§ 2. Динамика

В задачах этого раздела используются данные таблиц 3 — 5 из приложения. Кроме того, следует учесть замечание к § 1.

2.1. Какой массы m_x балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления $F_{сопр}$ воздуха одной и той же при подъеме и спуске.

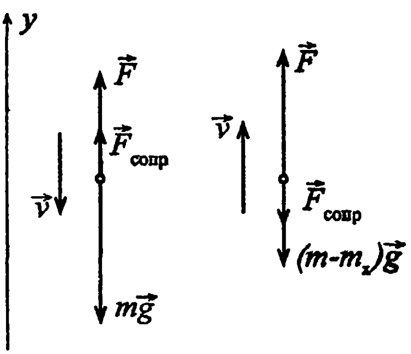
Решение:

По второму закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{сопр} + (m - m_x)\vec{g} = 0, \end{cases}$$

или в проекциях на ось y

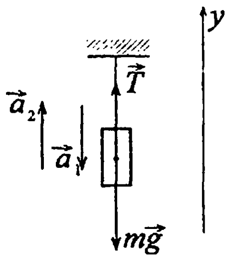
$$\begin{cases} F - mg + F_{сопр} = 0; \\ F - F_{сопр} - (m - m_x)g = 0. \end{cases}$$



Здесь первое уравнение описывает опускающийся аэростат, второе — поднимающийся. Раскрыв скобки и сложив первое уравнение со вторым, получим $m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 2\left(m - \frac{F}{g}\right)$; $m_x = 752$ кг.

2.2. К нити подвешен груз массой $m = 1$ кг. Найти силу натяжения нити T, если нить с грузом: а) поднимать с ускорением $a = 5$ м/с^2; б) опускать с тем же ускорением $a = 5$ м/с^2.

Решение:



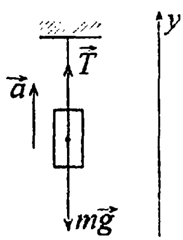
В обоих случаях, а и б, применим второй закон Ньютона.

а) $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$, отсюда $T=ma_1+mg=m(a_1+g)$; $T=14{,}8$ Н.

б) $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $-mg+T=-ma_2$, откуда $T=mg-ma_2=m(g-a_2)$; $T=4{,}8$ Н.

2.3. Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает силу натяжения $T=4{,}4$ кН. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой $m=400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не разорвалась.

Решение:



По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$, откуда $a=\dfrac{T-mg}{m}$; $a=12$ м/с^2.

2.4. Масса лифта с пассажирами $m=800$ кг. С каким ускорением a и в каком направлении движется лифт, если известно, что сила натяжения троса, поддерживающего лифт: а) $T=12$ кН; б) $T=6$ кН.

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$ (см. рис. к задаче 2.3), откуда $a=T/m-g$. а) $a=5{,}2$ м/с^2; б) $a=-2{,}3$ м/с^2.

2.5. К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением $a_1=2$ м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разорвется. С каким ускорением a_2 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалаеь?

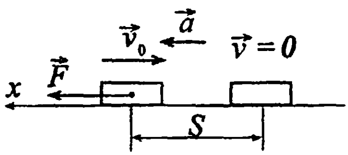
Решение:

Запишем второй закон Ньютона в скалярном виде для двух случаев: $T_1 - mg = ma_1$ — (1); $T_2 - mg = ma_2$ — (2) (см. рис. к задаче 2.3). Поскольку $T_2 = 2T_1$, то уравнение (2) можно переписать $2T_1 - mg = ma_2$, откуда $T_1 = ma_2 - ma_1 = m(a_2 - a_1)$. Подставив выражение для T_1 в (1), получим $m(a_2 - a_1) - mg = ma_1$, откуда $a_2 = 2a_1 + g$; $a_2 = 13{,}8$ м/с^2.

2.6. Автомобиль массой $m = 1020$ кг, двигаясь равнозамедленно, остановился через время $t = 5$ с, пройдя путь $s = 25$ м. Найти начальную скорость v_0 автомобиля и силу торможения F.

