§ 23. Элементарные частицы. Ускорители частиц

В задачах данного раздела используются данные таблиц 3, 21, 22 приложения.

23.1. В ядерной физике принято число заряженных частиц, бомбардирующих мишень, характеризовать их общим зарядом, выраженным в микроампер-часах (мкА·ч). Какому числу заряженных частиц соответствует общий заряд $q = 1$ мкА·ч? Задачу решить для: а) электронов; б) α-частиц.

Решение:

а) Заряд электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \dfrac{q}{e} = 2{,}25 \cdot 10^{16}$ электронов. б) Заряд α-частицы равен $2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \dfrac{q}{2e} = 1{,}125 \cdot 10^{16}$ α-частиц.

23.2. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ — начальная кинетическая энергия нейтрона, $W_{к1}$ — его кинетическая энергия после взаимодействия с ядром, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющего вещества. По условию $\dfrac{W_{к0}}{W_{к1}} = k = 1{,}4$, отсюда $W_{к0} = kW_{к1}$ — (2) и после подстановки (2) в (1) получаем $(k-1)W_{к1} = W_{к2}$ — (3). По закону сохранения импульса $p_0 = p_2 - p_1$ — (4), где p_0 — начальный импульс нейтрона, p_1 — его импульс после взаимодействия с ядром, p_2 — импульс ядра замедляющего вещества. Кинетическая энергия и импульс связаны между собой соотношением $W_к = \frac{p^2}{2m}$ — (5). Подставляя (5) в (2), получаем $p_0^2 = kp_1^2$ или $p_0 = \sqrt{k}\,p_1$ — (6). Подставляя (6) в (4), получаем $\frac{(k-1)p_1^2}{m_n} = \frac{p_2^2}{m}$ — (8), где $m_n = 1{,}675^{-27}$ кг — масса нейтрона. Решая совместно уравнения (7) и (8), находим массу ядер замедляющего вещества $m = \frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2 m_n}{k-1} = 19{,}96 \cdot 10^{-27}$ кг $= 12{,}02$ а.е.м. По таблице Менделеева находим, что это углерод ${}^{12}_{6}C$, следовательно, замедлителем является графит.

23.3. Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа ${}^{23}_{11}Na$?

Решение:

Масса ядер замедляющего вещества (см. задачу 23.2) равна $m = \frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2 m_n}{k-1}$ — (1), где $k = \frac{W_{к0}}{W_{к1}}$ — (2), $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно начальная и кинетическая энергии бомбардирующего натрия, $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг — масса нейтрона. Поскольку кинетическая энергия равна $W_к = mv^2/2$ — (3), то, подставляя (3) в (2), получаем $k = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ или $\frac{v_0}{v} = \sqrt{k}$ — (4). Из формулы (1) находим $\sqrt{k} = \frac{m+m_n}{m-m_n}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{v}{v_0} = \frac{m-m_n}{m+m_n} = 0{,}916 \cdot 100\% = 91{,}6\%$.

23.4. Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0); б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно кинетическая энергия нейтрона до и после взаимодействия с ядром замедлителя, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющегося вещества. Если $\frac{W_{к0}}{W_{к1}} = k$ — (2), то из (1) и (2) следует, что $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \frac{1}{k}$ — (3). Поскольку (см. задачу 23.3) $\sqrt{k} = \frac{m + m_0}{m - m_0}$, то $k = \left(\frac{m + m_0}{m - m_0}\right)^2$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 1 - \left(\frac{m - m_0}{m + m_0}\right)^2$. а) Для протона $m \approx m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} \approx 1 \cdot 100\% = 100\%$. б) Для ядра атома свинца $m = 207m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}} = 0{,}0191 \cdot 100\% = 19{,}1\%$.

23.5. Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

Направление скорости $\vec{v}$ нейтрона и скорости частиц $\vec{v}_1$ показано на рисунке. Скорости частиц одинаковы и равны $v' = \frac{v\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, энергия распределится между нейтроном и протоном в среднем поровну.

