§ 20. Атом Бора. Рентгеновские лучи

В этом разделе используются данные таблиц 3 и 19 из приложения. В задачах 20.5, 20.33 дан авторский вариант решения.

20.1. Найти радиусы r_k трех первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости v_k электрона на них.

Решение:

На электрон, движущийся в атоме водорода по k-й боровской орбите, действует кулоновская сила $F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (1), где e — заряд электрона. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_k^2}{r_k}$ — (2), где v_k — скорость электрона на k-й орбите. По второму закону Ньютона $F = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = \frac{mv_k^2}{r_k}$, откуда $r_k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_k^2}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ и $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi me^2}$. По результатам вычислений составим таблицу.

k	1	2	3
v, 10^6 м/с	2,18	1,08	0,73
r, 10^{-12} м	52,9	211,6	476,1

20.2. Найти кинетическую $W_к$, потенциальную $W_п$ и полную W энергии электрона на первой боровской орбите.

Решение:

Скорость движения электрона по k-й орбите $v_k = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (1) (см. задачу 20.1). Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W_{к(k)} = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$. По условию $k = 1$. Подставляя числовые данные, получим $W_{к(1)} = 21{,}78 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 13{,}6$ эВ. Потенциальная энергия электрона $W_{п(1)} = -2W_{к(1)} = -27{,}2$ эВ. Полная энергия электрона $W_1 = W_{к(1)} + W_{п(1)} = -13{,}6$ эВ.

20.3. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона, находящегося на k-й орбите атома водорода, для $k = 1, 2, 3$ и ∞.

Решение:

Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{к(k)} = \dfrac{mv_k^2}{2}$ (см. задачу 20.2). Если $k = 1$, то $W_{к(1)} = 13{,}6$ эВ. Если $k = 2$, то $W_{к(1)} = 3{,}4$ эВ. Если $k = 3$, то $W_{к(1)} = 1{,}51$ эВ. Если $k = \infty$, то $W_{к(1)} = 0$.

20.4. Найти период T обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость ω.

Решение:

Радиус k-й боровской орбиты электрона в атоме водорода и скорость движения электрона по k-й орбите соответственно равны $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (1) и $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 k h}$ — (2) (см. задачу 20.1). Период обращения электрона $T_k = \frac{2\pi r_k}{v_k}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $T_k = \frac{4\varepsilon_0^2 k^3 h^3}{m e^4}$ — (4). Для $k = 1$ найдем $T_1 = 1{,}52 \cdot 10^{-16}$ с. Угловая скорость движения электрона по k-й орбите $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получим $\omega_k = \frac{\pi m e^4}{2\varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k = 1$ найдем $\omega_1 = 4{,}13 \cdot 10^{16}$ рад/с.

20.5. Найти наименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1).

k	n	Серия	Область
1	2.3.4 ...	Лаймана	Ультрафиолетовая
2	3.4.5 ...	Бальмера	видимая
3	4.5.6 ...	Пашена	инфракрасная
4	5.6.7 ...	Брэккета	инфракрасная
5	6.7.8 ...	Пфунда	инфракрасная

Таким образом, видимая область спектра соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3, 4, 5$ ... Очевидно, наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n = \infty$. Тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$ или $\lambda_{min} = \frac{4}{R} = 365$ нм (с точностью до третьей значащей цифры). Наибольшая длина волны соответствует $n = 3$, при этом $\lambda_{max} = 656$ нм.

20.6. Найти наибольшую длину волны λ_{max} в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). В ультрафиолетовой области $k = 1$, $n = 2, 3, 4 \ldots$ — серия Лаймана. Наибольшая длина волны соответствует $n = 2$, тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{3R}{4}$ или $\lambda_{max} = \frac{4}{3R}$, где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{max} = 121$ нм. С другой стороны, из соотношения де Бройля для релятивистских частиц $\lambda_{max} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), получим $\frac{4}{3R} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$, откуда наименьшая скорость, необходимая для появления данной спектральной линии, равна $v_{min} = \frac{3Rhc}{\sqrt{16m^2c^2 + 9R^2h^2}} = 1{,}88 \cdot 10^6$ м/с.

