§ 18. Тепловое излучение

В задачах данного раздела используются данные таблиц 5 и 11 приложения.

18.1. Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1\,\text{см}^2$ имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

Мощность излучения из отверстия печи определяется соотношением $N = R_э S$ — (1). Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (2), где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К}^4)$ — постоянная Стефана — Больцмана. Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma T^4 S$, откуда температура печи $T = \left(\dfrac{N}{\sigma S}\right)^{\frac{1}{4}} = 1000\ \text{К}$.

18.2. Какую мощность N излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Решение:

Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то мощность излучения Солнца (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S$ — (1), где $S = 4\pi R_C^2$ — (2) — площадь поверхности Солнца, $R_C = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. Подставляя (2) в (1), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_C^2 = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

18.3. Какую энергетическую светимость $R'_э$ имеет затвердевший свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}6$.

Решение:

Затвердевающий свинец ведет себя как серое тело. По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$, где k — отношение энергетических светимостей абсолютно черного и серого тел при данной температуре, или коэффициент черноты, $T = 600$ К — температура плавления свинца. Подставляя числовые данные, получим $R_э = 4{,}4$ кВт/м^2.

18.4. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 34$ кВт. Найти температуру T этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0{,}6$ м^2.

Решение:

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S = 1000$ К.

18.5. Мощность излучения раскаленной металлической поверхности $N' = 0{,}67$ кВт. Температура поверхности $T = 2500$ К, ее площадь $S = 10$ см^2. Какую мощность излучения N имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение k энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Решение:

Если бы поверхность была абсолютно черной, то ее мощность излучения (см. задачу 18.1) была равна $N = \sigma T^4 S = 2{,}22$ кВт. Отношение энергетических светимостей поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре равно $k = \dfrac{N'}{N} = 0{,}3$.

18.6. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке $d = 0{,}3$ мм, длина спирали $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением U 127 В через лампочку течет ток $I = 0{,}31$ А. Найти температуру T спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}31$.

Решение:
Поскольку вольфрамовая спираль излучает как серое тело, то ее мощность излучения $N' = R'_э S$ — (1), где по закону Стефана — Больцмана $R'_э = k\sigma T^4$ — (2) — энергетическая светимость серого тела, $S = 2\pi dl$ — (3) — площадь поверхности вольфрамовой спирали. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N' = 2\pi k\sigma T^4 dl$ — (4). С другой стороны, мощность тока $N' = IU$ — (5), получаем $IU = 2\pi k\sigma T^4 dl$, откуда температура спирали $T = \left(\dfrac{IU}{2\pi k\sigma dl}\right)^{\frac{1}{4}} = 2208$ К.

18.7. Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450$ К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре $k = 0{,}3$. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Решение:
Мощность излучения вольфрамовой спирали (см. задачу 18.6) $N' = k\sigma T^4 S$. Отсюда площадь излучающей поверхности спирали $S = \dfrac{N'}{k\sigma T^4} = 0{,}4$ см^2.

18.8. Найти солнечную постоянную K, т. е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

Поскольку по условию излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана его энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (1). Мощность излучения Солнца $N = R_э S_1$ — (2), где $S_1 = 4\pi R_C^2$ — (3) — площадь поверхности Солнца. Подставляя (1) и (3) в (2), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_C^2$ — (4). Мощность, излучаемая Солнцем, падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли $\langle r_З \rangle = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м. Площадь поверхности такой сферы равна $S_2 = 4\pi r_З^2$ — (5). По определению солнечной постоянной $K = \dfrac{N}{S_2}$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), окончательно получаем $K = \dfrac{\sigma T^4 R_C^2}{\langle r_З \rangle^2} = 1{,}38$ кВт/м^2.

18.9. Считая, что атмосфера поглощает 10% лучистой энергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения N, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью $S = 0{,}5$ га. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

Мощность излучения $N_0 = KS\cos\alpha$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ — угол падения солнечных лучей, K — солнечная постоянная (см. задачу 18.8). По условию мощность излучения N, получаемая горизонтальным участком Земли, равна $0{,}9 N_0$.

