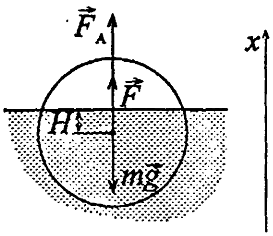
2.130. Шар диаметром $D = 30$ см плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы погрузить шар в воду на $H = 5$ см глубже? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:



Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой Архимеда $\vec{F_A}$, т.е. $mg = F_A$. Масса шара $m = V_ш \rho = \frac{3}{4}\pi R^3 \rho$; сила Архимеда $F_A = \rho_в V_0 g$. Тогда $\frac{3}{4}\pi R^3 \rho g = \rho_в V_0 g$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2}V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. Если теперь погрузить шар в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на шар, и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет $F_x = F'_A - mg$. Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 V g$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $R + x$. Тогда $F = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g(V - V_0)$. $V - V_0 = V_x$ — объем шарового слоя высотой x. $V_x = \frac{\pi(R+x)^2}{3} \times$ $\times(3R - (R+x)) - \frac{2}{3}\pi R^3$; $\quad V_x = \frac{\pi}{3}\left((R+x)^2(2R-x) - 2R^3\right)$;

$V_x = \frac{\pi}{3}\left(3R^2 x - x^3\right)$. Работа, затрачиваемая при погружении шара на $H = 5$ см глубже: $A = \int\limits_0^H F dx$; $A = \frac{\pi\rho_0 g}{3} \times$

$$\times \int\limits_0^H \left(3R^2 x - x^3\right) dx; \; A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left(3R^2 \frac{H^2}{2} - \frac{H^4}{4}\right); \; A = 0{,}84 \text{ Дж}.$$

2.131. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1\,\text{м}^2$ и высотой $h = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

Решение:

Обозначим ρ — плотность льда, ρ_0 — плотность воды. При свободном плавании на льдину действуют две силы, уравновешивающие друг друга: сила тяжести и сила Архимеда (рис.1), т.е. $mg = F_A$ — (1). Найдем

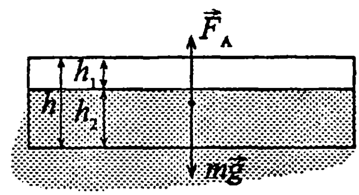


Рис. 1

высоту h_2 той части льдины, которая находится в воде при свободном плавании. Т. к. $m = \rho V = \rho S h$, а $F_A = \rho_0 V_0 g = \rho_0 S h_2 g$, то, подставив эти выражения в (1), получим: $h_2 = \frac{\rho h}{\rho_0} = 0{,}36$ м — (2). Если теперь погрузить льдину в воду на глубину x (рис.2), то сила Архимеда превысит силу тяжести и результирующей силой будет выталкивающая сила $F = F'_A - mg$. Против нее и надо совершать работу. $F'_A = \rho_0 g S(h_2 + x)$, тогда $F = \rho_0 g S(h_2 + x) - \rho S h g$; преобразовав выражение с учетом (2), получим $F = Sg\left(\rho_0\left(\frac{\rho h}{\rho_0} + x\right) - \rho h\right) = Sg\rho_0 x$.

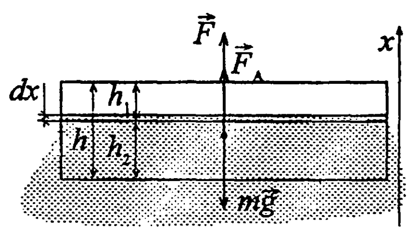


Рис. 2

Работа, совершаемая при погружении льдины на глубину x: будет равна $A=\int_0^{h_1} Fdx$; $A=Sg\rho_0\int_0^{h_1} xdx=Sg\rho_0\frac{h_1^2}{2}$; $h_1=h-h_2=h-\frac{\rho h}{\rho_0}=\frac{h(\rho_0-\rho)}{\rho_0}$, в результате получим: $A=Sg\rho_0\frac{h^2(\rho_0-\rho)^2}{2\rho_0^2}=\frac{Sgh^2(\rho_0-\rho)^2}{2\rho_0}$; $A=7{,}84$ Дж.

2.132. Найти силу гравитационного взаимодействия F между двумя протонами, находящимися на расстоянии $r=10^{-16}$ м друг от друга. Масса протона $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

Решение:

Сила гравитационного взаимодействия выражается формулой $F=G\frac{m^2}{r^2}$. Подставляя числовые данные, получим $F=1{,}86\cdot10^{-44}$ Н.