20.7. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Решение:

Потенциал ионизации U_i атома определяется соотношением $eU_i = A_i$, где A_i — работа по удалению электрона с нормальной орбиты на бесконечность. Для атома водорода $A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. При $k = 1$ и $n = \infty$ имеем $A_i = hRc$, потенциал ионизации $U_i = \frac{A_i}{e} = \frac{hRc}{e} = 13{,}6$ В.

20.8. Найти первый потенциал возбуждения U_1 атома водорода.

Решение:

Первый потенциал возбуждения атома водорода определяется из закона сохранения энергии $W_{п(1)} = W_{к(1)} - W_{к(2)}$, где $W_{п(1)} = eU_1$ — (2) — потенциальная энергия электрона, необходимая для возбуждения. $W_{K(k)} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$ — (3) (см. задачу 20.2) — кинетическая энергия электрона на по k-й орбите. Подставляя (2) и (3) в (1), получим $eU_1 = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right)$, откуда, учитывая, что $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$, найдем $U_1 = \frac{3me^3}{32\varepsilon_0^2 h^2} = 10.2$ В.

20.9. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь эти электроны?

Решение:

Все линии всех серий спектра водорода появятся при ионизации атома водорода. Следовательно, наименьшая энергия $W_{min} = eU_i = \frac{mv_{min}^2}{2}$ — (1). Поскольку $W_{min} = 13{,}6$ эВ (см. задачу 20.7), то из (1) найдем $v_{min} = \sqrt{\frac{2eU_i}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

20.10. В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атома водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Решение:

Энергия, необходимая для перевода атома в первое возбужденное состояние, $W_1 = 10{,}2$ эВ (см. задачу 20.8). Энергия, необходимая для перевода атома во второе возбужденное состояние $(k = 1,\ n = 3)$, $W_2 = 12{,}1$ эВ. Таким образом, спектр водорода будет иметь только одну спектральную линию, если энергия бомбардирующих электронов лежит в интервале $10{,}2 \le W \le 12{,}1$ эВ.

20.11. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн λ этих линий.

Решение:

Длины волн спектральных линий водорода для всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Для серий Лаймона первые две линии будут иметь следующие длины волн: 1) Если $k = 1$ и $n = 2$, то $\lambda_1 = 121$ нм. 2) Если $k = 1$ и $n = 3$, то $\lambda_2 = 102{,}6$ нм. Кроме того, первая линия в серии

Бальмера при $k=2$ и $n=3$ будет иметь длину волны $\lambda_3 = 656.3$ нм. Наименьшая энергия бомбардирующих электронов, необходимая для возникновения данных спектральных линий, W_{min} по закону сохранения энергии будет равна энергии, необходимой для перевода атома из основного во второе возбужденное состояние, т. е. $W_{min} = W_{k(1)} - W_{k(3)} = 12.03$ эВ.

20.12. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атома водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Решение:

Для наблюдения трех спектральных линий необходимо, чтобы мог осуществляться переход электронов в атоме водорода с первого электрического уровня на третий. В этом случае будут наблюдаться две линии серии Лаймана и одна линия серии Бальмера. Формула, позволяющая найти длины волн, соответствующие линиям водородного спектра, имеет вид $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где k и n — номера орбит, $R = 1.097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Тогда $\lambda = \frac{k^2 n^2}{R(n^2 - k^2)}$. Для минимальной длины волны $k=1$ и $n=3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102.6$ нм. Для максимальной длины волны $k=1$ и $n=3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102.6$ нм. Для максимальной длины волны $k=1$ и $n=2$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{4}{3R} = 121.5$ нм. Таким образом, $102.6 \le \lambda \le 121.5$ нм.

20.13. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 486$ нм?

