Глава VI
ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

§ 19. Квантовая природа света и волновые свойства частиц

Работа выхода электронов из некоторых металлов дана в таблице 17 приложения.

19.1. Найти массу m фотона: а) красных лучей света ($\lambda = 700$ нм); б) рентгеновских лучей ($\lambda = 25$ пм); в) гамма-лучей ($\lambda = 1{,}24$ пм).

Решение:

Энергия фотона $E = h\nu$ — (1), где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ — частота колебания. Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Т. е. уравнение (1) можно записать $E = h\dfrac{c}{\lambda}$ — (2). С другой стороны, согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получаем $h\dfrac{c}{\lambda} = mc^2$, откуда $m = \dfrac{h}{c\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг; б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг; в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

19.2. Найти энергию ε, массу m и импульс p фотона, если соответствующая ему длина волны $\lambda = 1{,}6$ пм.

Решение:

Имеем $E = h\frac{c}{\lambda}$; $m = \frac{h}{c\lambda}$ (см. задачу 19.1). Импульс фотона $p = mc = \frac{h}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг; $p = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

19.3. Ртутная дуга имеет мощность $N = 125$ Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ, равными: 612,1; 579,1; 546,1; 404,7; 365,5; 253,7 нм? Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

Решение:

Энергия излучения ртутной дуги $E = \eta N t$, по условию $t = 1$ с. Энергия одного кванта света $E_0 = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Пусть I — интенсивность линии (в процентах), тогда количество квантов можно определить по формуле: $n = \frac{IE}{E_0} = \frac{I\eta N t\lambda}{hc}$.

Подставляя числовые данные, получим:

1) $n = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}8 \cdot 125 \cdot 1 \cdot 6123 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 6{,}2 \cdot 10^{18}$; 2) $n = 1{,}2 \cdot 10^{19}$;

3) $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$; 4) $n = 5{,}9 \cdot 10^{18}$; 5) $n = 4{,}6 \cdot 10^{18}$;

6) $n = 5{,}1 \cdot 10^{18}$.

19.4. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Кинетическая энергия электрона $E = \frac{mv^2}{2}$ — (1). Энергия фотона $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\frac{mv^2}{2} = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 9{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

19.5. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

Решение:

Импульс электрона $p_e = m_e v$ — (1). Импульс фотона $p = \frac{h}{\lambda}$ — (2) (см. задачу 19.2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $m_e v = \frac{h}{\lambda}$, откуда $v = \frac{h}{\lambda m_e}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с.

19.6. Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Решение:

Энергия фотона $E = mc^2$. Подставляя в эту формулу значения массы покоя электрона, получим $E = 81 \cdot 10^{-15}$ Дж или $E = 510 \cdot 10^3$ эВ.

19.7. Импульс, переносимый монохроматическим пучком фотонов через площадку $S = 2$ см^2 за время $t = 0{,}5$ мин, равен $p = 3 \cdot 10^{-9}$ кг·м/с. Найти для этого пучка энергию E, падающую на единицу площади за единицу времени.

Решение:
Энергия и импульс фотона связаны соотношением $E = pc$. За единицу времени на единицу площади будет падать энергия $E_1 = \frac{pc}{St} = 150$ Дж/(с·м^2).

19.8. При какой температуре T кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:
Кинетическая энергия молекулы двухатомного газа $W = \frac{5}{2}kT$. Кинетическая энергия фотона $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. По условию $W = \varepsilon$ или $\frac{5}{2}kT = h\frac{c}{\lambda}$, откуда $T = \frac{2hc}{5k\lambda} = 9800$ К.

19.9. При высоких энергиях трудно осуществить условия для изменения экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений в рентгенах, поэтому допускается применение рентгена как единицы дозы для излучений с энергией квантов до $\varepsilon = 3$ МэВ. До какой предельной длины волны λ рентгеновского излучения можно употреблять рентген?

Решение:
Энергия квантов определяется соотношением $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. Отсюда предельная длина волны равна $\lambda = \frac{hc}{E} = 0{,}41 \cdot 10^{-12}$ м.

19.10. Найти массу m фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре $t = 20°$ С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение:
Импульс фотона $p_1 = m_1 c$, где m_1 — масса фотона, c — скорость света в вакууме. Импульс молекулы водорода

$p_2 = m_2\sqrt{\overline{v^2}}$, где m_2 — масса молекулы водорода, $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_2}}$ — средняя квадратичная скорость молекулы водорода. По условию $p_1 = p_2$ или $m_1 c = m_2\sqrt{\frac{3kT}{m_2}}$ — (1). Массу молекулы водорода можно определить из соотношения $m_2 = \frac{\mu}{N_A}$ — (2), где μ — молярная масса водорода, N_A — число Авогадро. Подставляя (2) в (1), найдем $m_1 c = \sqrt{\frac{3kT\mu}{N_A}}$, откуда $m_1 = \sqrt{\frac{3kT\mu}{c^2 N_A}}$. Подставляя числовые данные, получим $m_1 = 2{,}1\cdot 10^{-32}$ кг.