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, или в проекции на ось x: $F = ma$ — (1). Уравнения движения при равнозамедленном движении автомобиля имеют



вид: $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ — (2); $v = v_0 - at$ — (3). Поскольку конечная скорость автомобиля $v = 0$, то из (3) начальная скорость автомобиля $v_0 = at$. Подставляя это выражение в (2), найдем $a = \dfrac{2S}{t^2}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим:

$F = \dfrac{2Sm}{t^2}$; $F = 2{,}04$ кН.

2.7. Поезд массой $m = 500$ т, двигаясь равнозамедленно, в течение времени $t = 1$ мин уменьшает свою скорость от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Найти силу торможения F.

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в виде: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, откуда $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$ или $m \Delta \vec{v} = \vec{F} \Delta t$. В проекции на направление движения последнее уравнение можно записать в виде $m(v_2 - v_1) = -F\Delta t$. Отсюда, при $\Delta t = t$, $F = m\frac{v_1 - v_2}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 27{,}5 \cdot 10^3$ Н.

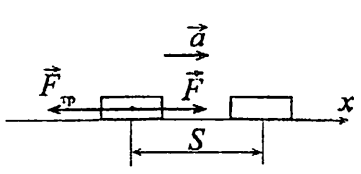
2.8. Вагон массой $m = 20$ т движется с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч. Найти среднюю силу $\overline{F}$, действующую на вагон, если известно, что вагон останавливается в течение времени: а) $t = 1$ мин 40 с; б) $t = 10$ с; в) $t = 1$ с.

Решение:

Имеем $F = m\frac{v_1 - v_2}{t}$ (см. задачу 2.7). В нашем случае $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$, т.е. $F = \frac{mv_0}{t}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\overline{F} = 3$ кН ; б) $\overline{F} = 30$ кН ; в) $\overline{F} = 300$ кН .

2.9. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время $t = 30$ с прошел путь $s = 11$ м? Масса вагона $m = 16$ т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg .

Решение:



По второму закону Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$ или в проекции на ось x: $F - F_{тр} = ma$, откуда $F = ma + F_{тр}$. Поскольку движение равноускоренное и $v_0 = 0$, то путь $S = at^2/2$, откуда $a = \frac{2S}{t^2}$. По условию $F_{\text{тр}} = 0{,}05mg$, тогда $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0{,}05mg$; $F = 8{,}2$ кН.

2.10. Поезд массой $m = 500$ т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения $F_{\text{тр}} = 98$ кН останавливается через время $t = 1$ мин. С какой скоростью v_0 шел поезд?

Решение:

Имеем $F_{\text{тр}} = \frac{mv_0}{t}$ (см. задачу 2.8), отсюда $v_0 = \frac{F_{\text{тр}} \cdot t}{m}$; $v_0 = 11{,}75$ м/с.

2.11. Вагон массой $m = 20$ т движется равнозамедленно, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и ускорение $a = -0{,}3$ м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние s вагон пройдет до остановки?

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, или в проекции на направление движения $-F = -ma$, откуда сила торможения по абсолютной величине равна $F = 6$ кН. Ускорение вагона $a = \frac{v - v_0}{t}$, но $v = 0$, следовательно, $a = -\frac{v_0}{t}$, откуда $t = -v_0/a$; $t = 50$ с. Пройденный путь, с учетом $a < 0$, найдем по формуле $s = vt - at^2/2$; $s = 375$ м.

2.12. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5$ м/с^2 и $D = 1$ м/с^3. Найти силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.

Решение:

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = d^2s/dt^2$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a$ отсюда $F = m \times \times (2C - 6Dt)$; $F = 2$ Н.

2.13. Под действием силы $F = 10$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где $C = 1$ м/с^2. Найти массу m тела.

Решение:

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C$, отсюда $F = m \cdot 2C$, следовательно, $m = F / 2C$; $m = 5$ кг.

2.14. Тело массой $m = 0{,}5$ кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = A \sin \omega \cdot t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время $t = (1/6)$ с после начала движения.

Решение:

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Первая производная $\frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega t$; вторая производная $\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t = a$, отсюда $F = -mA\omega^2 \sin \omega t$; $F = -0{,}125$ Н.