2.133. Два медных шарика с диаметрами $D_1=4$ см и $D_2=6$ см находятся в соприкосновении друг с другом. Найти гравитационную потенциальную энергию $W_п$ этой системы.

Решение:

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия: $W_п=-G\frac{m_1m_2}{r}$ — (1), где r — расстояние между центрами масс шаров. Знак «–» говорит о том, что при сближении тел потенциальная энергия убывает, а при $R=\infty$ потенциальная энергия равна нулю. $r=\frac{D_1}{2}+\frac{D_2}{2}=\frac{D_1+D_2}{2}$;

$m_1 = v_1\rho$; $m_2 = v_2\rho$. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $m_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3\rho$; $m_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^3\rho$. Подставив полученные выражения в уравнение (1), получим: $W_п = -G\frac{2\cdot 16\pi^2(D_1/2)^3(D_2/2)^3\cdot\rho^2}{9(D_1+D_2)}$. Учитывая, что плотность меди $\rho = 8{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3, найдем: $W_п = -3{,}8\cdot 10^{-10}$ Дж.

2.134. Вычислить гравитационную постоянную G, зная радиус земного шара R, среднюю плотность земли ρ и ускорение свободного падения g у поверхности Земли (см. табл. 4 и 5).

Решение:

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Взяв из таблицы 5 значения R, ρ, g и зная что $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$, выразим $G = \frac{gR^2\cdot 3}{4\pi R^3\rho} = \frac{3g}{4\pi R\rho}$; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2.135. Принимая ускорение свободного падения у Земли $g = 9{,}8$ м/с^2 и пользуясь данными табл. 5, составить таблицу значений средних плотностей планет Солнечной системы.

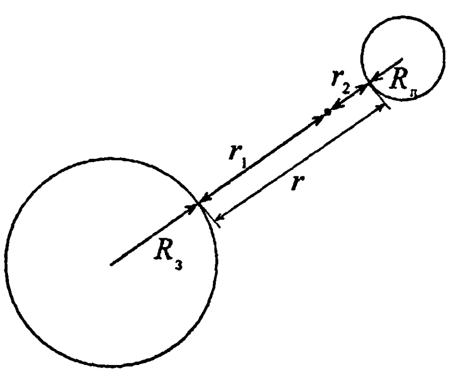
Решение:

В задаче 2.134 мы получили формулу для вычисления гравитационной постоянной $G = 3g / 4\pi R\rho$. Изменив значения g, R и ρ (g', R' и ρ'), получим то же значение гравитационной постоянной $G = 3g' / 4\pi R'\rho'$. Приравняв правые части уравнений, выразим среднюю плотность планеты: $\frac{3g}{4\pi R\rho} = \frac{3g'}{4\pi R'\rho'}$; $\frac{g}{R\rho} = \frac{g'}{R'\rho'}$; $\rho' = \frac{R\rho g'}{gR'}$. Используя данные таблиц 4 и 5 и полученную формулу, составим таблицу:

Планета	ρ, 10^3 кг/м^3	Планета	ρ, 10^3 кг/м^3
Меркурий	5,50	Юпитер	1,32
Венера	4,80	Сатурн	0,71
Земля	5,50	Уран	1,26
Марс	3,90	Нептун	1,6

2.136. Космическая ракета летит на Луну. В какой точке прямой, соединяющей центры масс Луны и Земли, ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой?

Решение:



Введем следующие обозначения: m — масса ракеты, $M_З$ — масса Земли, $M_Л$ — масса Луны, $R_З$ — радиус Земли, $R_Л$ — радиус Луны, r_1 — расстояние от поверхности Земли до искомой точки и r_2 — расстояние от поверхности Луны до искомой точки. Сила притяжения между ракетой и Землей: $F_1 = G\frac{mM_З}{(r_1 + R_З)^2}$. Сила притяжения между ракетой и Луной: $F_2 = G\dfrac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$.

Ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой, когда $F_1 = F_2$, т.е. $G\dfrac{mM_З}{(r_1 + R_З)^2} = G\dfrac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$;

$\dfrac{M_З}{(r_1 + R_З)^2} = \dfrac{M_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$ — (1). $r_1 + r_2 = r$ — расстояние от Земли до Луны, $r_2 = r - r_1$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим: $\dfrac{\sqrt{M_З}}{r_1 + R_З} = \dfrac{\sqrt{M_Л}}{r - r_1 + R}$, откуда

$$r_1 + R_З = \sqrt{\frac{M_З}{M}}(r - r_1 + R_Л);$$

$r_1\left(1 + \sqrt{\dfrac{M_З}{M_Л}}\right) = \sqrt{\dfrac{M_З}{M_Л}}(r + R_Л) - R_З$ — (2); $1 + \sqrt{\dfrac{M_З}{M_Л}} =$

$= \dfrac{\sqrt{M_Л} + \sqrt{M_З}}{\sqrt{M_Л}}$ — (3). Выразим r_1 из (2) с учетом (3):

$r_1 = \dfrac{\sqrt{M_З}(r + R_Л) - \sqrt{M_Л} \cdot R_З}{\sqrt{M_Л} + \sqrt{M_З}}$. Подставляя табличные величины, получим: $r_1 = 3{,}43 \cdot 10^5$ км.