Решение:

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = \Delta W$ или $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, λ — длина волны излученного атомом фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\Delta W}{h} = \frac{c}{\lambda}$, откуда изменение кинетической энергии электрона $\Delta W = \frac{ch}{\lambda} = 2{,}55$ эВ.

20.14. В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты r_k электрона увеличился в 9 раз?

Решение:

Радиусы орбит, по которым возможно движение электронов в атоме водорода, согласно первому постулату Бора удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (1), где m — масса электрона, v_k — его скорость на k-й орбите, r_k — радиус этой орбиты, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. На электроны действует кулоновская сила $F_K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (2), которая является центростремительной и сообщает электронам нормальное ускорение $a_n = \frac{vk^2}{r_k}$ — (3). По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = m\frac{v_k^2}{r_k}$ — (5), где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Решая совместно уравнения (1) и (5), находим $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (6). По условию $\frac{r_n}{r_k} = 9$, тогда из формулы (6) следует, что $\frac{n}{k} = 3$. Поскольку $n = 3k$, то переход электронов осуществляется между первым и третьим энергетическими уровнями, тогда (см. задачу 20.12) длины волн $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.15. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$?

Решение:

Согласно условию главных максимумов для дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 5$, тогда из формулы (1) имеем $\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k}$ — (2). Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты на другую (см. задачу 20.13) определяется соотношением $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta W = \frac{chk}{d\sin\varphi} = 1{,}89$ эВ. Подбором находим, что такой переход возможен с $n = 3$ на $k = 2$ в серии Бальмера.

20.16. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по первой боровской орбите атома водорода.

Решение:

Длина волны де Бройля для электрона (см. задачу 20.6) определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv_k}\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}$ — (1), где $v_k = \frac{l^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1) — скорость электрона на k-й орбите. Подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{2\varepsilon_0 kh^2}{ml^2}\sqrt{1-\frac{l^4}{4\varepsilon_0 k^2h^2c^2}} = 0{,}33$ нм.

20.17. Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость v_1 электрона на ней.

Решение:

В однократно ионизированном гелии на электрон, движущийся по первой боровской орбите, будет действовать сила Кулона $F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ — (1), где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона, r_1 — радиус первой боровской орбиты. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_1^2}{r_1}$ — (2), где v_1 — скорость электрона на первой боровской орбите. По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$, где k — номер орбиты. В нашем случае $k = 1$, поэтому $mv_1 r_1 = \frac{h}{2\pi}$ — (5), где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Решая совместно уравнения (4) и (5), находим радиус первой боровской орбиты r_1 и скорость электрона на ней, которые соответственно равны $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} = 26{,}47$ пм и $v_1 = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} = 4{,}37 \cdot 10^6$ м/с.

20.18. Найти первый потенциал возбуждения U_1: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = W_n - W_k$ — (1), где k и n — номера орбит, причем $n > k$. В нашем случае $n = 2$ и $k = 1$. В водородоподобных ионах частоты определяются из соотношения $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя значения k и n для нашего случая, получаем $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \frac{3RcZ^2 h}{4} = W_n - W_k$ — (3). Для возбуждения водородоподобных ионов электроны должны обладать энергией $W = eU_1$, тогда по закону сохранения энергии $eU_1 = W_n - W_k$ — (4). Приравнивая левые части уравнений (3) и (4), получаем $eU_1 = \frac{3RcZ^2h}{4}$, откуда первый потенциал возбуждения водородоподобного иона $U_1 = \frac{3RcZ^2h}{4e}$. а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_1 = 40{,}8$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_2 = 91{,}8$ В.

20.19. Найти потенциал ионизации U_i: а) однократно ионизированного гелия; б) двукратно ионизированного лития.

