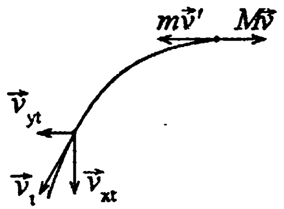
2.68. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 2$ кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент бросания ее скорость была $v = 0{,}1$ м/с. Масса тележки с человеком $M = 100$ кг. Найти кинетическую энергию $W_к$ брошенного камня через время $t = 0{,}5$ с после начала движения.

Решение:



Обозначим v' — скорость камня в начальный момент времени, v_t — его скорость в момент времени $t = 0{,}5$ с. По закону сохранения импульса $Mv = mv'$ — (1); $W_k = \dfrac{mv_t^2}{2}$ — (2); $v_t^2 = v_{xt}^2 + v_{yt}^2$, где $v_{xt} = v'$; $v_{yt} = gt$. Из (1) $v' = \dfrac{Mv}{m_1}$, тогда $v_t^2 = \dfrac{M^2v^2}{m^2} + g^2t^2 = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{m^2}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим $W_k = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{2m}$; $W_k = 49$ Дж.

2.69. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1{,}5$ кг и неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Какое время t будут двигаться эти тела после удара, если коэффициент трения $k = 0{,}05$?

Решение:

Будем считать удар абсолютно неупругим. По закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$, отсюда $u = \dfrac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$ — (1). С другой стороны, $u = at$ — (2), где ускорение a можно выразить из второго закона Ньютона $F_{тр} = (m_1 + m_2) \cdot a$; $k(m_1 + m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$, откуда $a = kg$ — (3). Выразим из (2): $t = \frac{u}{a}$. Подставим в данное уравнение (1) и (3): $t = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{kg(m_1 + m_2)}$; $t = 0{,}58$ с.

2.70. Автомат выпускает пули с частотой $n = 600$ мин$^{-1}$. Масса каждой пули $m = 4$ г, ее начальная скорость $v = 500$ м/с. Найти среднюю силу отдачи $\overline{F}$ при стрельбе.

Решение:

Среднюю силу отдачи можно найти по второму закону Ньютона $F = ma = m\frac{v}{t}$, где $t = \frac{1}{n}$ — время, за которое автомат выпускает одну пулю. По условию $n = 600$ мин$^{-1} = 10$ с$^{-1}$. Отсюда $F = mvn$; $F = 20$ Н.

2.71. На рельсах стоит платформа массой $m_1 = 10$ т. На платформе закреплено орудие массой $m_2 = 5$ т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда $m_3 = 100$ кг, его скорость относительно орудия $v_0 = 500$ м/с. На какое расстояние s откатится платформа при выстреле, если: а) платформа стояла неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью $v = 18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении ее движения; в) платформа двигалась со скоростью $v = 18$ км/ч и выстрел был произведен в направлении противоположном направлению ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы $k = 0{,}002$.

Решение:

а) По закону сохранения импульса $m_3 v_0 = (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда $u = \frac{m_3 v_0}{m_1 + m_2}$ — (1). По второму закону Ньютона $F_{тр} = (m_1 + m_2) \cdot a$ или $k(m_1 + m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$, откуда

$a = kg$ — (2). Расстояние, на которое откатится платформа, $s = ut - \frac{at^2}{2}$, где $u = at$ — скорость платформы в первый момент после выстрела. $t = \frac{u}{a}$, тогда $s = \frac{u^2}{a} - \frac{au^2}{2a^2} = \frac{u^2}{2a}$. Подставив (1) и (2), получим, $s = \frac{m_3^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)^2 kg}$; $s = 284$ м.

б) По закону сохранения импульса $m_3 v_0 - (m_1 + m_2) \times u = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v$, откуда $u = \frac{m_3 v_0 - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v}{m_1 + m_2}$; $u = -1{,}7$ м/с и будет направлено в обратную сторону относительно v_0 и v. Расстояние, на которое откатится платформа: $s = \frac{u^2}{2a} = \frac{u^2}{2kg}$; $s = 73{,}7$ м.

в) По закону сохранения импульса $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = (m_1 + m_2) \cdot u - m_3 v_0$, откуда $u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v + m_3 v_0}{m_1 + m_2}$; $u = 8{,}4$ м/с направление выбрано правильно. Пройденный платформой путь $s = \frac{u^2}{2kg}$; $s = 1800$ м.

2.72. Из орудия массой $m_1 = 5$ т вылетает снаряд массой $m_2 = 100$ кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $W_{к2} = 7{,}5$ МДж. Какую кинетическую энергию $W_{к1}$ получает орудие вследствие отдачи?