2.15. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

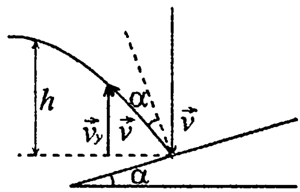
Решение:

По закону сохранения импульса $F\Delta t = (mv + 0) - (-mv + 0)$, откуда $F\Delta t = 2mv$; $F\Delta t = 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

2.16. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

Решение:

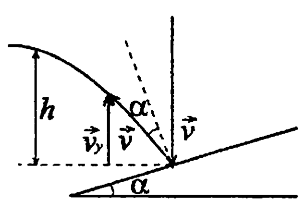
По второму закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$. Считая положительным направление нормали, внешней к стенке, получим: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$. Таким образом, получим $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$; $F\Delta t = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ Н·с.



2.17. Шарик массой $m = 0{,}1$ кг, падая с некоторой высоты, ударяется о наклонную плоскость и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. За время удара плоскость получает импульс силы $F\Delta t = 1{,}73$ Н·с. Какое время t пройдет от момента удара шарика о плоскость до момента, когда он будет находиться в наивысшей точке траектории?

Решение:

По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, где $\Delta v = v_1 \cos\alpha - (-v_2 \cos\alpha)$; $\Delta v = \cos\alpha(v_1 + v_2)$; $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$. Тогда $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$ — (1). Из рисунка видно, что $v_y = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - gt =$



$= v\cos 2\alpha - gt$; $v_y = 0$ в верхней точке, следовательно, $v\cos 2\alpha = gt$, откуда $t = v\cos 2\alpha / g$. Из (2) найдем $v = \dfrac{F\Delta t}{2m\cos\alpha}$, тогда $t = \dfrac{F\Delta t\cos 2\alpha}{2mg\cos\alpha}$; $t = 0{,}51$ с.

2.18. Струя воды сечением $S = 6$ см^2 ударяется о стенку под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $v = 12$ м/с.

Решение:

(См. рис. к задаче 2.16) За время Δt о стенку ударяется масса воды $m = lS\rho = Sv\Delta t\rho$ — (1), где S — поперечное сечение струи, ρ — плотность воды. По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, откуда $F = \dfrac{m\Delta v}{\Delta t}$ — (2). Имеем $\Delta v = v_1\cos\alpha - (-v_2\cos\alpha) = \cos\alpha(v_1 + v_2)$ (см. задачу 2.16). По условию $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$ — (3). Подставляя (1) и (3) в (2), получим $F = \dfrac{Sv\Delta t\rho\cdot 2v\cos\alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho\cos\alpha$; $F = 86$ Н.

2.19. Трамвай, трогаясь с места, движется с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. Через время $t = 12$ с после начала движения мотор выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. Коэффициент трения на всем пути $k = 0{,}01$. Найти наибольшую скорость v и время t движения трамвая. Каково его ускорение a при его равнозамедленном движении? Какое расстояние s пройдет трамвай за время движения?

Решение:

Очевидно, что наибольшей скорости трамвай достигнет в момент времени $t_1 = 12$ с, его скорость: $v = at$; $v = 0{,}5\cdot 12 = 6$ м/с. Пройденный путь при равноускоренном движении: $s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$ — (1), а при равнозамедленном $s_2 = v t_2 - \frac{a_2 t_2^2}{2}$ — (2). Согласно второму закону Ньютона $-F_{тр} = kmg = ma_2$; $a_2 = \frac{-kmg}{m} = kg$; $a_2 = -0{,}098$ м/с^2. На втором участке пути: $v = -a_2 t_2$, отсюда $t_2 = \frac{-v}{a_2}$; $t_2 = 61{,}2$ с. Тогда время движения $t = t_1 + t_2$; $t = 73{,}2$ с. Из уравнения (1) $s_1 = 36$ м. Из уравнения (2) $s_2 = 183{,}7$ м. Весь путь $s = s_1 + s_2$; $s = 219{,}7$ м.

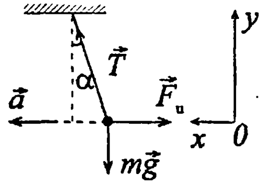
2.20. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: а) равномерно; б) с ускорением $a = 2$ м/с?

Решение:

а) Движение равномерное $a = 0$, следоватсльно уравнение движения в соответствии со вторым законом Ньютона: $F - F_{тр} = 0$, отсюда $F - F_{тр} = 0{,}1mg$; $F = 980$ Н. б) По второму закону Ньютона: $F - F_{тр} = ma$, отсюда $F = ma + F_{тр} = m \cdot (a + 0{,}1g)$; $F = 2{,}98$ кН.