т. е. $N = 0{,}9KS\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Подставляя числовые данные, получим $N = 3{,}1 \cdot 10^6$ Вт.

18.10. Зная значение солнечной постоянной для Земли (см. задачу 18.8), найти значение солнечной постоянной для Марса.

Решение:

Значение солнечной постоянной для Земли (см. задачу 18.8) определяется соотношением $K_З = \frac{\sigma T^4 R_С^2}{\langle r_З \rangle^2}$ — (1). Аналогично можно определить солнечную постоянную для Марса $K_М = \frac{\sigma T^4 R_С^2}{\langle r_М \rangle^2}$ — (2), где $\langle r_М \rangle = 2{,}279 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Солнца до Марса. Разделив (2) на (1), получим $\frac{K_М}{K_З} = \frac{\langle r_З \rangle^2}{\langle r_М \rangle^2}$, откуда солнечная постоянная для Марса $K_М = K_З\left(\frac{\langle r_З \rangle}{\langle r_М \rangle}\right)^2 = 0{,}59$ кВт/м^2.

18.11. Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм?

Решение:

Согласно первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$ — (1), где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость

$R_э = \sigma T^4$ — (2). Из формулы (1) абсолютная температура $T = \frac{C_1}{\lambda_m}$ — (3). Подставляя (3) в (2), окончательно получим

$$R_э = \sigma\left(\frac{C_1}{\lambda_m}\right)^4 = 73{,}08\,\text{МВт/м}^2.$$

18.12. Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 10\,\text{кВт}$. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700\,\text{нм}$.

Решение:

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) равна $N = \sigma T^4 S$ — (1). Из первого закона Вина (см. задачу 18.11) абсолютная температура равна $T = \frac{C_1}{\lambda_m}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma S\left(\frac{C_1}{\lambda_m}\right)^4$, отсюда площадь излучающей поверхности тела $S = \frac{N}{\sigma} \times \left(\frac{\lambda_m}{C_1}\right)^4 = 6\,\text{см}^2$.

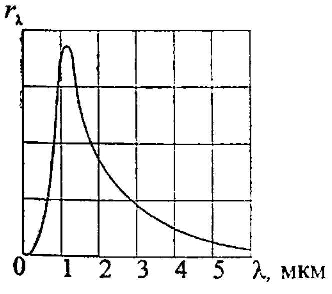
18.13. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки ($T = 3000\,\text{К}$); б) поверхность Солнца ($T = 6000\,\text{К}$); в) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура $T \approx 10^7\,\text{К}$? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение:

По первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$, откуда $\lambda_m = \frac{C_1}{T}$, где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. а) Для спирали электрической лампочки, при $T_1 = 3000$ К, $\lambda_1 = 1{,}03$ мкм — инфракрасная область. б) Для поверхности Солнца, при $T_2 = 6000$ К, $\lambda_2 = 483$ нм — область видимого света. в) Для атомной бомбы в момент взрыва, при $T_3 = 10^7$ К, $\lambda_3 = 290$ пм — область рентгеновских лучей.

18.14. На рисунке дана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела r_λ от длины волны λ при некоторой температуре. К какой температуре T относится эта кривая? Какой процент излучаемой энергии приходится на долю видимого спектра при этой температуре?

Решение:



По графику найдем длину волны, на которую приходится максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела: $\lambda_{max} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м. Согласно закону Вина $\lambda_{max} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К, отсюда $T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-6}} = 2400$ К. Процент излучаемой энергии, приходящейся на долю видимого спектра, определяется той долей площади, ограниченной кривой $r_\lambda = f(\lambda)$, которая отсекается ординатами, восстановленными по краям интересующего нас интервала. Пределы видимого спектра приблизительно от 400 до 750 нм. При данной температуре на долю видимого излучения приходится около 3—5% всего излучения.

18.15. При нагревании абсолютно черного тела длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Решение:

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_1 T_1 = C_1$ — (1) и $\lambda_2 T_2 = C_1$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получаем $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$ или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (3). По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (4). Из формулы (4) имеем: $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$ — (5). Подставляя (3) в (5), окончательно получаем $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4 = 3{,}63$.

