 0{,}312V_0$. Тогда относительное изменение объема $\delta = \frac{V_0 - V}{V_0}\cdot 100\% = 68{,}8\%$.

17.4. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

Решение:

Промежуток времени $\Delta\tau$ в системе, движущейся со скоростью v по отношению к наблюдателю, связан с промежутком времени $\Delta\tau_0$ в неподвижной для наблюдателя системе соотношением $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость, c — скорость света. По условию $\beta = 99\% = 0{,}99$. Из формулы (1) получаем $\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ = 7,08 раза.

17.5. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Решение:

Промежуток времени по часам неподвижного наблюдателя (см. задачу 17.4) составляет $\Delta\tau = \dfrac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\Delta\tau_0 = 1$ с — «собственное время» мезона, $\beta = 95\% = 0{,}95$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

17.6. На сколько увеличится масса α-частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

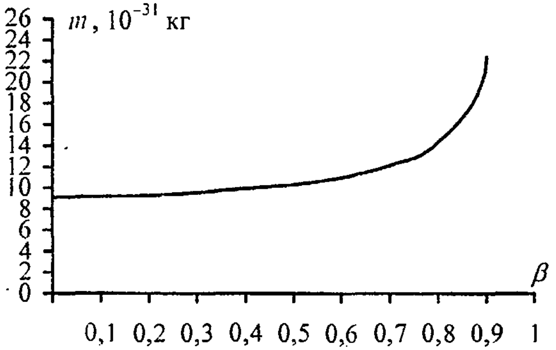
Решение:

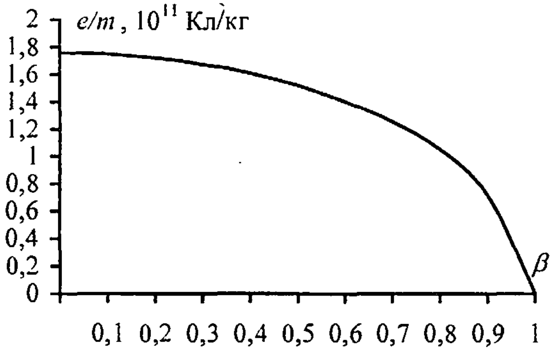
Зависимость массы m тела от скорости его движения дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где $m_0 = 6{,}6\cdot 10^{-27}$ кг — масса покоя α-частицы. По условию $v = 0{,}9\cdot c$, тогда $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-0{,}81c^2/c^2}} = 2{,}3m_0$. Отсюда $\Delta m = 2{,}3m_0 - m_0 = 1{,}3m_0 = 8{,}6\cdot 10^{-27}$ кг.

17.7. Найти отношение $\dfrac{e}{m}$ заряда электрона к его массе для скоростей: а) $v \ll c$; б) $v = 2\cdot 10^8$ м/с; в) $v = 2{,}2\cdot 10^8$ м/с; г) $v = 2{,}4\cdot 10^8$ м/с; д) $v = 2{,}6\cdot 10^8$ м/с; е) $v = 2{,}8\cdot 10^8$ м/с. Составить таблицу и построить графики зависимостей m и $\dfrac{e}{m}$ от величины $\beta = \dfrac{v}{c}$ для указанных скоростей.

Решение:

Зависимость массы электрона m от скорости его движения v дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11\times$





$\times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость.

Элементарный заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Составим таблицу и построим графики зависимостей m и $\dfrac{e}{m}$ от величины β для указанных скоростей.

v, 10^8 м/с	v<<c	2	2,2	2,4	2,6	2,8
β	0	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93
m, 10^{-31} кг	9,11	12,22	13,4	15,18	18,26	25,38
e/m, 10^{11} Кл/кг	1,76	1,31	1,19	1,05	0,876	0,631

17.8. При какой скорости v масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

Решение:
Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость. Из (1) имеем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — (4). По условию $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{2}$ — (5). Приравнивая правые части соотношений (4) и (5), получаем $\frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, откуда находим искомую скорость электрона $v = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

17.9. До какой энергии $W_к$ можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%? Задачи решить для: а) электронов; б) протонов; в) дейтонов.