2.137. Сравнить ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л$ с ускорением свободного падения у поверхности Земли $g_З$.

Решение:

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P = G\dfrac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли,

R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Тогда ускорение свободного падения у поверхности Земли: $g_З = G\frac{M_З}{R_З^2}$, где $M_З$ и $R_З$ — масса и радиус Земли. Ускорение свободного падения у поверхности Луны: $g_Л = G\frac{M_Л}{R_Л^2}$, где $M_Л$ и $R_Л$ — масса и радиус Луны. Отсюда $\frac{g_Л}{g_З} = \frac{M_Л R_З^2}{R_Л^2 M_З}$; $g_Л = 0{,}165 g_З$.

2.138. Как изменится период колебания T математического маятника при перенесении его с Земли на Луну? Указание: формула для периода колебания математического маятника приведена в §12.

Решение:

Период колебания математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

На Земле $T_З = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_З}}$; на Луне $T_Л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Отношение $\frac{T_Л}{T_З} = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}}$; значение $\frac{g_Л}{g_З} = 0{,}165$ было найдено в задаче 2.137. Тогда $\frac{T_Л}{T_З} = 2{,}46$; $T_Л = 2{,}46 \cdot T_З$, т.е. при перенесении математического маятника с Земли на Луну период его колебаний увеличится в 2,46 раза.

2.139. Найти первую космическую скорость v_1, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно начало двигаться по круговой орбите в качестве ее спутника.

Решение:

Сила гравитационного взаимодействия между телом и Землей $F = \frac{GmM}{r^2}$, где m — масса тела, M — масса Земли и r — расстояние между ними. У поверхности Земли r равно радиусу Земли R и $F = mg$. Тогда $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$. При движении тела вокруг Земли по круговой орбите сила гравитационного взаимодействия является центростремительной силой. Таким образом, $F = \frac{mv_1^2}{R}$; отсюда первая космическая скорость $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = 7{,}9$ км/с.

2.140. Найти вторую космическую скорость v_2, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное тяготение и навсегда удалилось от Земли.

Решение:

Для того чтобы тело удалилось от Земли, необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была достаточна для преодоления гравитационной потенциальной энергии, т.е. $\frac{mv^2}{2} \ge \frac{GmM}{R}$. У поверхности Земли $\frac{GM}{R^2} = g$, т.к. $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$; поэтому $\frac{mv_2^2}{2} \ge mgR$, откуда вторая космическая скорость $v_2 \ge \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с.

2.141. Принимая ускорение свободного падения у Земли равным $g = 9{,}80$ м/с^2 и пользуясь данными табл. 5, составить таблицу значений первой и второй космических скоростей у поверхности планет Солнечной системы.

Решение:

В двух предыдущих задачах были выведены формулы для нахождения первой и второй космических скоростей: $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$, где R — радиус планеты, g — ускорение свободного падения вблизи поверхности. Причем $g = kg_3$, коэффициенты k, как и радиусы планет, приведены в таблице 4 приложения. Исходя из этого, составляем таблицу:

Планета	v_1, км/с	v_2, км/с	Планета	v_1, км/с	v_2, км/с
Меркурий	3,0	4,25	Юпитер	42,6	60,4
Венера	7,2	10,2	Сатурн	25,7	36,4
Земля	7,9	11,2	Уран	15,2	21,5
Марс	3,57	5,05	Нептун	16,6	23,5

2.142. Найти линейную скорость v движения Земли по круговой орбите.

Решение:

Линейная скорость движения по окружности $v = \omega R$, где ω — частота вращения, R — расстояние до Солнца. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения Земли вокруг Солнца. Отсюда $v = \frac{2\pi R}{T}$, $v = 30$ км/с.

2.143. С какой линейной скоростью v будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 200$ км и $h = 7000$ км от поверхности Земли? Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях.