Решение:

Потенциал ионизации водородоподобного иона U_i определяется уравнением $eU_i = A_i$ — (1), где A_i — работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность. Для водородоподобных ионов $A_i = h\nu$ — (2), где $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $A_i = hRcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (4). При $k = 1$ и $n = \infty$ формула (4) примет вид $A_i = hRcZ^2$ — (5). Подставляя (5) в (1), получаем $eU_i = hRcZ^2$, откуда потенциал ионизации $U_i = \frac{hRcZ^2}{e}$.

а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_i = 54{,}5$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_i = 122{,}8$ В.

20.20. Найти длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизированном атоме гелия.

Решение:

Частота излучения фотона водородоподобным ионом (см. задачу 20.18) при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую равна $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где λ — длина волны фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{c}{\lambda} = \frac{2RcZ^2}{4}$ или $\frac{1}{\lambda} = \frac{3RZ^2}{4}$, откуда длина волны $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $\lambda = 30{,}4$ нм.

20.21. Решить предыдущую задачу для двукратно ионизированного атома лития.

Решение:

Длина волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую (см. задачу 20.20), равна $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $\lambda = 13{,}5$ нм.

20.22. D-линия натрия излучается в результате такого перехода с одной орбиты атома на другую, при котором энергия атома уменьшается на $\Delta W = 3{,}37 \cdot 10^{-19}$ Дж. Найти длину волны λ D-линии натрия.

Решение:

Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты атома на другую (см. задачу 20.13) равно

$\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$, откуда длина волны D-линии натрия $\lambda = \frac{ch}{\Delta W} = 589$ нм.

20.23. На рисунке изображена схема прибора для определения резонансного потенциала натрия. Трубка содержит пары натрия. Электроды G и A имеют одинаковый потенциал. При какой наименьшей ускоряющей разности потенциалов U между катодом K и сеткой G наблюдается спектральная линия с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия электрического поля между катодом и анодом $W_п = eU$ — (1) идет на изменение кинетической энергии электронов при переходе с одной орбиты на другую, которое (см задачу 20.13) равно $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (2), т. е. $W_п = \Delta W$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $eU = \frac{ch}{\lambda}$, откуда ускоряющая разность потенциалов $U = \frac{ch}{e\lambda} = 2{,}1$ В.

20.24. Электрон, пройдя разность потенциалов $U = 4{,}9$ В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны λ имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в нормальное состояние?

Решение:

Ускоряющая разность потенциалов (см. задачу 20.23) равна $U = \frac{ch}{e\lambda}$. Отсюда длина волны фотона, соответ-

ствующего переходу атома ртути в нормальное состояние.
$\lambda = \dfrac{ch}{eU} = 533$ нм.

20.25. На рисунке изображена установка для наблюдения дифракции рентгеновских лучей. При вращении кристалла C только тот луч будет отражаться на фотографическую пластинку B, длина волны которого удовлетворяет уравнению Вульфа — Брэгга. При каком наименьшем угле φ между плоскостью кристалла и пучком рентгеновских лучей были отражены рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм? Постоянная решетки кристалла $d = 303$ пм.

Решение:
Наименьший угол соответствует спектру первого порядка, т. е. $\lambda = 2d\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{2d} = 0{,}033$; $\varphi \approx 2^\circ$.

20.26. Найти постоянную решетки d каменной соли, зная молярную массу $\mu = 0{,}058$ кг/моль каменной соли и ее плотность $\rho = 2{,}2\cdot10^3$ кг/м^3. Кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой.

Решение:
Молярный объем каменной соли $V = \dfrac{\mu}{\rho}$. Количество ионов в молярном объеме равно $2N_A$. Объем, приходящийся на один ион, $V_1 = \dfrac{\mu}{2\rho N_A}$, отсюда расстояние между ионами, или постоянная решетки, $d = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\dfrac{\mu}{2\rho N_A}} = 281\cdot10^{-12}$ м.