Решение:

Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (1). Кинетическая энергия орудия сразу после выстрела

$W_{к1}=\dfrac{m_1v_1^2}{2}$ — (2). Кинетическая энергия снаряда $W_{к2}=\dfrac{m_1v_2^2}{2}$ — (3). Из (1) $v_1=\dfrac{m_2v_2}{m_1}$; из (3) $v_2^2=\dfrac{2W_{к2}}{m_2}$, тогда $v_1^2=\dfrac{m_2^2\cdot 2W_{к2}}{m_1^2\cdot m_2}=\dfrac{2m_2W_{к2}}{m_1^2}$ — (4). Подставив (4) в (2), получим $W_{к1}=\dfrac{m_1 2m_2W_{к2}}{2m_1^2}=\dfrac{m_2}{m_1}W_{к1}$; $W_{к1}=150$ кДж.

2.73. Тело массой $m_1=2$ кг движется со скоростью $v_1=3$ м/с и нагоняет тело массой $m_2=8$ кг, движущееся со скоростью $v_2=1$ м/с. Считая удар центральным, найти скорости u_1 и u_2 тел после удара, если удар а) неупругий; б) упругий.

Решение:

Считаем, что движение происходит вдоль горизонтальной оси в одном направлении. а) По закону сохранения импульса $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)\cdot u$, где u — общая скорость двух тел после неупругого удара. Отсюда $u=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$; $u_1=u_2=u=1{,}4$ м/с*. б) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии: $m_1v_1+m_2v_2=m_2u_2+m_1u_1$ — (1); $\dfrac{m_1v_1^2}{2}+\dfrac{m_2v_2^2}{2}=\dfrac{m_1u_1^2}{2}+\dfrac{m_2u_2^2}{2}$ — (2). Из (2) получим $m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2$ — (3). Преобразовав (1) и (3), решим систему уравнений: $\begin{cases} m_1(v_1-u_1)=m_2(u_2-v_2), \\ m_1(v_1^2-u_1^2)=m_2(u_2^2-v_2^2). \end{cases}$ Разделив первое

---

* Ответ в данной задаче не совпадает с ответом первоисточника: а) $u_1=u_2=1{,}8$ м/с; б) $u_1=0{,}6$ м/с, $u_2=2{,}6$ м/с.

уравнение на второе, получим: $\frac{v_1 - u_1}{v_1^2 - u_1^2} = \frac{u_2 - v_2}{u_2^2 - v_2^2}$, откуда $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$ или $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ — (4). Тогда из (1) $u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2(v_1 + u_1 - v_2)}{m_1}$; $u_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times$ $\times(2v_2 - v_1)$; $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1}$ — (5). Подставляя числовые данные в (5) и (4), получим $u_1 = -0{,}2$ м/с; $u_2 = 1{,}8$ м/с.

2.74. Каково должно быть соотношение между массами m_1 и m_2 тел предыдущей задачи, чтобы при упругом ударе первое тело остановилось?

Решение:

Воспользовавшись формулой, полученной в предыдущей задаче, и приравняв скорость первого тела после удара u_1 к нулю, найдем соотношение масс m_1 и m_2. Имеем $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1} = 0$. Следовательно, $v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times$ $\times(2v_2 - v_1) = 0$; $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_1 - 2v_2}$, откуда $\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{3-2} = 3$ или $m_2 = 3m_1$.

2.75. Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:

Первое тело до удара обладало кинетической энергией $W_к = \frac{m_1 v^2}{m_1 + m_2}$. После удара оба тела начали двигаться с общей скоростью $u=\dfrac{m_1 v}{m_1+m_2}$. Кинетическая энергия обоих тел после удара стала $W'_к=\dfrac{(m_1+m_2)\cdot u^2}{2}$; $W'_к=\dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)}$. Разность $W_{к1}-W'_к$ равна количеству теплоты Q, выделившемуся при ударе: $Q=\left(m_1 v^2/2\right)-\dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1+m_2)}$; $Q=12$ Дж.

2.76. Тело массой $m_1=5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2=2{,}5$ кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией $W'_{к2}=5$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ и $W'_{к1}$ первого тела до и после удара.

Решение:

Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. В соответствии с условием движение происходит также вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса в проекции на ось $m_1 v_1=m_1 v'_1+m_2 v'_2$ — (1), где v'_1 и v'_2 — скорости первого и второго тела после удара. Часть своей кинетической энергии первое тело в момент удара передает второму телу. $W_{к1}=W'_{к1}+W'_{к2}$ — (2); $\dfrac{m_1 v_1^2}{2}=\dfrac{m_1(v'_1)^2}{2}+W'_{к2}$ или $m_1 v_1^2=m_1(v'_1)^2+2W'_{к2}$ — (3). Кинетическая энергия второго тела после удара $W'_{к2}=\dfrac{m_2(v'_2)^2}{2}$, откуда $(v'_2)^2=\dfrac{2W'_{к2}}{m_2}$ — (4).