23.6. Нейтрон, обладающий энергией $W_0 = 4{,}6$ МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до $W = 0{,}23$ эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол $\varphi = 45°$.

Решение:

После каждого столкновения кинетическая энергия нейтрона становится в два раза меньше (см. задачу 23.5). Тогда после n столкновений энергия нейтрона $W = \left(\frac{1}{2}\right)^n W_0$.

Отсюда $n \lg 2 = \lg\left(\frac{W_0}{W}\right) = \lg\left(2 \cdot 10^7\right)$; $n = \frac{\lg\left(2 \cdot 10^7\right)}{\lg 2} = 24$.

23.7. Поток заряженных частиц влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3$ Тл. Скорость частиц $v = 1{,}52 \cdot 10^7$ м/с и направлена перпендикулярно к направлению поля. Найти заряд q каждой частицы, если известно, что на нее действует сила $F = 1{,}46 \cdot 10^{-11}$ Н.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца, которая равна $F_Л = qvB\sin\alpha$. По условию скорость частиц направлена перпендикулярно направлению поля, значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\alpha = 1$, а следовательно, $F_Л = qvB$. Отсюда заряд каждой частицы $q = \frac{F_Л}{vB} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

23.8. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и движется по окружности с радиусом $R = 10$ см. Скорость частицы $v = 2{,}4 \cdot 10^6$ м/с. Найти для этой частицы отношение ее заряда к массе.

Решение:

В однородном магнитном поле на заряженную частицу действует сила Лоренца, которая (см. задачу 23.7) равна $F_Л = qvB$ — (1). Она является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_Л = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $qvB = m\frac{v^2}{R}$, откуда отношение заряда частицы к ее массе равно $\frac{q}{m} = \frac{v}{BR} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

23.9. Электрон ускорен разностью потенциалов $U = 180$ кВ. Учитывая поправки теории относительности, найти для этого электрона массу m, скорость v, кинетическую энергию W и отношение его заряда к массе. Какова скорость v' этого электрона без учета релятивистской поправки?

Решение:

Электрон, ускоренный разностью потенциалов, обладает потенциальной энергией $W_п = eU$ — (1). По закону сохранения энергии $W_п = W_к$ — (2). Приравнивая правые части соотношений (1) и (2), получаем $eU = W_к$ — (3) или

$W_к = eU = 2{,}88 \cdot 10^{-14}$ Дж $= 1{,}8 \cdot 10^5$ эВ. Зависимость кинетической энергии электрона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ — (3), где $m_0 = 9{,}11 \times \times 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость электрона, c — скорость света. Из формулы (3) имеем $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{W_к + m_0 c^2}$ — (5). Зависимость массы электрона от скорости его движения дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (6). Подставляя (5) в (6), получаем $m = \frac{W_к + m_0 c^2}{c^2}$ — (7), а затем, подставляя (3) в (7), окончательно находим массу электрона $m = \frac{eU + m_0 c^2}{c^2} = 1{,}23 \cdot 10^{-30}$ кг. Кинетическая энергия электрона $W_к = \frac{mv^2}{2}$, откуда релятивистская скорость электрона $v' = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}52 \cdot 10^8$ м/с. Отношение заряда электрона к его массе равно $\frac{e}{m} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Реальное значение равно $\frac{e}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. С учетом погрешностей величину, полученную в данной задаче, можно считать допустимой.

23.10. Мезон космических лучей имеет энергию $W = 3$ ГэВ. Энергия покоя мезона $W_0 = 100$ МэВ. Какое расстояние l в атмосфере сможет пройти мезон за время его жизни τ по лабораторным часам? Собственное время жизни мезона $\tau_0 = 2$ мкс.

Решение:

Имеем $\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = 30$, отсюда найдем $v = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с. Время жизни мезона по лабораторным часам $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = 30\tau_0$. Расстояние, пройденное мезоном за это время, равно $l = v\tau = v \cdot 30\tau_0 \approx 18 \cdot 10^3$ м.