2.21. Какой угол α с горизонтом составляет поверхность бензина в баке автомобиля, движущегося горизонтально с ускорением $a = 2{,}44$ м/с^2?

Решение:

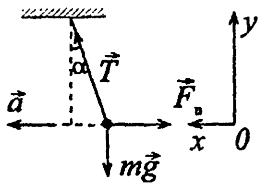


В неинерциальных системах отсчета (НИСО) второй закон Ньютона не выполняется. Запишем уравнение движения бензина в баке в НИСО

$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_i$, где $F_i = -ma$. В проекции на ось x: $0 = N\sin\alpha - ma$. В проекции на ось y: $0 = mg - N\cos\alpha$, отсюда $mg = N\cos\alpha$; $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$; $\dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = ma$, следовательно, $a = g \cdot tg\alpha$; $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$; $\alpha = arctg\dfrac{2,44}{9,8} \approx 14°$.

2.22. Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3$ с равномерно уменьшается от $v_1 = 18$ км/ч до $v_2 = 6$ км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром?

Решение:



Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной. Уравнение движения в векторной форме: $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_и = 0$ — (1), где $F_и = -ma$, тогда уравнение (1) в проекциях на ось x: $T\sin\alpha = ma$ — (2) и на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Разделив (2) на (3), получим $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$, откуда $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$ или, учитывая, что $a = \dfrac{\Delta v}{t}$, $\alpha = arctg(\Delta v / gt)$. Подставляя числовые данные, получим $\alpha = 6°30'$.

2.23. Вагон тормозится, и его скорость за время $t = 3,3$ с равномерно уменьшается от $v_1 = 47,5$ км/ч до $v_2 = 30$ км/ч. Каким должен быть предельный коэффициент трения k между чемоданом и полкой, чтобы чемодан при торможении начал скользить по полке?

Решение:

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета. Уравнение движения $0 = \vec{F}_{тр} + \vec{F}_i$ или в проекции на ось x: $0 = F_{тр} - ma$, где $a = (v_1 - v_2)/t$; $F_{тр} = kmg$. Тогда $kmg = \frac{m(v_1 - v_2)}{t}$; $k = \frac{v_1 - v_2}{gt}$. Подставляя числовые данные, получим: $k = 0{,}15$. Т.е. при $k \le 0{,}15$ чемодан начнет скользить по полке.

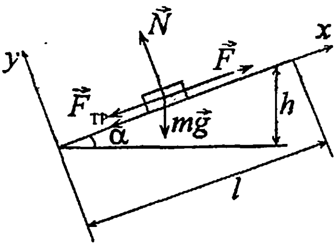
2.24. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающийся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол.

Решение:

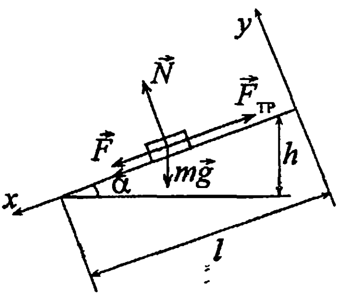
Обозначим силу тяжести, действующую на единицу длины каната, через $m_l g$. Тогда сила тяжести свешивающейся части каната равна $\frac{m_l g}{4}$. Эта сила тяжести уравновешивается силой трения $F_{тр}$, действующей на ту часть каната, которая лежит на столе: $F_{тр} = \frac{3km_l gl}{4}$. Таким образом, $\frac{m_l gl}{4} = \frac{3km_l gl}{4}$, откуда $k = 0{,}33$.

2.25. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg. Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: а) в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути; б) под гору с тем же уклоном.

Решение:

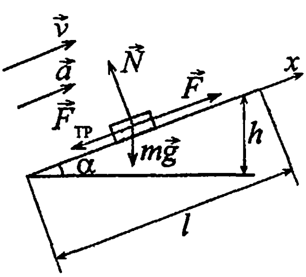


Уравнение движения автомобиля в векторной форме $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}$; $v = const$, следовательно $a = 0$. а) В проекции на ось x: $0 = -mg\sin\alpha - F_{тр} + F$, на ось y: $0 = N - mg\cos\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}04$, $\cos\alpha = 0{,}999$, откуда $N = mg\cos\alpha$. $F_{тр} = kN = kmg \times \cos\alpha$; $F = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha$; $F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ или $F = 1{,}37$ кН. б) В проекции на ось x: $0 = F + mg\sin\alpha - F_{тр}$, на ось y: $N = mg\cos\alpha$. $F = F_{тр} - mg\sin\alpha$; $F = kmg\cos\alpha - mg \times \sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$. $F = 590$ Н.