19.11. В работе А. Г. Столетова «Актино-электрические исследования» (1888 г.) впервые были установлены основные законы фотоэффекта. Один из результатов его опытов был сформулирован так: «Разряжающим действием обладают лучи самой высокой преломляемости с длиной волны менее 295 нм». Найти работу выхода A электрона из металла, с которым работал А. Г. Столетов.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$. Условие возникновения фотоэффекта: $h\nu = A$ или $\nu = \frac{A}{h}$ — (1). Поскольку $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то из (1) получим $A = \frac{hc}{\lambda}$ — (2). По условию $\lambda = 295\cdot 10^{-9}$ м, тогда из (2) найдем $A = 4.2$ эВ.

19.12. Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Решение:

Работа выхода электрона из металла, если его скорость $v = 0$, равна $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, где λ_0 — красная граница фотоэффекта. Таким образом, $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 5{,}17 \cdot 10^{-7}$ м.

19.13. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти минимальную энергию фотона, вызывающего фотоэффект.

Решение:

Минимальная энергия фотона должна быть равна работе выхода электрона, т. е. $E_{min} = A = \dfrac{hc}{\lambda_0}$. Подставляя числовые данные, получим $E_{min} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж или $E_{min} = 4{,}5$ эВ.

19.14. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость v электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию W электронов.

Решение:

Работа выхода электрона $A = \dfrac{hc}{\lambda_0} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + \dfrac{mv_{max}^2}{2}$ — (1), где $\dfrac{mv_{max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона. Из (1) имеем $\dfrac{hc}{\lambda} - A = \dfrac{mv_{max}^2}{2}$, откуда максимальная скорость электронов $v_{max} = \sqrt{\dfrac{2(hc/\lambda - A)}{m}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v_{max} = 9 \cdot 10^5$ м/с. Максимальная кинетическая энергия электронов равна $W_{max} = \dfrac{mv^2}{2} = 3{,}7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

19.15. Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3$ В. Фотоэффект сжимается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

Решение:

Работа выхода электрона $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0} = 2{,}48$ эВ. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $h\nu = A + \dfrac{mv^2}{2}$. Если электроны полностью задерживаются разностью потенциалов U, то по закону сохранения энергии $eU = \dfrac{mv^2}{2}$. Тогда $h\nu = A + eU$, откуда $\nu = \dfrac{A + eU}{h} = 13{,}2 \cdot 10^{14}$ Гц.

19.16. Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Решение:

Имеем $h\nu = A + eU$ (см. задачу 19.15) или $h\dfrac{c}{\lambda} = A + eU$ — (1). Работа выхода электрона из калия $A = 2$ эВ =

$= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж (см. таблицу 17). Из (1) найдем $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}75$ В.

19.17. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 0{,}8$ В. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект.

Решение:

Имеем $h\dfrac{c}{\lambda} = A + eU$, откуда $\lambda = \dfrac{hc}{A + eU} = 204$ нм. Предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект, найдем из соотношения $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 234$ нм.

19.18. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $\varepsilon = A + \dfrac{mv^2}{2} = A + \dfrac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2m(\varepsilon - A)} = 3{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

19.19. Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц — разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Решение:
Имеем $h\nu_1 = A + eU_1$ — (1); $h\nu_2 = A + eU_2$ — (2). Вычитая (1) из (2), получим $h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1)$, откуда $h = \frac{U_2 - U_1}{\nu_2 - \nu_1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

19.20. Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов U надо приложить между электродами, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость v получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Решение:

Согласно закону сохранения энергии $eU = h\frac{c}{\lambda} - A + eU_0$ (см. задачу 19.15), откуда $U = \frac{hc/\lambda - A}{e} + U_0$. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В. Чтобы фототок упал до нуля, задерживающая разность потенциалов должна удовлетворять условию $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 7{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

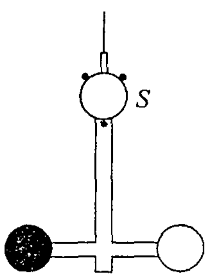
19.21. Между электродами фотоэлемента предыдущей задачи приложена задерживающая разность потенциалов $U = 1$ В. При какой предельной длине волны λ_0 падающего на катод света начинается фотоэффект?