23.11. Мезон космических лучей имеет кинетическую энергию $W = 7m_0c^2$, где m_0 — масса покоя мезона. Во сколько раз собственное время жизни τ_0 мезона меньше времени его жизни τ по лабораторным часам?

Решение:

Зависимость кинетической энергии мезона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1). По условию кинетическая энергия мезона равна $W_к = 7m_0c^2$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $7m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{8}$ — (3). Время жизни мезона по лабораторным часам τ связано с его собственным временем жизни τ_0 соотношением $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (4).

Подставляя (3) в (4), получаем $\frac{\tau}{\tau_0} = 8$.

23.12. Позитрон и электрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала. Какова длина волны λ этих фотонов?

Решение:

Если электрон и позитрон образуют два фотона, то по закону сохранения энергии $2m_0c^2 + W_1 + W_2 = 2h\nu$, где $2m_0c^2$ — суммарная энергия покоя электрона и позитрона, W_1 и W_2 — кинетические энергии электрона и позитрона, $2h\nu$ — суммарная энергия образовавшихся фотонов. Поскольку по условию начальная энергия частиц W_1 и W_2 ничтожно мала, то энергия каждого из фотонов равна $h\nu = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Отсюда частота излучения фотона $\nu = \frac{m_0c^2}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{m_0c}{h} = \frac{1}{\lambda}$, откуда длина волны фотонов $\lambda = \frac{h}{m_0c} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м.

23.13. Электрон и позитрон образуются фотоном с энергией $h\nu = 2{,}62$ МэВ. Какова была в момент возникновения полная кинетическая энергия $W_1 + W_2$ позитрона и электрона?

Решение:

По закону сохранения энергии $h\nu = 2m_0c^2 + W_1 + W_2$. Энергия покоя каждой частицы $m_0c^2 = 0{,}51 \cdot 10^6$ эВ. Тогда $W_1 + W_2 = h\nu - 2m_0c^2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ эВ.

23.14. Электрон и позитрон, образованные фотоном с энергией $h\nu = 5{,}7$ МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории с радиусом кривизны $R = 3$ см. Найти магнитную индукцию B поля.

Решение:

На электрон и позитрон в магнитном поле действует сила Лоренца, сообщая им нормальное ускорение, т. е. $qBv = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{mv}{qR}$ — (1). Согласно теории относительности импульс частицы $p = mv = \frac{1}{c}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $B = \frac{1}{cqR}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (3). Кинетическая энергия каждой частицы $W = \frac{h\nu - 2m_0c^2}{2} = 2{,}34$ МэВ (см. задачу 23.13). Подставляя числовые данные в (3), получим $B = 0{,}31$ Тл.

23.15. Неподвижный нейтральный π-мезон, распадаясь, превращается в два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона. Масса покоя π-мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_э$, где m_0 — масса покоя электрона.

Решение:

Если неподвижный нейтральный π-мезон распадается на два фотона, то по закону сохранения энергии $m_0(\pi)c^2 = 2h\nu$ — (1). По условию масса покоя мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона. Подставляя (2) в (1), получаем $h\nu = 132{,}1m_0c^2 = 67{,}7$ МэВ.

23.16. Нейтрон и антинейтрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала.

Решение:

Энергия каждого из фотонов (см. задачу 23.12) равна $h\nu = m_0c^2 = 942$ МэВ.

23.17. Неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона. Масса покоя K^0-мезона $m_0(K^0) = 965m_0$, где m_0 — масса покоя электрона; масса каждого π-мезона $m(\pi) = 1{,}77m_0(\pi)$, где $m_0(\pi)$ — его масса покоя. Найти массу покоя $m_0(\pi)$ π-мезонов и их скорость v в момент образования.

Решение:

Если неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона, то по закону сохранения энергии $m_{0K^0}c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2(m_\pi - m_{0\pi})c^2$ — (1). По условию задачи масса покоя K^0-мезона $m_{0K^0} = 965m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, а масса каждого π-мезона $m_\pi = 1{,}77m_{0\pi}$ — (3), где $m_{0\pi}$ — его масса покоя. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $965m_0c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2 \cdot 1{,}77m_{0\pi}c^2$. Отсюда масса покоя π-мезонов равна $m_{0\pi} = \frac{965m_0}{2 \cdot 1{,}77} = 272{,}59m_0 = 2{,}48 \cdot 10^{-28}$ кг.