18.16. На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре $t = 37°$ человеческого тела, т. е. $T = 310$ К?

Решение:

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_m = \frac{C_1}{T} = 9{,}35$ мкм.

18.17. Температура T абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 1000 до 3000 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость $R_э$? На сколько изменилась длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости? Во сколько раз увеличилась его максимальная спектральная плотность энергетической светимости r_λ?

Решение:

По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела (см. задачу 18.15) $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{1}{81}$ или $\frac{R_{э2}}{R_{э1}} = 81$. Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1} = 2{,}9$ мкм и $\lambda_2 = \frac{C_1}{T_2} = 0{,}97$ мкм. Согласно второму закону Вина максимальная спектральная плотность энергетической светимости возрастает пропорционально пятой степени абсолютной температуры $r_{\lambda\,max} = C_2 T^5$ — (1), где $C_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^{3}К^5. Из формулы (1) имеем $r_1 = C_2 T_1^5$ — (2) и $r_2 = C_2 T_2^5$ — (3). Разделив (3) на (2), получаем $\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 = 243$.

18.18. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Решение:

Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1}$ — (1) и $\lambda_2 = \frac{C_2}{\lambda_2}$ — (2). Изменение длины волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — (3). Подставляя (1) и

(2) в (3), получаем $\Delta\lambda = \frac{C_1}{T_2} - \frac{C_1}{T_1}$, откуда $T_2 = \frac{T_1 C_1}{T_1 \Delta\lambda + C_1} =$
$= 290$ К.

18.19. Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T = 100$ К, другая охлаждается на $\Delta T = 100$ К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности этого тела?

Решение:
По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$ — (1). После нагревания и охлаждения энергетическая светимость первой и второй половины будет соответственно равна $R'_{э1} = k\sigma(T + \Delta T)^4$ — (2) и $R'_{э2} = k\sigma(T - \Delta T)^4$ — (3). При этом средняя энергетическая светимость станет равной $\langle R'_э \rangle = \frac{R'_{э1} + R'_{э2}}{2}$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\langle R'_э \rangle = \frac{k\sigma\left[(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4\right]}{2}$ — (5). Разделив (5) на (1), находим $\frac{\langle R'_э \rangle}{R'_э} = \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T} = 1{,}06$.

18.20. Какую мощность N надо подводить к зачерненному металлическому шарику радиусом $r = 2$ см, чтобы поддерживать его температуру на $\Delta T = 27$ К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды $T = 293$ К. Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

Решение:
Мощность, необходимая для поддержания температуры, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость

шарика, $S = 4\pi r^2$ — (2) — площадь его поверхности. Поскольку по условию шарик зачерненный, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma(T + \Delta T)^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi r^2 \sigma(T + \Delta T)^4 = 3$ Вт.

18.21. Зачерненный шарик остывает от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 293$ К. На сколько изменилась длина волны λ, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости?

Решение:

Изменение длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости (см. задачу 18.18), равно $\Delta\lambda = \frac{C_1}{T_2} - \frac{C_1}{T_1} = 0{,}24$ мкм.

18.22. На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время τ масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К. Излучение Солнца считать постоянным.

Решение:

Мощность, излучаемая Солнцем, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость Солнца, $S = 4\pi R_C^2$ — (2) — площадь его поверхности, $R_C = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. По закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi R_C^2 \sigma T^4$ — (4). Изменение энергии Солнца за счет излучения $\Delta W = N\tau$ — (5). С другой стороны, $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (6), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, Δm — изменение массы Солнца. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем

$N\tau = c^2 \Delta m$, откуда изменение массы Солнца $\Delta m = \dfrac{N\tau}{c^2}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $\Delta m = \dfrac{4\pi R_C^2 \sigma T^4 \tau}{c^2} = 1{,}37 \cdot 10^{17}$ кг. Если $\Delta m = \dfrac{1}{2} M_C$, где $M_C = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, то $\tau = \dfrac{M_C c^2}{8\pi R_C^2 \sigma T^4} = 7{,}06 \cdot 10^{12}$ лет.