Решение:

Имеем $U_e = h\frac{c}{\lambda_0} - A$, откуда $\lambda_0 = \frac{hc}{eU + A}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 226$ нм.

19.22. На рисунке показана часть прибора, с которым П. Н. Лебедев производил свои опыты по измерению светового давления. Стеклянная крестовина, подвешенная на тонкой нити, заключена в откачанный сосуд и имеет на концах два легких кружка из платиновой фольги. Один кружок зачернен, другой оставлен блестящим. Направляя свет на один из кружков и измеряя угол поворота нити (для зеркального отсчета служит зеркальце S), можно определить световое давление. Найти световое давление P и световую энергию E, падающую от дуговой лампы в единицу времени на единицу площади кружков. При освещении блестящего кружка отклонение зайчика $a = 76$ мм по шкале, удаленной от зеркальца на расстояние $b = 1200$ мм. Диаметр кружков $d = 5$ мм. Расстояние от центра кружка до оси вращения $l = 9{,}2$ мм. Коэффициент отражения света от блестящего кружка $\rho = 0{,}5$. Постоянная момента кручения нити ($M = k\alpha$) $k = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ Н·м/рад.

Решение:



Имеем $P = \frac{F}{S}$ — (1), где F — сила светового давления на кружок площадью S. Но $F = \frac{M}{l} = \frac{k\alpha}{l}$ — (2), где M — момент кручения нити, l — расстояние от центра кружка до оси вращения, α — угол поворота кружка. Зная, что при повороте зеркальца на угол α отраженный луч повернется на угол 2α, найдем: $tg2\alpha = \frac{a}{b}$. Для малых углов $tg2\alpha \approx 2\alpha = \frac{a}{b}$. Отсюда $\alpha = \frac{a}{2b}$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P = \frac{ka}{2lbS} = 3{,}85 \cdot 10^{-6}$ Па. Световая энергия $E = \frac{Pc}{1+\rho} = \ = 770$ Дж/(с·м^2).

19.23. В одном из опытов П. Н. Лебедева при падении света на зачерненный кружок ($\rho = 0$) угол поворота нити был равен $\alpha = 10'$. Найти световое давление P и мощность N падающего света. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:

Имеем $p = \frac{k\alpha}{lS} = \frac{4k\alpha}{l\pi d^2}$ (см. задачу 19.22). Подставляя числовые данные, получим $p = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$ Н/м^2. С другой стороны, световое давление $p = \frac{E}{c}(1+\rho)$. По условию коэффициент отражения света $\rho = 0$, тогда $p = \frac{E}{c}$ — (1), где E — количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени. Тогда мощность N света, падающего на площадь S кружка, найдем из соотношения $N = E \cdot S$. Из (1) имеем $E = pc$, кроме того, $S = \frac{\pi d^2}{4}$, отсюда $N = \frac{pc \cdot \pi d^2}{4} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ Вт.

19.24. В одном из опытов П. Н. Лебедева мощность падающего на кружки монохроматического света ($\lambda = 560$ нм) была равна $N = 8{,}33$ мВт. Найти число фотонов I, падающих в единицу времени на единицу площади кружков, и импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, для значений ρ, равных: 0; 0,5; 1. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение:

Найдем концентрацию фотонов в пучке света, падающем на кружок, из соотношения $n = \frac{\omega}{\varepsilon}$ — (1), где ω — объемная плотность энергии, ε — энергия одного фотона. Поскольку $\omega = \frac{E}{c} = \frac{N}{Sc}$, а $\varepsilon = h\frac{c}{\lambda}$, то выражение (1) примет вид $n = \frac{N\lambda}{Sc^2h}$ — (2). Площадь кружка $S = \frac{\pi d^2}{4} = 19{,}6 \cdot 10^6$ м^2. Число I фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади, найдем из соотношения $I = \frac{N}{St}$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S. Но $N = ncSt$, следовательно, $I = \frac{ncSt}{St} = nc$. С учетом (2) получим $I = \frac{N\lambda}{Sch} = 1{,}2 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$. Импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, будет численно равен световому давлению p, т. е. $F\Delta\tau = p = \frac{N}{Sc}(1+\rho)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $F_1\Delta\tau = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2; б) $F_2\Delta\tau = 2{,}13 \times 10^{-6}$ Н·с/м^2; в) $F_3\Delta\tau = 2{,}84 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м^2.

19.25. Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил форму кометных хвостов световым давлением солнечных лучей. Найти световое давление P солнечных лучей на абсолютно черное тело, помещенное на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Какую массу m должна иметь частица в кометном хвосте, помещенная на этом расстоянии, чтобы сила светового давления на нее уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем?