2.26. На автомобиль массой $m = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением $a = 1$ м/с^2 в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

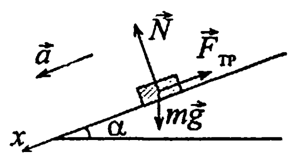
Решение:



Зададим направление оси x вдоль наклонной плоскости и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось: $F - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ — (1), где $\sin\alpha = h/l$ — (2). Из уравнения (1) $F = ma + mg \times \sin\alpha + F_{тр}$ или, с учетом уравнения (2), сила тяги, развиваемая мотором автомобиля равна $F = m\left(a + \frac{hg}{l} + 0{,}1g\right)$; $F = 2{,}37$ кН.

2.27. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 4°$. При каком предельном коэффициенте трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения $k = 0{,}03$? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути $s = 100$ м? Какую скорость v будет иметь тело в конце пути?

Решение:



Для покоящегося тела по второму закону Ньютона в проекции на ось x имеем $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$, где $F_{Tm} \geq kmg$. Отсюда $mg\sin\alpha = kmg$; $k = \sin\alpha$; $k \leq 0{,}07$. При равноускоренном движении по второму закону Ньютона: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ или $\sin\alpha - kmg = ma$, откуда $a = g(\sin\alpha - k)$; $a = 0{,}39$ м/с^2. Пройденный путь $s = \frac{at^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$; $t = 22{,}6$ с. Скорость $v = at$; $v = 8{,}8$ м/с.

2.28. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Пройдя путь $s = 36{,}4$ см, тело приобретает скорость $v = 2$ м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

Решение:

См. рисунок к задаче 2.27. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$, или $mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma$, откуда $k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}$ — (1).

Скорость $v = at$, откуда $t = \frac{v}{a}$ — (2). Пройденный путь $s = \frac{at^2}{2}$, с учетом (2) $s = \frac{av^2}{2a^2} = \frac{v^2}{2a}$, откуда $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$ — (3).

Подставив (3) в (1) получим $k = \frac{g \sin\alpha - v^2/2s}{g \cos\alpha}$;

$k = \frac{2gs \cdot \sin\alpha - v^2}{2gs}$; $k = tg\alpha - \frac{v^2}{2gs \cdot \cos\alpha}$; $k = 0{,}2$.

2.29. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного пути s от времени t дается уравнением $s = Ct^2$, где $C = 1{,}73$ м/с^2. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

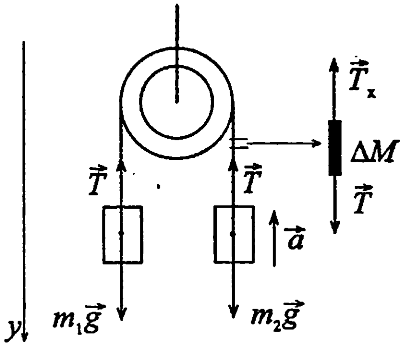
Решение:

См. рисунок к задаче 2.27. Ускорение можно найти как вторую производную пути по времени. $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = 3{,}46$. По второму закону Ньютона $mg \sin\alpha - F_{тр} = ma$. Поскольку $F_{тр} = kmg \cos\alpha$, то $mg \sin\alpha - kmg \cos\alpha = ma$ откуда $k = \frac{mg \sin\alpha - ma}{mg \cos\alpha}$; $k = \frac{g \sin\alpha - a}{g \cos\alpha}$; $k = 0{,}5$.

2.30. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение:

Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити Δm и запишем уравнение движения в проекции на ось y: $\Delta ma = T - T_x$. Поскольку $\Delta m = 0$, то $T = T_x$, т. е. сила натяжения нити во всех точках ее одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, т. к. из-за нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь, т. е. $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$; $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$; $S_1 = S_2$, следовательно, $a_1 = a_2$. Но направление векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны. Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гири в проекциях на ось y:



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a & \text{— (1);} \\ m_2 g - T = -m_2 a & \text{— (2).} \end{cases}$$

Вычтем (2) из (1): $a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$, отсюда $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ — (3).