Решение:
Имеем $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0\right)$;
$W_к = c^2(m - m_0)$, откуда $\frac{W_к}{m_0} = c^2\frac{m-m_0}{m_0}$ — (1). По условию $\frac{m-m_0}{m_0} = 0{,}05$, тогда из (1) получим $W_к = 0{,}05m_0c^2$. Подставляя числовые данные, получим: а) $W_к = 25{,}6 \cdot 10^3$ эВ; б) $W_к = 47 \cdot 10^6$ эВ; в) $W_к = 94 \cdot 10^6$ эВ.

17.10. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95% скорости света?

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $mc^2 + eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ или $eU = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$ — (1). Подставляя в (1) значение $v = 0{,}95 \cdot c$, получим $eU = 2{,}2mc^2$, откуда $U = \frac{2{,}2mc^2}{e} = 1{,}1 \cdot 10^6$ В.

17.11. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в 2 раза?

Решение:

Потенциальная энергия протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, равна $W_п = eU$. Зависимость кинетической энергии протона от скорости его движения v дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)$, где $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ — масса покоя протона, $\beta = \frac{v}{c}$ — относительная скорость. Работа, совершенная полем при перемещении протона, равна приобретенной им кинетической энергии, т. е. $eU = W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)$ или $U = \frac{m_0c^2}{e} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)$ — (1). Продольные размеры протона l, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связаны с продольными размерами протона l_0, неподвижного в этой системе, соотношением $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, откуда $\frac{l}{l_0} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (2). Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{l_0}{l} - 1\right) = 940\,\text{МВ}$.

17.12. Найти скорость v мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Решение:

Полная энергия мезона W складывается из его кинетической энергии $W_к$ и энергии покоя W_0. Поскольку $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, а $W_0 = m_0c^2$, то $W = W_к + W_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. По условию $\frac{W}{W_0} = 10$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10$. Отсюда $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}995$; $v = \beta c = 2{,}985 \cdot 10^8$ м/с.

17.13. Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

Решение:

Кинетическая энергия частицы $W = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, где $\beta = \frac{v}{c}$ и есть искомая величина. По условию $W = W_0 = mc^2$.

Тогда $mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$; $\beta = 0,866 \cdot 100\% = 86,6\%$.

17.14. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией $W_к = 10$ ГэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

Решение:

Зависимость кинетической энергии протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$. Отсюда доля скорости протонов от скорости света $\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{\left(W_к + m_0c^2\right)^2}} = 0,996 \cdot 100\% = 99,6\%$.

17.15. Найти релятивистское сокращение размеров протонов в условиях предыдущей задачи.

Решение:

Диаметр протона d, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связан с диаметром протона d_0, неподвижного в этой системе, соотношением $d = d_0\sqrt{1-\beta^2}$ — (1). Из задачи 17.14 доля скорости протонов от скорости света $\beta = 99,6\% = 0,996$. Релятивистское сокращение размеров протона из формулы (1) равно $\frac{d_0 - d}{d_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = 0,911 \cdot 100\% = 91,1\%$.

17.16. Циклотрон дает пучок электронов с электрической энергией $W_к = 0{,}67$ МэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость электронов в этом пучке?

Решение:

Доля скорости электронов от скорости света (см. задачу 17.14) равна $\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{\left(W_к + m_0 c^2\right)^2}} = 0{,}899 \cdot 100\% = 89{,}9\%$.

17.17. Составить для электронов и протонов таблицу зависимости их кинетической энергии $W_к$ от скорости v (в долях скоростей света) для значений β, равных: 0,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,999.