20.27. При экспериментальном определении постоянной Планка h при помощи рентгеновских лучей кристалл устанвливается под некоторым углом φ, а разность потенциалов U, приложенная к электродам рентгеновской трубки, увеличивается до тех пор, пока не появится линия, соответствующая этому углу. Найти постоянную Планка h из следующих данных: кристалл каменной соли установлен под углом $\varphi = 14°$; разность потенциалов, при которой впервые появилась линия, соответствующая этому углу, $U = 9{,}1$ кВ; постоянная решетки кристалла $d = 281$ пм.

Решение:

При увеличении разности потенциалов U, приложенной к электродам рентгеновской трубки, появляется спектральная линия в спектре первого порядка, длина волны которой λ удовлетворяет уравнению $eU = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ — (1). Но по формуле Вульфа — Брэгга $\lambda = 2d\sin\varphi$ — (2). Из (1) и (2) находим $h = \dfrac{eU\lambda}{c} = \dfrac{eU \cdot 2d}{c}\sin\varphi = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20.28. К электродам рентгеновской трубки приложена разность потенциалов $U = 60$ кВ. Наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, $\lambda = 20{,}6$ пм. Найти из этих данных постоянную h Планка.

Решение:

Частота $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_{min}}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра, где λ_{min} — наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, может быть найдена из соотношения $h\nu_0 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\dfrac{hc}{\lambda_{min}} = eU$, откуда постоянная Планка $h = \dfrac{eU\lambda_{min}}{c} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20.29. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра для случаев, когда к рентгеновской трубке приложена разность потенциалов U, равная: 30, 40, 50 кВ.

Решение:

Частота $\nu_{\text{г}} = \dfrac{c}{\lambda}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра (см. задачу 20.28), может быть найдена из соотношения $h\nu_{\text{г}} = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\dfrac{hc}{\lambda} = eU$, откуда длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$. Если $U_1 = 30$ кВ, то $\lambda_1 = 43{,}1$ пм. Если $U_2 = 40$ кВ, то $\lambda_2 = 31$ пм. Если $U_3 = 50$ кВ, то $\lambda_3 = 24{,}8$ пм.

20.30. Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на $\Delta U = 23$ кВ увеличивает искомую длину волны в 2 раза.

Решение:

Длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра (см. задачу 20.29), равна $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$ — (1). По условию $2\lambda = \dfrac{hc}{e(U - \Delta U)}$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\dfrac{U}{U - \Delta U} = 2$, откуда $U = 2\Delta U$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $\lambda = \dfrac{hc}{2e\Delta U} = 27$ пм.

20.31. Длина волны гамма-излучения радия $\lambda = 1{,}6$ пм. Какую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить рентгеновские лучи с этой длиной волны?

Решение:

Длина волны гамма-излучения радия (см. задачу 20.29) равна $\lambda = \dfrac{hc}{eU}$. Отсюда разность потенциалов, которую необходимо приложить к рентгеновской трубке. $U = \dfrac{hc}{e\lambda} = 775$ кВ.

20.32. Какую наименьшую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K-серии, если в качестве материала антикатода взять: а) медь; б) серебро; в) вольфрам; г) платину?

Решение:

Все линии K-серии (а также линии остальных серий) появятся одновременно, как только будет удален электрон с K-орбиты атома. Для этого надо приложить разность потенциалов U, удовлетворяющую соотношению $eU = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, где λ — длина волны, соответствующая переходу бесконечно удаленного электрона на K-орбиту, т. е. длина волны, определяющая границу K-серии. Для нашего случая длина волны λ равна (см. таблицу 19): а) 138пм; б) 48,4пм; в) 17,8пм; г) 15,8пм. Искомая разность потенциалов найдется по формуле $U = \dfrac{hc}{e\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим следующие значения для разности потенциалов U: а) 9 кВ; б) 25,3 кВ; в) 69 кВ; г) 79 кВ.