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения следующим образом: $W_к = m_{0\pi}c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (4), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (5) — относительная скорость. С другой стороны, $W_к = m_\pi c^2$, или, учитывая (3), $W_к = 1{,}77m_{0\pi}c^2$ (6). Приравнивая правые части уравнений (4) и (6), получим $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = 1{,}77$. Отсюда относительная скорость π-мезонов равна $\beta = 0{,}932$. Тогда, учитывая (5), скорость π-мезонов в момент образования будет равна $v = 0{,}932 \cdot c = 2{,}79 \cdot 10^8$ м/с.

23.18. Вывести формулу, связывающую магнитную индукцию B поля циклотрона и частоту ν приложенной к дуантам разности потенциалов. Найти частоту приложенной к дуантам разности потенциалов для дейтонов, протонов и α-частиц. Магнитная индукция поля $B = 1{,}26$ Тл.

Решение:

На заряженную частицу в циклотроне действует сила Лоренца $F_Л = qvB \sin\alpha$, где q — заряд частицы, B — индукция магнитного поля. Т. к. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = 1$, отсюда $F_Л = qvB$. Она является центростремительной силой и сообщает частице центростремительное ускорение $a_{ц.с.} = \dfrac{v^2}{R}$. По второму закону Ньютона $F_Л = ma_{ц.с.} = m\dfrac{v^2}{R}$. Приравняем правые части уравнений $qvB = \dfrac{mv^2}{R}$, откуда $R = \dfrac{mv}{qB}$ — радиус окружности циклотрона. Период обращения циклотрона $T_ц = \dfrac{L}{v}$, где $L = 2\pi R = \dfrac{2\pi mv}{qB}$ — длина окружности циклотрона. $T_ц = \dfrac{2\pi m}{qB}$. Тогда частота $\nu_ц = \dfrac{1}{T_ц} = \dfrac{qB}{2\pi m}$. Для того чтобы частица непрерывно ускорялась, необходимо, чтобы она попадала в ускоряющий промежуток между дуантами в тот момент, когда электрическое поле изменит свою полярность, т. е. частота изменения полярности ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой циклотрона: $\nu = \nu_ц = \dfrac{qB}{2\pi m}$ — условие синхронизации. Подставляя числовые данные, получим $\nu_D = 9{,}7$ МГц; $\nu_p = 19{,}4$ МГц; $\nu_\alpha = 9{,}7$ МГц.

23.19. Вывести формулу, связывающую энергию W вылетающих из циклотрона частиц и максимальный радиус кривизны R траектории частиц. Найти энергию W вылетающих из циклотрона дейтонов, протонов и α-частиц, если максимальный радиус кривизны $R = 48{,}3$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 12$ МГц.

Решение:

Радиус окружности циклотрона и частота изменения полярности ускоряющего электрического поля (см. задачу 23.18) равны: $R = \dfrac{mv}{qB}$ и $\nu = \dfrac{qB}{2\pi m}$, отсюда $qB = 2\pi m\nu$; $R = \dfrac{mv}{2\pi m\nu} = \dfrac{v}{2\pi\nu}$. Отсюда скорость вылетающих из циклотрона частиц $v = 2\pi\nu R$, а их кинетическая энергия $W = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m4\pi^2\nu^2R^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2R^2$. Подставляя числовые данные, получим $W_D = 13{,}8$ МэВ; $W_p = 6{,}9$ МэВ; $W_\alpha = 27{,}6$ МэВ.

23.20. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 35$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 13{,}8$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Частота приложенной к дуантам циклотрона разности потенциалов (см. задачу 23.18) определяется соотношением $\nu = \dfrac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, равна $B = \dfrac{2\pi m \nu}{q}$. Для протона $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг и $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому $B = 0{,}9$ Тл. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$. Подставляя значения для протона, получаем $W = 4{,}8$ МэВ.