Площадь частицы, отражающую все падающие на нее лучи, считать равной $S = 0{,}5 \cdot 10^{-12}$ м^2. Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2.

Решение:

Световое давление $P = \frac{E}{c}(1+\rho)$. В условиях данной задачи $E = K$; $\rho = 0$. Тогда $P = \frac{K}{c} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ Па. Сила светового давления $F_1 = PS$, сила притяжения частицы Солнцем $F_2 = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Солнца. По условию $F_1 = F_2$, т. е. $PS = G\frac{mM}{R^2}$, откуда масса частицы $m = \frac{PSR^2}{GM}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 3{,}9 \cdot 10^{-16}$ кг.

19.26. Найти световое давление P на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 6% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Решение:

По определению светового давления $P = \frac{E}{c}(1+\rho)$ — (1), где $E = \frac{N}{S}$ — (2) — энергия, падающая на единицу поверхности за единицу времени, N — мощность лампы, $S = 4\pi r^2$ — (3) — площадь поверхности колбы, ρ — коэффициент отражения света. Подставляя (3) в (2), получаем $E = \frac{N}{4\pi r^2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), окончательно находим $P = \frac{N(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 11{,}03$ мкПа.

19.27. На поверхность площадью $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ в единицу времени падает световая энергия $E = 1{,}05$ Дж/с. найти световое давление P в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

Решение:

Полностью поглощает лучи черная поверхность, а полностью отражает — зеркальная. При падении на черную поверхность фотон с энергией E_0 поглощается, передавая поверхности импульс $\frac{E_0}{c}$. За время Δt поверхность площадью S поглотит излучение с энергией $E = IS\Delta t$ — (1), содержащее $\frac{E}{E_0}$ фотонов. Переданный поверхности импульс $\frac{E}{E_0}\frac{E_0}{c} = \frac{IS\Delta t}{c}$; с другой стороны, он равен $F\Delta t = P_1 S\Delta t$. Отсюда $P_1 = \frac{I}{c}$. Из (1) найдем, учитывая, что по условию $\Delta t = 1$ с, $I = \frac{E}{S}$, тогда $P_1 = \frac{E}{Sc} = 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ Па. При отражении от зеркальной поверхности фотоны изменяют свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает поверхности импульс $\frac{2E_0}{c}$; таким образом, давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на черную. Т. е. $P_2 = 2\frac{E}{Sc} = 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ Па.

19.28. Монохроматический пучок света ($\lambda = 490$ нм), падая по нормали к поверхности, производит световое давление $P = 4{,}9$ мкПа. Какое число фотонов I падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света $\rho = 0{,}25$.

Решение:

Воспользуемся формулой из задачи 19.24, выражающей число фотонов, падающих в единицу времени на площадь S: $I = \frac{N\lambda}{Sch}$. Здесь $\frac{N}{S}$ — мощность света, падающего на единицу площади, причем $\frac{N}{S} = E = \frac{Pc}{1+\rho}$ (см. задачу 19.23). Отсюда $I = \frac{P\lambda}{h(1+\rho)} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\,\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$.

19.29. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 70{,}8$ пм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $\varphi = \pi$.

Решение:

Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии определяется формулой $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$, где φ — угол рассеяния, m — масса электрона. Отсюда $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 73{,}22 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 75{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

19.30. Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\varphi = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25{,}4$ пм?

Решение:

Имеем $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$ (см. задачу 19.29), отсюда $\lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 24{,}2 \cdot 10^{-12}$ м.

19.31. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\varphi = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e и импульс электрона отдачи.

Решение:

Кинетическая энергия электрона равна энергии, потерянной фотоном: $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. Подставляя числовые данные, получим $W_e = 10{,}56 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 6{,}6 \cdot 10^3$ эВ. Импульс и кинетическая энергия электрона связаны соотношением $W = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2mW} = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.32. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Найти энергию W и импульс p рассеянного фотона.

Решение:

Энергия падающего фотона $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$. Энергия рассеянного фотона $W = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. По условию $W_e = \frac{W_0}{2}$, т. е. $\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = \frac{hc}{2\lambda_0}$. Отсюда $\frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = W = \frac{hc}{2\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \frac{h}{mc}$. Окончательно имеем $W = \frac{mc^2}{2}$, т. е. энергия рассеянного фотона равна половине энергии покоя электрона. Подставляя числовые данные, получим $W = 41 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 0{,}26 \cdot 10^6$ эВ. Импульс фотона $p = \frac{W}{c} = 13{,}7 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.33. Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = 0{,}6$ МэВ. Найти энергию W_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Решение:

Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$ (см. задачу 19.31). Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0}$, т. е. можно записать, что $W_e = \varepsilon \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$ — (1). По условию $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda_0$; $\lambda_0 + \Delta\lambda = 1{,}2\lambda_0$, тогда из (1) получим $W = 0{,}17\varepsilon = 0{,}1$ МэВ.