Подставим (3) в (1) $\frac{m_1 g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = m_1 g - T$, следовательно,

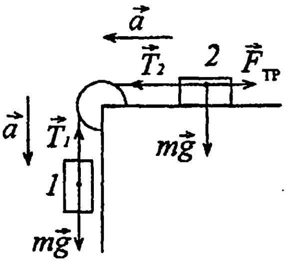
$T = m_1 g \cdot \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$; $\quad T = m_1 g \cdot \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$;

$T = m_1 g \cdot \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2g m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Подставляя числовые данные, получим: $T = 13$ Н; $a = 3{,}27$ м/с^2.

2.31. Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение:

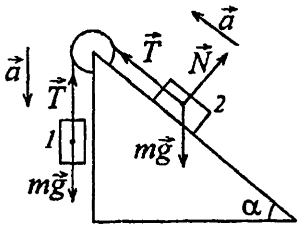
Запишем второй закон Ньютона для обоих тел в проекциях на направление их движения: $mg - T_1 = m_1 a$ — (1);



$T_2 - F_{тр} = m_2 a$ — (2). Имеем $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30). Сложив (1) и (2), с учетом того, что $F_{тр} = km_2 g$, получим $m_1 g - kmg = a(m_1 + m_2)$, откуда найдем $a = g\dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}$ — (3); $a = 4{,}4$ м/с^2. Подставим (3) в (1) и выразим T: $T = m_1(g - a)$; $T = m_1\left(g - g\dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \left(1 - \dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g\left(\dfrac{m_1 + m_2 - m_1 + km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \dfrac{m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$; $T = g\dfrac{m_1 m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$. Подставив числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = \dfrac{m_1 m_2(1+k)g}{m_1 + m_2} = 5{,}4$ Н.

2.32. Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гири о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь.

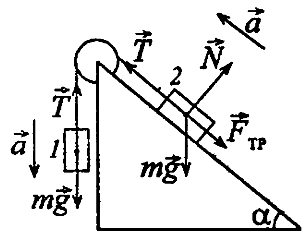
Решение:



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для первой и второй гири в проекциях на направление их движения с учетом $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30): $\begin{cases} mg - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha = ma & —(2). \end{cases}$ Из (1) имеем: $T = m(g-a)$ — (3). Подставив (3) в (2), получим: $g(1-\sin\alpha) = 2a$, откуда $a = g(1-\sin\alpha)/2$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2.45$ м/с^2 и $T = 7{,}35$ Н.

2.33. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициент трения гири 2 о наклонную плоскость $k = 0{,}1$.

Решение:



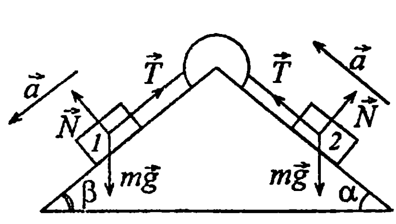
Пусть при данном значении k тело скользит. Уравнение второго закона Ньютона для первой гири останется неизменным, а в уравнении для второй появится сила трения: $F_{Тш} = kmg\cos\alpha$;

$$\begin{cases} mg - T = ma & — (1); \\ T - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma & — (2). \end{cases}$$

Выразим из (1) T: $T = mg - ma$ — (3). Подставив (3) в (2), найдем a: $mg - ma - mg(\sin\alpha + k\cos\alpha) = ma$; $g(1-\sin\alpha - k\cos\alpha) = 2a$; $a = g(1-\sin\alpha - k\cos\alpha)/2$. Из (3) $T = m(g-a)$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2{,}02$ м/с^2; $T = 1(9{,}8 - 2{,}02) = 7{,}78$ Н.