Решение:

а) Сила притяжения Земли создает центростремительное ускорение спутника, равное $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус орбиты, а v — скорость спутника. Если орбита проходит вблизи поверхности Земли, то спутник, как и любое другое тело у поверхности Земли, будет иметь ускорение, направленное к центру Земли $g = \frac{v_1^2}{R_З}$, где $R_З$ — радиус Земли. Отсюда скорость спутника вблизи Земли: $v_1 = \sqrt{gR_З}$; $v = 7{,}91$ м/с. При движении по круговой орбите радиуса $R < R_З$ ускорение свободного падения убывает в отношении, обратном отношению квадратов расстояний от центра. Ускорение g_R на расстоянии R от центра Земли найдем по формуле: $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2}$. Тогда скорость движения спутника по круговой орбите радиуса R найдется из уравнения $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$, откуда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{R}}$; $R = h + R_З$, отсюда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{(R_З + h)}}$ — (1). При $h = 200$ км $v_2 = 7{,}79$ км/с. При $h = 7000$ км $v_3 = 5{,}46$ км/с. Период обращения спутника $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{v}{R}$, отсюда $T = \frac{2\pi R}{v}$ — (2). $T_1 = \frac{2\pi R_З}{v_1}$; $T_1 = 1$ ч 25 мин; $T_2 = \frac{2\pi(R_З + h_1)}{v_2}$ — (3); $T_2 = 1$ ч 28 мин; $T_3 = \frac{2\pi(R_З + h_2)}{v_3}$; $T_3 = 4$ ч 16 мин.

2.144. Найти зависимость периода обращения T искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите у поверхности центрального тела, от средней плотности этого тела. По данным, полученным при решении задачи 2.135, составить таблицу значений периодов обращений искусственных спутников вокруг планет Солнечной системы.

Решение:

Вблизи поверхности планеты спутник ведет себя так же, как и любое тело, на которое не действуют никакие силы, кроме сил гравитации. Свяжем ускорение свободного падения со средней плотностью планеты. В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности планеты, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса планеты, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Зная, что $M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, выразим $g = \frac{4}{3}G\pi R\rho$ — (1). Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи для периода обращения спутника вблизи поверхности планеты: $T = 2\pi R / v$ — (2). Ускорение $g = v^2 / R$, откуда $v = \sqrt{gR}$. Подставим эту формулу в (2). $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{gR}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{4G\pi R\rho R / 3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. Взяв из таблицы, приведенной в задаче 2.135, значения средних плотностей планет ρ, вычислим значения периода обращения спутника и заполним таблицу:

Планета	T, ч	Планета	T, ч
Меркурий	1,41	Юпитер	2,86
Венера	1,50	Сатурн	3,90
Земля	1,41	Уран	2,94
Марс	1,66	Нептун	2,61

2.145. Найти центростремительное ускорение $a_н$, с которым движется по круговой орбите искусственный спутник Земли, находящийся на высоте $h = 200$ км от поверхности Земли.

Решение:

В задаче 2.143 была получена формула для вычисления линейной скорости искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте h от ее поверхности: $v=\sqrt{g\frac{R_З^2}{R}}$ — (1), где $R_З$ — радиус Земли, R — расстояние от спутника до центра Земли, т.е. $R = R_З + h$. Центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ или, с учетом уравнения (1), $a_n = \frac{gR_З^2}{R^2} = \frac{gR_З^2}{(R_З+h)^2}$; $a_n = 9{,}2$ м/с^2.

2.146. Планета Марс имеет два спутника — Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r = 0{,}95\cdot10^4$ км от центра масс Марса, второй на расстоянии $r = 2{,}4\cdot10^4$ км. Найти период обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $T=\frac{2\pi(R_М+r)}{v}$ — (3), где $R_М$ — радиус Марса, v — линейная скорость спутника; $v=\sqrt{g\frac{R_М^2}{R_М+r}}$ — (1).

Подставив (1) в (3), получим $T=\frac{2\pi(R_М+r)\sqrt{(R_М+r)}}{\sqrt{gR_М^2}}$;

$T=\frac{2\pi(R_М+r)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1=\frac{2\pi(R_М+r_1)}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1 = 7{,}8$ ч. Для периода обращения второго спутника, рассуждая аналогично, получим $T_2 = 31{,}2$ ч.

2.147. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. На какой высоте h от поверхности Земли должен находиться этот спутник, чтобы он был неподвижен по отношению к наблюдателю, который находится на Земле?