19.34. Найти длину волны де Бройля λ для электронов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Решение:

Пучок элементарных частиц обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении перемещения этих частиц. Длина волны λ, соответствующая этому пучку, определяется соотношением де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, где v — скорость частиц, m — масса частиц, W — их кинетическая энергия. Если скорость v частиц соизмерима со скоростью света c, то эта формула принимает вид $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, m_0 — масса покоя частицы. Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает кинетическую энергию, причем $eU = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (3). При $U_1 = 1$ В получим $v_1 = 6\cdot10^5$ м/с, при $U_2 = 100$ В получим $v_2 = 6\cdot10^6$ м/с. В первом случае для нахождения длины волны де Бройля можно применить уравнение (1), во втором случае лучше использовать уравнение (2). Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 1{,}22\cdot10^{-9}$ м; $\lambda_2 = 0{,}122\cdot10^{-9}$ м.

19.35. Решить предыдущую задачу для пучка протонов.

Решение:

Найдем скорость протонов, прошедших разность потенциалов U_1 и U_2. По формуле (3) из предыдущей задачи получим $v_1 = 1{,}38\cdot10^4$ м/с; $v_2 = 1{,}38\cdot10^5$ м/с. Следовательно, в обоих случаях можно использовать формулу $\lambda = \frac{h}{mv}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 29\cdot10^{-12}$ м; $\lambda_2 = 2{,}9\cdot10^{-12}$ м.

19.36. Найти длину волны де Бройля λ для: а) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре

$T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

Решение:

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (1) для $v \ll c$ или соотношением $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2}$ — (2) для скоростей v, соизмеримых со скоростью света c. а) Воспользовавшись уравнением (2), найдем $\lambda = 730 \cdot 10^{-12}$ м. б) Скорость атома водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2735$ м/с, т. е. $v \ll c$. По формуле (1) найдем $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hN_A}{\mu v} = 145 \cdot 10^{-12}$ м. в) Поскольку скорость шарика $v \ll c$, то по формуле (1) найдем $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-29}$ м, т. е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

19.37. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, имеющего кинетическую энергию: а) $W_1 = 10$ кэВ; б) $W_2 = 1$ МэВ.

Решение:

Имеем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ (см. задачу 19.34). Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 12{,}3 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 0{,}87 \cdot 10^{-12}$ м.

19.38. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2{,}02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

Решение:
Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ — (1), где $W = eU$ — (2) — энергия частицы, m_0 — масса покоя частицы. Из (2) найдем $W = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж. Поскольку $W << c$, величиной $\frac{W^2}{c^2}$ в уравнении (1) можно пренебречь и оно примет вид $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, откуда $m = \frac{h^2}{2W\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

19.39. Составить таблицу значений длин волн де Бройля λ для электрона, движущегося со скоростью v, равной: $2 \cdot 10^8$; $2{,}2 \cdot 10^8$; $2{,}4 \cdot 10^8$; $2{,}6 \cdot 10^8$; $2{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

Решение:
Воспользовавшись формулой для нахождения длины волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, составим таблицу.

v, 10^8 м/с	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
λ, пм	2,7	2,25	1,82	1,39	0,93[illegible]

19.40. α-частица движется по окружности радиусом $r = 8{,}3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 18{,}9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля λ для α-частицы.

Решение:
На α-частицу, движущуюся в однородном магнитном поле, действует сила Лоренца $F_л = qvB$ — (1), которая является центростремительной силой и сообщает частице

нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_л = \frac{mv^2}{r}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (4), получаем $qvB = \frac{mv^2}{r}$, откуда скорость α-частицы $v = \frac{qBr}{m}$ — (5). Магнитная индукция связана с напряженностью магнитного поля соотношением $B = \mu\mu_0 H$ — (6), причем для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$. Подставляя (6) в (5), получаем $v = \frac{q\mu_0 Hr}{m}$ — (7). Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (8). Подставляя (7) в (8), окончательно находим $\lambda = \frac{h}{q\mu_0 Hr} = 13{,}11$ пм.

19.41. Найти длину волны де Бройля λ для атома водорода, движущегося при температуре $T = 293$ К с наиболее вероятной скоростью.

Решение:
Наиболее вероятная скорость движения атома водорода $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — (1), где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv_в}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2kT/m}} = 180$ пм.