20.33. Считая, что формула Мозли с достаточной степенью точности дает связь между длиной волны λ характеристических рентгеновских лучей и порядковым номером элемента Z, из которого сделан антикатод, найти наибольшую длину волны линий K-серии рентгеновских лучей, даваемых трубкой с антикатодом из: а) железа; б) меди; в) молибдена; г) серебра; д) тантала; е) вольфрама; ж) платины. Для K-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Имеем $\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Наибольшая длина волны K-серии соответствует линии K_α. При этом в формуле (1) мы должны положить $b = 1$, $k = 1$, $n = 2$. Решая уравнение (1) относительно λ и подставляя числовые данные, получим значения λ, равные: а) 194пм; б) 155пм; в) 72пм; г) 57,4пм; д) 23,4пм; е) 22,8пм; ж) 20,5пм. Экспериментально найденные значения длин волн λ линии K_α следующие: а) 194пм; б) 154пм; в) 71,2пм; г) 56,3пм; д) 22пм; е) 21,4пм; ж) 19пм.

20.34. Найти постоянную экранирования b для L-серии рентгеновских лучей, если известно, что при переходе электрона в атоме вольфрама с M- на L-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 143$ пм.

Решение:

Переход электрона с M- на L-слой соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3$. Порядковый номер вольфрама в таблице Менделеева $Z = 74$. Из формулы Мозли найдем $b = Z - \frac{1}{\sqrt{\lambda R(1/k^2 - 1/n^2)}}$. Подставляя числовые данные, получим $b = 5{,}5$.

20.35. При переходе электрона в атоме с L- на K-слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 78{,}8$ пм. Какой это атом? Для K-серии постоянная экранирования $b = 1$.

Решение:

Длина волны рентгеновских характеристических лучей может быть найдена по формуле Мозли $\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \times \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1), где Z — порядковый номер элемента, b — постоянная экранирования. При этом для K-серии $k = 1$ и $n = 2$. Из формулы (1) находим $Z = \frac{kn}{\sqrt{\lambda R(n^2 - k^2)}} + b = 40$. По таблице Менделеева находим, что элемент с порядковым номером $Z = 40$ — цирконий.

20.36. Воздух в некотором объеме V облучается рентгеновскими лучами. Экспозиционная доза излучения $D_э = 4{,}5$ Р. Какая доля атомов, находящихся в данном обьеме, будет ионизирована этим излучением?

Решение:

По определению экспозиционной дозы излучения $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (1), где $\Delta Q = N_i e$ — (2) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов, $\Delta m = \frac{N}{N_A}\mu$ — (3) — масса воздуха. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $D_э = \frac{N_i N_A e}{N\mu}$, откуда доля атомов, ионизированных излучением, $\frac{N_i}{N} = \frac{\mu D_э}{N_A e}$. Воздух в первом приближении можно считать азотом с молярной массой $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $\frac{N_0}{N} = 3{,}42 \cdot 10^{-10}$.

20.37. Рентгеновская трубка создает на некотором расстоянии мощность экспозиционной дозы $P_э = 2{,}58 \cdot 10^{-5}$ А/кг. Какое число N пар ионов в единицу времени создает эта трубка на единицу массы воздуха при данном расстоянии?

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза, Δm — масса ионизированного вещества, $\Delta Q = Ne$ — (3) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $P_э = \frac{Ne}{\Delta t \Delta m}$, откуда число пар ионов $N = \frac{P_э \Delta t \Delta m}{e}$. По условию $\Delta t = 1$ с и $\Delta m = 1$ кг, тогда, подставляя значения, находим $N = 1{,}61 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$·кг$^{-1}$.

20.38. Воздух, находящийся при нормальных условиях в ионизационной камере объемом $V = 6$ см^3, облучается рентгеновскими лучами. Мощность экспозиционной дозы рентгеновских лучей $P_э = 0{,}48$ мР/ч. Найти ионизационный ток насыщения $I_н$.