Решение:

Для того чтобы спутник был неподвижен относительно наблюдателя на Земле, необходимо, чтобы его период обращения был равен периоду обращения Земли, т. е. 24 часам. Воспользуемся уравнениями (1) и (3), полученными в задаче 2.143: $v=\sqrt{g\frac{R_3}{(R_3+h)}}$; $T=\frac{2\pi(R_3+h)}{v}$, откуда $T=\frac{2\pi(R_3+h)\sqrt{R_3+h}}{\sqrt{gR_3^2}}$ — (1). Выразим из (1) h:

$$T^2=\frac{4\pi^2(R_3+h)^3}{gR_3^2}; \quad R_3+h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}}; \quad h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}}-R_3.$$

Подставив числовые значения, получим: $h=6{,}38\cdot10^6=$ $=35890$ км.

2.148. Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите на высоте $h=20$ км от поверхности Луны. Найти линейную скорость v движения этого спутника, а также период его обращения T вокруг Луны.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $v=\sqrt{g\frac{R^2}{R+r}}$, $T=\frac{2\pi(R+r)}{v}$, где R — радиус Луны, см. таблицу 5 приложения; $g=0{,}165g_3$ (из задачи 2.137). Подставляя числовые данные, получим $v=1{,}7$ км/с и $T=1$ ч 50 мин.

2.149. Найти первую и вторую космические скорости для Луны (см. условия 2.139 и 2.140).

Решение:

В задачах 2.139 и 2.140 были выведены уравнения для нахождения первой и второй космических скоростей для Земли. $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$. Подставив в них радиус Луны (таблица 5) и учитывая, что ускорение свободного падения на Луне связано с земным соотношением $g_Л = 0{,}165 g_З$, найдем искомые значения скоростей: $v_1 = \sqrt{0{,}165 g_З \cdot R_Л}$; $v_1 = 1{,}7$ км/с и $v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}165 g_З \cdot R_Л}$; $v_2 = 2{,}4$ км/с.

2.150. Найти зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли. На какой высоте h ускорение свободного падения g_h составит 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли.

Решение:

У поверхности Земли имеем $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$ — (1), где R — радиус Земли. На высоте h от поверхности Земли $mg_h = \frac{GmM}{(R+h)^2}$ — (2). Из уравнений (1) и (2) получим $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$ — (3). Уравнение (3) дает зависимость $\frac{g_h}{g}$ от высоты h. Обозначим $\frac{g_h}{g} = n$; тогда из (3) имеем уравнение $h^2 + 2Rh + \left(R^2 - \frac{R^2}{n}\right) = 0$. Решая это уравнение, находим $h = -R \pm \frac{R}{\sqrt{n}}$. Т. к. h должно быть больше нуля, то надо взять решение со знаком плюс, т.е. $g_h = 0{,}25g$ на высоте, равной радиусу Земли.

2.151. На какой высоте h от поверхности Земли ускорение свободного падения $g_h = 1$ м/с^2?

Решение:

В предыдущей задаче получена зависимость отношения $\frac{g_h}{g}$ от высоты h. $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$, где R — радиус Земли.

Выразим отсюда h: $(R+h)^2 = \frac{gR^2}{g_h}$; $h = R\sqrt{\frac{g}{g_h}} - R$.

Подставив числовые значения, получим $h = 13590$ км.

2.152. Во сколько раз кинетическая энергия $W_к$ искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии $W_п$?

Решение:

Запишем выражения для $W_к$ и $W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — (1); $W_п = -G\frac{mM}{r}$ — (2). Здесь v — линейная скорость спутника; m — масса спутника; M — масса Земли; r — радиус орбиты спутника. Воспользуемся уравнением (1) из задачи 2.143: $v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$ — (3), где R — радиус Земли, а $R + h = r$ — (4). Подставив (3) в (1), с учетом (4) получим $W_к = \frac{mgR^2}{2r}$. Взяв $W_п$ по модулю, найдем отношение энергий $\frac{W_п}{W_к}=\frac{GmM2r}{rmgR^2}=\frac{2GM}{gR^2}$. Подставим числовые данные $\frac{W_п}{W_к}\approx 2$.

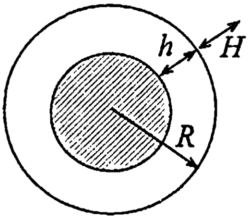
2.153. Найти изменение ускорения свободного падения при опускании тела на глубину h. На какой глубине ускорение свободного падения g_h составляет 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли? Плотность Земли считать постоянной. Указание: учесть, что тело, находящееся на глубине h над поверхностью Земли, не испытывает со стороны вышележащего слоя толщиной h никакого притяжения, так как притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются.