23.21. Решить предыдущую задачу для: а) дейтонов, б) α-частиц.

Решение:

Индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона (см. задачу 23.20), равна $B = \dfrac{2\pi m \nu}{q}$. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$. а) Для дейтонов $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 3{,}346 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 9{,}6$ МэВ. б) Для α-частиц $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 6{,}692 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 19{,}25$ МэВ.

23.22. Ионный ток в циклотроне при работе с α-частицами $I = 15$ мкА. Во сколько раз такой циклотрон продуктивнее массы $m = 1$ г радия?

Решение:

По определению ионный ток в циклотроне $I = \dfrac{q}{T} = qn$ — (1), где $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд α-частицы, T — период обращения α-частицы в циклотроне, n — частота излучения α-частиц циклотроном. Активность излучения α-частиц радием равна $a = \lambda N$ — (2), где $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3) — число делящихся ядер радия, $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Период полураспада радия равен $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда постоянная распада $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (2), получим $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (5). Из формулы (1) $n = \frac{I}{q}$ — (6). Разделив (6) на (5), окончательно находим $\frac{n}{a} = \frac{I\mu T_{1/2}}{qmN_A \ln 2} = 1270$.

23.23. Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 50$ см; магнитная индукция поля $B = 1$ Тл. Какую постоянную разность потенциалов U должны пройти протоны, чтобы получить такое же ускорение, как в данном циклотроне?

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 13.18), равна $\nu = \frac{Be}{2\pi m}$ — (1), а энергия вылетающих из циклотрона протонов (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{B^2 e^2 R^2}{2m}$ — (3). Потенциальная энергия протонов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, равна $W_п = eU$ — (4). Чтобы протоны получили такое же ускорение, как в циклотроне, по закону сохранения энергии необходимо, чтобы $W_п = W$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $U = \frac{B^2 e R^2}{2m} = 11{,}98$ МВ.

23.24. Циклотрон дает дейтоны с энергией $W = 7$ МэВ. Магнитная индукция поля циклотрона $B = 1{,}5$ Тл. Найти минимальный радиус кривизны R траектории дейтона.

Решение:

Энергия дейтонов, вылетающих из циклотрона (см. задачу 23.23), равна $W = \frac{B^2 q^2 R^2}{2m}$. Отсюда максимальный радиус кривизны траектории дейтона равен $R = \frac{\sqrt{2mW}}{Bq} = 36$ см.

23.25. Между дуантами циклотрона радиусом $R = 50$ см приложена переменная разность потенциалов $U = 75$ кВ с частотой $\nu = 10$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля циклотрона, скорость v и энергию W вылетающих из циклотрона частиц. Какое число оборотов n делает заряженная частица до своего вылета из циклотрона? Задачу решить для дейтонов, протонов и α-частиц.

Решение:

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 23.18), равна $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда магнитная индукция поля циклотрона равна $B = \frac{2\pi m \nu}{q}$ — (1). Энергия вылетающих из циклотрона частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Из теории относительности известно, что кинетическая энергия частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $2\pi^2\nu^2R^2 = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, откуда $\beta = \frac{2\pi\nu R\sqrt{\pi^2\nu^2R^2+c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2+c^2}$ — (4). С другой стороны, относительная скорость $\beta = \frac{u}{c}$ — (5). Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), находим скорость частиц $u = \frac{2\pi\nu Rc\sqrt{\pi^2\nu^2R^2+c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2+c^2}$ — (6). При каждом полном обороте заряженная частица проходит дважды расстояние между дуантами и, следовательно, дважды получит добавочный импульс. Поэтому при n оборотах заряженная частица приобретает энергию, эквивалентную ускоряющему потенциалу, $U' = 2nU$, где U — разность потенциалов, приложенная между дуантами. Отсюда $n = \frac{U'}{2U}$ — (7). Подставляя значения в формулы (1), (2), (6) и (7), получаем следующие числовые значения: а) Для дейтонов: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 10{,}2$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$. б) Для протонов: $B_1 = 0{,}65$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 34$. в) Для α-частиц: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$.