Решение:

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза. Подставляя (2) в (1), получаем $P_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m \Delta t}$ — (3). Ионизационный ток насыщения $I_н = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, откуда суммарный электрический заряд всех ионов одного знака $\Delta Q = I_н \Delta t$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $P_э = \frac{I_н}{\Delta m}$, откуда ионизационный ток насыщения $I_н = P_э \Delta m$ — (5). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{\Delta m}{\mu} RT$, учитывая, что молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, получаем $\Delta m = \frac{pV\mu}{RT}$ — (6). Подставляя (6) в (5), окончательно находим $I_н = \frac{P_э pV\mu}{RT}$ или $I_н = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 10^{-12}$ А*.

20.39. Найти для алюминия толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для рентгеновских лучей некоторой длины волны. Массовый коэффициент поглощения алюминия для этой длины волны $\mu_м = 5{,}3$ м^2/кг.

Решение:

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной x, определяется формулой $I = I_0 e^{-\mu x}$ — (1), где I_0 — интенсивность пучка, падающего на пластинку, μ — линейный коэффициент поглощения. Массовый коэффициент поглощения $\mu_м$ связан с линейным коэффициентом поглощения μ соотношением $\mu_м = \frac{\mu}{\rho}$, откуда $\mu = \mu_м \rho$ — (2). Подставляя (2) в (1), полу-

* Ответ не совпадает с ответом первоисточника ($2{,}7 \cdot 10^{-16}$ А).

чаем $I = I_0 e^{-\mu_м \rho x}$ — (3). Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1/2}$, рентгеновские лучи будут иметь интенсивность $I = \frac{I_0}{2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{1}{2} = exp(-\mu_м \rho x_{1/2})$ — (5). Прологарифмировав выражение (5), получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления. $x_{1/2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 0{,}5$ мм.

20.40. Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 20$ пм при прохождении слоя железа толщиной $d = 0{,}15$ мм? Массовый коэффициент поглощения железа для этой длины волны $\mu_м = 1{,}1$ м^2/кг.

Решение:
Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\frac{I_0}{I} = exp(\mu_м \rho d) = 3{,}68$.

20.41. Найти толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для железа в условиях предыдущей задачи.

Решение:
Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 79{,}76$ мкм.

20.42. В нижеследующей таблице приведены для некоторых материалов значения толщины слоя $x_{1/2}$ половинного ослабления рентгеновских лучей, энергия которых $W = 1$ МэВ. Найти линейный μ и массовый $\mu_м$ коэффициенты поглощения этих материалов для данной энергии рентгеновских лучей. Для какой длины волны λ рентгеновских лучей получены эти данные?

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10.2	4.5	1.56	0.87

Решение:

Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho}$, откуда массовый коэффициент поглощения $\mu_м = \frac{ln 2}{x_{1/2}\rho}$ — (1). С другой стороны, $\mu_м = \frac{\mu}{\rho}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\mu = \frac{ln 2}{x_{1/2}}$ — (3). Подставляя числовые данные в формулы (1) и (3), заполняем таблицу.

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10.2	4.5	1.56	0.87
ρ, кг/м^3	1000	2600	7900	11300
μ, м$^{-1}$	6.7	16	44	77
$\mu_м$, 10^{-3} м^2/кг	6.7	6.2	5.6	6.8

Энергия рентгеновских лучей равна $W = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, откуда длина волны $\lambda = \frac{hc}{W} = 1.24$ пм.

20.43. Сколько слоев половинного ослабления необходимо для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз?

Решение:

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\frac{I_0}{I} = exp(\mu_м \rho d)$ — (1). По условию $\frac{I_0}{I} = 80$ — (2). Подставляя (2) в (1) и логарифмируя полученное уравнение, находим $ln80 = \mu_м \rho d$, откуда толщина слоя, необходимого для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз, равна $d = \frac{ln80}{\mu_м \rho}$ — (3). Толщина слоя половинного ослабления интенсивности рентгеновских лучей равна $x_{1/2} = \frac{ln2}{\mu_м \rho}$ — (4). Количество слоев, необходимое для уменьшения интенсивности в 80 раз, равно $n = \frac{d}{x_{1/2}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $n = \frac{ln80}{ln2} = 6{,}32$.