Решение:

Пусть m — масса тела, находящегося на расстоянии h от поверхности Земли и на расстоянии r от ее центра масс. Учитывая указание, данное в условии задачи, можем написать: $F_h=mg_h=GmM_r/r^2$ — (1), где M_r — масса шара радиусом r и с плотностью, равной плотности Земли ρ. Так как $M_r=\frac{4\pi r^3\rho}{3}$, то $mg_h=\frac{4Gm\pi R\rho}{3}$. У поверхности Земли $F=mg=\frac{GmM}{R^2}=\frac{4Gm\pi R\rho}{3}$ — (2). Из (1) и (2) получим $\frac{g_h}{g}=\frac{r}{R}=\frac{(R-h)}{R}$ — (3). Обозначим $\frac{g_h}{g}=n$, тогда из (3) имеем $h=R(1-n)$. Если $n=0{,}25$, то $h=0{,}75R$.

2.154. Каково соотношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если период колебания маятника на вершине горы и на дне шахты один и тот же. Указание: формула для периода колебания математического маятника приведена в § 12.

Решение:



Период колебания математического маятника $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Т.к. периоды колебаний равны, то равны и ускорения свободного падения $T_h=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_h}}$ и $T_H=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_H}}$, отсюда $g_h=h_H$. Сила тяжести $F=mg$, с другой стороны, по закону всемирного тяготения $F=G\dfrac{mM}{r^2}$. Приравняем правые части уравнений: $mg=G\dfrac{mM}{r^2}$, отсюда $g=\dfrac{GM}{r^2}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Тело, находящееся на глубине h под землей, не испытывает со стороны вышележащего шарового слоя толщиной h никакого притяжения, т.к. притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются. Масса заштрихованной части Земли: $M_1=\rho V_1$; $V_1=\dfrac{4}{3}\pi r_1^3$; $r_1=R-h$. Тогда $g_h=\dfrac{GM_1}{r_1^2}=$ $=G\dfrac{4\pi(R-h)^3\rho}{3(R-h)^2}$ — (1). Отдельно преобразуем выражения, входящие в уравнение (1): $(R-h)^3=$ $=\left(R^3-3R^2h+3Rh^2-h^3\right)$; $(R-h)^3=R^3\left(1-3\dfrac{h}{R}+3\dfrac{h^2}{R^2}-\dfrac{h^3}{R^3}\right)$;

Поскольку $h<<R$, то $(R-h)^3\approx R^3\left(1-3\dfrac{h}{R^3}\right)$. Аналогично $(R-h)^2=\left(R^2-2Rh+h^2\right)$, откуда $(R-h)^2\approx R^2\left(1-\dfrac{2h}{R}\right)$.

Тогда из (1) $g_h = G\dfrac{3\pi R(1-3h/R)\rho}{4(1-2h/R)}$ — (2). На высоте H имеем $g_h = G\dfrac{M}{r_2^2}$, где $M = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$; $r_2 = R + H$, т.е.

$g_H = G\dfrac{4\pi R^3 \rho}{3(R+H)^2}$ — (3). Поскольку $H << R$, то

$(R+H)^2 = \left[R\left(1+\dfrac{H}{R}\right)\right]^2$; $(R+H)^2 = R^2\left(1+2\dfrac{H}{R}+\dfrac{H^2}{R^2}\right)$;

$(R+H)^2 \approx R^2\left(1+2\dfrac{H}{R}\right)$. Из (3) $g_H = G\dfrac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$ — (4).

Поскольку $g_h = g_H$, то, приравняв правые части (2) и (4), получим $G\dfrac{4\pi R(1-3h/R)\rho}{3(1-2h/R)} = G\dfrac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$, откуда

$\dfrac{1-3h/R}{1-2h/R} = \dfrac{1}{1+2H/R}$ — (5). Воспользуемся выражением для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{1}{1-q}$. При $q << 1$; $\dfrac{1}{1-q} = 1+q$;

$\dfrac{1}{1+q} = 1-q$. Тогда уравнение (5) можно записать в виде

$\left(1-3\dfrac{h}{R}\right)\left(1+\dfrac{2h}{R}\right) = 1-2\dfrac{H}{R}$ или $1-3\dfrac{h}{R}+\dfrac{2h}{R}-6\dfrac{h^2}{R^2} = 1-2\dfrac{H}{R}$.

Слагаемым $6\dfrac{h^2}{R^2}$, ввиду его малости, можно пренебречь.

Тогда $1-\dfrac{h}{R} = 1-\dfrac{2H}{R}$; отсюда $h = 2H$.

2.155. Найти период обращения T вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось R_1

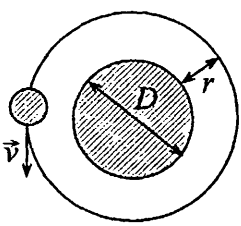
ее эллиптической орбиты превышает большую полуось R_2 земной орбиты на $\Delta R = 0{,}24 \cdot 10^8$ км.