23.26. До какой энергии W можно ускорить α-частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m-m_0}{m_0}$ не должно превышать 5%?

Решение:

Из теории относительности известно, что изменение массы частицы на Δm соответствует изменению ее энергии на $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (1). По условию задачи относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0} \le 0.05$ — (2).

Считая начальную энергию α-частицы равной нулю, можно предположить, что $W_{max} = \Delta W$ — (3). В этом случае из формулы (2) изменение массы α-частицы равно $\Delta m = 0{,}05 m_0$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (1), получаем $W_{max} = 0{,}05 m_0 c^2 = 187$ МэВ.

23.27. Энергия дейтонов, ускоренных синхротроном, $W = 200$ МэВ. Найти для этих дейтонов отношение $\frac{m}{m_0}$ (где m — масса движущегося дейтона и m_0 — его масса покоя) и скорость v.

Решение:

Считая начальную энергию дейтонов равной нулю (см. задачу 23.26), можно предположить, что $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = m - m_0$ — (2) — изменение массы дейтона, $m_0 = 2{,}0141$ а.е.м. — его масса покоя. Подставляя (2) в (1), получаем $W = c^2 (m - m_0)$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} = 1{,}1$. Из теории относительности известно, что масса дейтона зависит от скорости его движения следующим образом $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость дейтона. Решая совместно уравнения (3) и (4), получаем $v = \frac{c\sqrt{(m/m_0)^2 - 1}}{m/m_0} = 1{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

23.28. В фазотроне увеличение массы частицы при возрастании ее скорости компенсируется увеличением периода ускоряющего поля. Частота разности потенциалов, подаваемой на дуанты фазотрона, менялась для каждого ускоряющего цикла от $\nu_0 = 25$ МГц до $\nu = 18{,}9$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля фазотрона и кинетическую энергию W вылетающих протонов.

Решение:

Имеем $B = \dfrac{2\pi m_0 \nu_0}{q} = \dfrac{2\pi m \nu}{q} = 1{,}62$ Тл. Поскольку $\dfrac{\nu_0}{\nu} = \dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то $W = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \dfrac{m_0 c^2 (\nu_0 - \nu)}{\nu} = 300$ МэВ.

23.29. Протоны ускоряются в фазотроне до энергии $W = 660$ МэВ, α-частицы — до энергии $W = 840$ МэВ. Для того чтобы скомпенсировать увеличение массы, изменялся период ускоряющего поля фазотрона. Во сколько раз необходимо было изменить период ускоряющего поля фазотрона (для каждого ускоряющего цикла) при работе: а) с протонами; б) с α-частицами?

Решение:

В фазотроне при ускорении релятивистских частиц, когда их скорость приближается к скорости света, их масса заметно возрастает. Следовательно, возрастает и период обращения частицы. Чтобы сохранить синхронизацию, увеличивают период ускоряющего поля фазотрона. Начальный и конечный периоды можно найти аналогично, как в циклотроне (см. задачу 12.18): $T_0 = \dfrac{2\pi m_0}{qB}$; $T = \dfrac{2\pi m}{qB}$, где m_0 — масса покоя, m — конечная масса. $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{2\pi m}{qB}\dfrac{qB}{2\pi m_0} = \dfrac{m}{m_0}$. Релятивистская энергия частицы

$\varepsilon = mc^2$, где c — скорость света. Энергия покоя $\varepsilon_0 = m_0c^2$. По закону сохранения энергии разность начальной и конечной энергий составит кинетическая энергия, полученная частицей при ускорении фазотроном, $W = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$, отсюда $m = \frac{W}{c^2} + m_0$.

$\frac{T}{T_0} = \frac{W / c^2 + m_0}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} + 1$. а) Для протона $W = W_p = 660 \times$ $\times 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}7$. б) Для α-частицы $W = W_\alpha = 840 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}2$.