Решение:

Зависимость кинетической энергии электронов и протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0 c^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1), где масса покоя электрона $m_{0(e)} = 9{,}11 \times 10^{-31}$ кг, масса покоя протона $m_{0(p)} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Подставляя в уравнение (1) значения β, заполняем таблицу:

β	0,1	0,5	0,6	0,7
$W_{к(e)}$, Дж	$9{,}2 \cdot 10^{-17}$	$1{,}26 \cdot 10^{-16}$	$2{,}04 \cdot 10^{-16}$	$3{,}28 \cdot 10^{-16}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}5 \cdot 10^{-12}$	$1{,}74 \cdot 10^{-11}$	$3{,}76 \cdot 10^{-11}$	$6{,}01 \cdot 10^{-11}$

Продолжение

β	0,8	0,9	0,95	0,999
$W_{к(e)}$, Дж	$5{,}46 \cdot 10^{-16}$	$1{,}06 \cdot 10^{-15}$	$1{,}81 \cdot 10^{-15}$	$1{,}75 \cdot 10^{-14}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}01 \cdot 10^{-10}$	$1{,}95 \cdot 10^{-10}$	$3{,}31 \cdot 10^{-10}$	$3{,}21 \cdot 10^{-9}$

17.18. Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона.

Решение:

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — его масса покоя. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (2). Из уравнения (1) имеем $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

17.19. Какому изменению массы Δm соответствует изменение энергии на $\Delta W = 4{,}19$ Дж?

Решение:

Зависимость кинетической энергии тела от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (1), а зависимость массы тела от скорости его движения — $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (2). Изменение массы тела в процессе его движения $\Delta m = m - m_0$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta m = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (4). Поскольку кинетическая энергия покоя равна нулю, то изменение кинетической энергии $\Delta W_к = W_к$ — (5). Подставляя (1) в

(5) с учетом (4), получаем $\Delta W_к = \Delta mc^2$, откуда изменение массы тела $\Delta m = \frac{\Delta W_к}{c^2} = 4{,}6 \cdot 10^{-17}$ кг.

17.20. Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = 1$ а.е.м.

Решение:

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2 = 934$ МэВ.

17.21. Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = m_e$.

Решение:

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2$. По условию $\Delta m = m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, тогда $\Delta W_к = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

17.22. Найти изменение массы Δm_μ, происходящее при образовании $\nu = 1$ моль воды, если реакция образования воды такова: $2H_2 + O_2 = 2H_2O + 5{,}75 \cdot 10^5$ Дж.

Решение:

Имеем $\Delta m_\mu = \frac{\Delta W}{c^2}$ — (1). При образовании двух молей воды освобождается энергия $\Delta W' = 5{,}75 \cdot 10^5$ Дж, тогда $\Delta W = \frac{\Delta W'}{2} = 2{,}875 \cdot 10^5$ Дж — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ г/моль.

17.23. При делении ядра урана $^{235}_{92}U$ освобождается энергия $W = 200$ МэВ. Найти изменение массы Δm_μ при делении $\nu = 1$ моль урана.

Решение:
Изменение массы тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta m = \frac{\Delta W_к}{c^2}$ — (1). При делении ν молей урана освобождается энергия $\Delta W = W\nu N_A$ — (2), где W — энергия, освобождаемая при делении одного ядра. Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = \frac{W\nu N_A}{c^2} = 0{,}214$ г/моль.

17.24. Солнце излучает поток энергии $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время τ масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Решение:
Поток энергии, излучаемый Солнцем, определяется соотношением $P = \frac{\Delta W_к}{\tau}$ — (1). Изменение энергии Солнца в процессе излучения (см. задачу 17.19) $\Delta W_к = \Delta mc^2$ — (2). По условию $\Delta m = \frac{1}{2} m_0$ — (3), где $m_0 = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ — начальная масса Солнца. Подставляя (2) в (1), с учетом (3), получаем $P = \frac{m_0 c^2}{2\tau}$, откуда время, за которое масса Солнца уменьшится в 2 раза, равно $\tau = \frac{m_0 c^2}{2P} = 7{,}2 \cdot 10^{12}$ лет.