Решение:

По третьему закону Кеплера $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{R_1^3}{R_2^3}$. Так как нас интересует период обращения планеты Солнечной системы, то целесообразно в качестве планеты с известными значениями T_2 и R_2 взять Землю. Для нашего случая $T_2 = 12$ мес, $R_2 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км. По условию $R_1 = 1{,}74 \cdot 10^8$ км. Тогда из (1) имеем $T_1 = T_2\sqrt{\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3} = 15$ мес; $T_1 = 450$ сут.

2.156. Орбита искусственной планеты близка к круговой. Найти линейную скорость v ее движения и период T ее обращения вокруг Солнца, считая известным диаметр Солнца D и его среднюю плотность ρ. Среднее расстояние планеты от Солнца $r = 1{,}71 \cdot 10^8$ км.

Решение:



По второму закону Ньютона сила тяготения $F_т = ma_n$. По закону всемирного тяготения $F_т = G\dfrac{mM}{(D/2+r)^2}$. Т. к. левые части уравнений равны, приравняем и правые части этих уравнений: $ma_n = G\dfrac{mM}{(D/2+r)^2}$, отсюда $a_n = \dfrac{GM}{(D/2+r)^2}$. Масса Солнца $M = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^3 \rho = \dfrac{1}{6}\pi D^3 \rho$, тогда $a_n = \dfrac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)^2}$.

С другой стороны центростремительное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R+r} = \frac{v^2}{D/2+r}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{v^2}{D/2+r} = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)^2};$$

$$v^2 = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)} = \frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R}; \; v = \sqrt{\frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R}}; \; v = 2{,}78 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

$$T = \frac{2\pi(D/2+r)}{v} = \frac{2\pi(D+2r)}{2v} = \frac{\pi(D+2r)}{v}; \; T = 450 \text{ суток.}$$

2.157. Большая полуось R_1 эллиптической орбиты первого в мире спутника Земли меньше большой полуоси R_2 орбиты второго спутника на $\Delta R = 800$ км. Период обращения вокруг Земли первого спутника в начале его движения был $T_1 = 96{,}2$ мин. Найти большую полуось R_2 орбиты второго искусственного спутника Земли и период T_2 его обращения вокруг Земли.

Решение:

Найдем большую полуось орбиты Луны $R_Л = < R > + R_З = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_1^2} = \frac{R_Л^3}{R_1^3}$; $R_1 = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}}$.

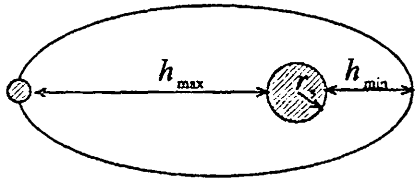
По условию $R_2 = R_1 + \Delta R = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}} + \Delta R$; $R_2 = 7{,}88 \cdot 10^3$ м.

Узнав радиус, можно еще раз применить третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_2^2} = \frac{R_Л^3}{R_2^3}$; $T_2^2 = \frac{T_Л^2 R_2^3}{R_Л^3}$, отсюда $T_2 = T_Л \sqrt{\frac{R_2^3}{R_Л^3}}$;

$T_2 = 6457{,}21$ сек $= 107{,}62$ мин.

2.158. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло $h_{min} = 183$ км, а максимальное удаление — $h_{max} = 244$ км. Найти период обращения T спутника вокруг Земли.

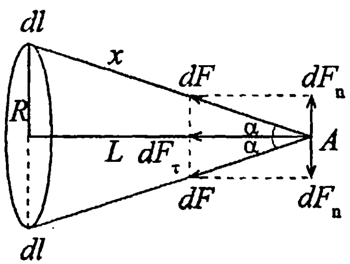
Решение:



Найдем большую полуось орбиты «Востока» $R = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} + R_3 = 6583{,}5$ км. Большая полуось орбиты Луны $R_Л = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера $\frac{T_Л^2}{T^2} = \frac{R_Л^3}{R^3}$, отсюда $T = T_Л\sqrt{\frac{R^3}{R_Л^3}}$; $T = 87{,}8$ мин.

2.159. Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии L от его центра.