2.34. Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Решение:



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на направления движения гирь имеем:

$$\begin{cases} mg\sin\beta - T = ma & \text{— (1);} \\ T - mg\sin\alpha = ma & \text{— (2).} \end{cases}$$ Сложив (1) и (2), получим:

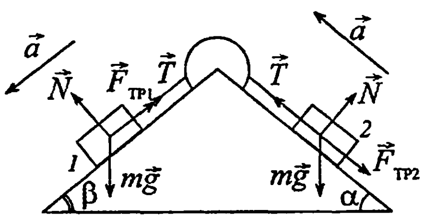
$mg(\sin\beta - \sin\alpha) = 2ma$, откуда $a = \dfrac{g(\sin\beta - \sin\alpha)}{2}$. Из (2):

$T = ma + mg\sin\alpha$; $\qquad T = \dfrac{mg(\sin\beta - \sin\alpha)}{2} + mg\sin\alpha$;

$T = mg\dfrac{(\sin\beta + \sin\alpha)}{2}$. Подставив числовые значения, получим: $a = 1{,}03$ м/с^2 и $T = 5{,}9$ Н.

2.35. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициенты трения гирь 1 и 2 о наклонные плоскости $k_1 = k_2 = 0{,}1$. Показать, что из формул, дающих решение этой задачи, можно получить, как частные случаи, решения задач 2.30 — 2.34.

Решение:



Пусть при данном значении k гири скользят. С учетом силы трения уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление их движения запишется в виде:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - F_{тр} = m_1 a, \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - F_{тр} = m_2 a; \end{cases}$$

или $$\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - km_1 g\cos\beta = m_1 a & \text{— (1),} \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - km_2 g\cos\alpha = m_2 a & \text{— (2).} \end{cases}$$ Так как $T_1 = T_2$, то сложив (1) и (2) получим:

$m_1 g\sin\beta - m_2 g\sin\alpha - km_1 g\cos\beta - km_2 g\cos\alpha = a(m_1 + m_2)$;

$m_1 g(\sin\beta - k\cos\alpha) - m_2 g(\sin\beta + k\cos\alpha) = a(m_1 + m_2)$,

откуда $$a = g\frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \quad \text{— (3).}$$

Из (2) найдем: $T_2 = m_2 a + m_2 g\sin\alpha + km_2 g\cos\alpha$, подставив

в это выражение (3), получим: $T_2 = m_2 g \times$
$$\times \frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} + m_2 g(\sin\alpha\cos\alpha);$$
$$T_2 = m_2 g \frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - (\sin\alpha + k\cos\alpha)(m_2 - m_1 - m_2)}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = g m_1 m_2 \frac{\sin\beta - k\cos\beta + \sin\alpha + k\cos\alpha}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = g m_1 m_2 \frac{\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta)}{m_1 + m_2};$$
$$T_2 = \frac{m_1 m_2(\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta))}{m_1 + m_2} g.$$ Подставляя числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = 6$ Н. $a = 0{,}244$ м/с^2.

2.36. При подъеме груза массой $m = 2$ кг на высоту $h = 1$ м сила F совершает работу $A = 78{,}5$ Дж. С каким ускорением a поднимается груз?

Решение:

По второму закону Ньютона в проекции на направление движения груза имеем $ma = F - mg$, откуда $F = ma + mg$. По условию работу A совершает сила F, следовательно, $A = Fh\cos 0 = Fh = mah + mgh$ — (1), т.е. работа A идет на увеличение потенциальной энергии груза и на сообщение ему ускорения. Из уравнения (1) найдем $a = \frac{A - mgh}{hm}$; $a = 29{,}4$ м/с^2.

2.37. Самолет поднимается и на высоте $h = 5$ км достигает скорости $v = 360$ км/ч. Во сколько раз работа A_1, совершаемая при подъеме против силы тяжести, больше работы A_2, идущей на увеличение скорости самолета?

Решение:

Работа A_1 идет на увеличение потенциальной энергии самолета, а работа A_2 — на увеличение его кинетической энергии. Тогда при $A_1 = mgh$ и $A_2 = mv^2/2$ получим: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2mgh}{mv^2} = \frac{2gh}{v^2}$; $\frac{A_1}{A_2} = 9{,}8$.

2.38. Какую работу A надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой $m = 2$ кг: а) увеличить скорость с $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 5$ м/с; б) остановиться при начальной скорости $v_0 = 8$ м/с?

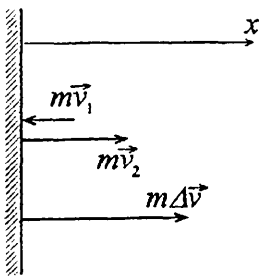
Решение:

Совершенная работа пойдет на приращение кинетической энергии: а) $A_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$; $A_1 = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2}$; $A_1 = 21$ Дж.

б) $A_2 = W_{к2} - W_{к1}$. Т.к. $W_{к2} = 0$, то $A_2 = -W_{к1} = -mv_0^2/2$; $A_2 = -64$ Дж. Знак «–» говорит о том, что работа совершается силой трения.

2.39. Мяч, летящий со скоростью $v_1 = 15$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найти изменение импульса $m\Delta v$ мяча, если известно, что изменение его кинетической энергии $\Delta W = 8{,}75$ Дж.

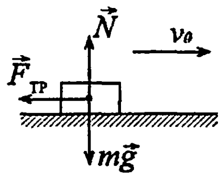
Решение:



Изменение кинетической энергии мяча: $\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2}$. Отсюда $m = \frac{2\Delta W}{v_2^2 - v_1^2}$ — (1). Изменение импульса в проекции на ось x: $m\Delta v = m\left(v_2 - \left(-v_1\right)\right) = m\left(v_2 + v_1\right)$. С учетом (1): $m\Delta v=\dfrac{2\Delta W(v_1+v_2)}{v_2^2-v_1^2}=\dfrac{2\Delta W}{v_2-v_1}$. Подставив числовые данные, получим: $m\Delta v = 3{,}5$ кг·м/с.

2.40. Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью $v = 3$ м/с, прошел до остановки расстояние $s = 20{,}4$ м. Найти коэффициент трения k камня о лед.

Решение:



Работа силы трения при скольжении камня по льду равна $A = F_{тр} s\cos\alpha$, где $F_{тр} = kmg$, $\cos\alpha = \cos 180° = -1$, т.е. $A = -kmgs$ — (1). С другой стороны, работа силы трения равна приращению кинетической энергии камня $A = W_2 - W_1$, поскольку $W_2 = 0$, то $A = -W_1 = -\dfrac{mv^2}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $k = \dfrac{v^2}{2gs}$; $k = 0{,}02$.

2.41. Вагон массой $m = 20$ т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью $v_0 = 54$ км/ч, под действием силы трения $F_{тр} = 6$ кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние s, которое вагон пройдет до остановки.

Решение:

Работа силы трения $A = -\dfrac{mv_0^2}{2}$ (см. задачу 2.40). Подставляя числовые данные, получим $A = -2{,}25$ МДж. По второму закону Ньютона: $F_{тр} = ma$, откуда $a = \dfrac{F_{тр}}{m}$ — (1). При равнозамедленном движении путь, пройденный до остановки: $s=\frac{at^2}{2}$, где $t=\frac{v_0}{a}$, тогда $s=\frac{v_0^2}{2a}$ — (2).

Подставляя уравнение (1) в (2), получим $s=\frac{v_0^2 m}{2\cdot F_{тр}}$; $s=375$ м.

2.42. Шофер автомобиля, имеющего массу $m=1$ т, начинает тормозить на расстоянии $s=25$ м от препятствия на дороге. Сила трения в тормозных колодках автомобиля $F_{тр}=3{,}84$ кН. При какой предельной скорости v движения автомобиль успеет остановиться перед препятствием? Трением колес о дорогу пренебречь.

Решение:

Задача аналогична 2.41. Воспользуемся полученной в предыдущей задаче формулой: $s=\frac{v_0^2 m}{2\cdot F_{тр}}$, откуда $v=\sqrt{\frac{2sF_{тр}}{m}}$. Подставив числовые значения, получим: $v=13{,}9$ м/с; $v=50$ км/ч.

2.43. Трамвай движется с ускорением $a=49{,}0$ см/с. Найти коэффициент трения k, если известно, что 50% мощности мотора идет на преодоление силы трения и 50% — на увеличение скорости движения.

Решение:

Мощность мотора $N=F\cdot v$. По условию половина мощности идет на преодоление силы трения, т.е. $\frac{N}{2}=kmg\cdot v$, а вторая половина — на увеличение скорости движения, т.е. $\frac{N}{2}=ma\cdot v$. Отсюда $kmg\cdot v=ma\cdot v$, следовательно, $k=a/g$; $k\approx 0{,}05$.