Решение:

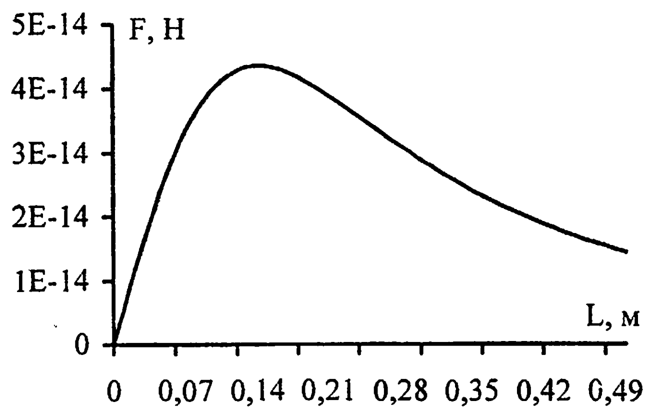


Возьмем элемент кольца dl. Сила гравитационного взаимодействия между элементом кольца dl и массой m, помещенной в точке A, будет $dF = G\frac{m\rho\pi r^2}{x^2}dl$. Сила dF направлена по линии x, соединяющей элемент кольца dl с массой m. Для нахождения силы гравитационного взаимодействия всего кольца и массы m надо векторно сложить все силы dF. Силу dF можно разложить на две составляющие dF_n и dF_τ. Составляющие dF_n двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $F = \int dF_\tau$. Но $dF_\tau = dF\cos\alpha = \frac{dFl}{x}$ и

$$F = \int \frac{L}{x} dF = G\frac{m\rho\pi r^2 L}{x^3}\int_0^{2\pi R} dl = G\frac{m\rho\pi r^2 L \cdot 2\pi R}{x^3}$$ — (1). Учитывая, что $x = \sqrt{R^2 + L^2}$, имеем $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$ — (2).

2.160. Имеется кольцо радиусом $R = 20$ см из медной проволоки. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой $m = 2$ г, находящуюся на оси кольца на расстоянии $L = 0$, 5, 10, 15, 20 и 50 см от его центра. Составить таблицу значений F и представить графически зависимость $F = f(L)$. На каком расстоянии L_{max} от центра кольца сила имеет максимальное значение F_{max} и каково это значение? Радиус проволоки $r = 1$ мм.

Решение:



Из формулы (2) задачи 2.159 видно, что если $L = 0$, то $F = 0$. Нетрудно убедиться, что функция F с увеличением L сначала растет, а затем убывает. Найдем максимум функции F. Выразим переменные величины x и L через угол α: $x = \frac{R}{\sin\alpha}$, $L = x\cos\alpha = \frac{R}{\sin\alpha}\cos\alpha$. Тогда формула (2) из предыдущей задачи примет следующий вид:

$F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2}{R} \cos\alpha \sin^2\alpha = B\cos\alpha \sin^2\alpha$. Для нахождения максимума функции F возьмем производную $\frac{dF}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dF}{d\alpha} = B\left(2\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$ или $tg^2\alpha = 2$. Тогда расстояние L, на котором сила максимальна, равно $L = \frac{R}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. На графике изображен характер зависимости $F = f(L)$; $L_{max} = 0{,}14$ м; $F_{max} = 4{,}35 \cdot 10^{-14}$ Н.

L, м	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5
F, 10^{-14} Н	0	2,58	4,04	4,34	3,99	1,44

2.161. Сила взаимодействия между кольцом и материальной точкой, находящейся на оси кольца, имеет максимальное значение F_{max}, когда точка находится на расстоянии L_{max} от центра кольца. Во сколько раз сила взаимодействия F между кольцом и материальной точкой, находящейся на расстоянии $L = 0{,}5L_{max}$ от центра кольца, меньше максимальной силы F_{max}?

Решение:

Используем формулу из задачи 1.159: $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ и выражение $F = F_{max}$ при $L_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ из задачи 1.60. По условию $L = 0{,}5L_{max}$, соответственно получим

$F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R \cdot R / 2\sqrt{2}}{\left(R^2 + R^2/8\right)^{\frac{3}{2}}}$. Произведя дальнейшие преобразования, получим $F=\dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3\cdot 1/2\sqrt{2}}$;

$F=\dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3\cdot 1/2\sqrt{2}}$; $F=\dfrac{16\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{27R^3}$. Тогда

$F_{max}=\dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R\cdot R/\sqrt{2}}{\left(R^2+R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $F_{max}=\dfrac{4\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{3\sqrt{3}R^3}$. Отсюда

выразим отношение сил: $\dfrac{F_{max}}{F}=\dfrac{4\pi^2 Gm\rho r^2}{3\sqrt{3}R}\cdot\dfrac{27R}{16\pi^2 Gm\rho r^2}$; *

---

* В ответе первоисточника, очевидно, допущена опечатка ($F_{max}/F=1/3$).