Подставив (4) в (1), получим $m_1 v_1=m_1 v'_1+m_2\sqrt{\dfrac{2W'_{к2}}{m_2}}=$

$= m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}$, отсюда $v_1 = \dfrac{m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}}{m_1}$ — (5). Подставив (5) в (3), найдем скорость первого тела после удара.

$m_1 \dfrac{\left(m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}\right)^2}{m_1^2} = m_1 (v_1')^2 + 2W_{к2}'$; $\left(m_1 v_1' + \sqrt{2m_2 W_{к2}'}\right)^2 =$

$= (m_1 v_1')^2 + 2m_1 W_{к2}'$; $(m_1 v_1')^2 + 2m_1 v_1' \sqrt{2m_2 W_{к2}'} + 2m_2 W_{к2}' =$

$= (m_1 v_1')^2 + 2m_1 W_{к2}'$, откуда $v_1' = \dfrac{2W_{к2}'(m_1 - m_2)}{2m_1\sqrt{2m_2 W_{к2}'}} =$

$= \dfrac{\sqrt{W_{к2}'}(m_1 - m_2)}{m_1\sqrt{2m_2}}$. Поскольку $W_{к1}' = \dfrac{m_1 (v_1')^2}{2}$, то

$W_{к1}' = \dfrac{m_1 W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1^2 m_2} = \dfrac{W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}$; $W_{к1}' = 0{,}62$ Дж.

Тогда из (2) $W_{к1} = 5{,}62$ Дж.

2.77. Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2{,}5$ кг. Кинетическая энергия системы двух тел непосредственно после удара стала $W_к' = 5$ Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ первого тела до удара.

Решение:

Движение осуществляется вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u$ — (1), где v_1 — скорость первого тела до удара, u — скорость системы двух тел после удара. Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$ — (2). Из (1) $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}$. Найдем u из выражения для кинетической энергии системы двух тел после удара.

$W_к = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2}$, откуда $u = \sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}$, тогда

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}}{m_1}; \quad v_1 = \frac{\sqrt{2W_к(m_1 + m_2)}}{m_1} \quad — \quad (3).$$

Подставив (3) в (2), получим $W_{к1} = \frac{m_1 2W_к(m_1 + m_2)}{2m_1^2}$;

$W_{к1} = \frac{W_к(m_1 + m_2)}{m_1}$; $W_{к1} = 7{,}5$ Дж.

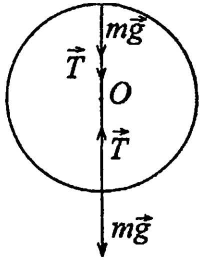
2.78. Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются неупруго. Скорости тел до удара были $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара $u = 1$ м/с и по направлению совпадает с направлением скорости v_1. Во сколько раз кинетическая энергия $W_{к1}$ первого тела была больше кинетической энергии $W_{к2}$ второго тела?

Решение:

Отношение кинетических энергий первого и второго тела до удара можно выразить следующим образом: $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\cdot\frac{2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}$ — (1). Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$ или $m_1(v_1 - u) = m_2(u + v_2)$, откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{u + v_2}{v_2 - u}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{v_1^2(u + v_2)}{v_2^2(v_1 - u)}$; $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = 1{,}25$.

2.79. Два шара с массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг подвешены на нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Первый шар отклоняют на высоту $h_0 = 4{,}5$ см и отпускают. На какую высоту h поднимутся шары после удара, если удар: а) упругий; б) неупругий?

Решение:



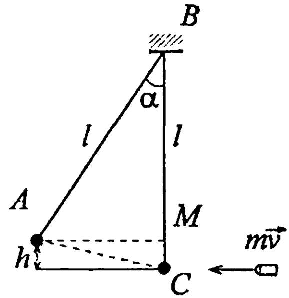
Систему шаров будем считать замкнутой. а) Упругий удар. Пусть v_1 — скорость первого шара в момент удара, v_1' и v_2' — скорости первого и второго шаров непосредственно после удара. Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ — (1). Если принять за нулевой уровень потенциальной энергии положение равновесия, то при отклонении первого шара он приобрел потенциальную энергию m_1gh_0, которая после удара распределилась между двумя шарами, сначала перейдя в кинетическую энергию, а затем, когда они отклонились на высоту h_1 — первый и h_2 — второй, — в потенциальную: $m_1gh_0 = m_1gh_1 + m_2gh_2$ — (2); $m_1gh_0 = \frac{m_1v_1^2}{2}$ — (3); $m_1gh_1 = \frac{m_1(v_1')^2}{2}$ — (4); $m_2gh_2 = \frac{m_2(v_2')^2}{2}$ — (5); Из уравнения (2) $m_1h_0 = m_1h_1 + m_2h_2$, откуда $h_2 = \frac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)$ — (6). Из уравнений (3) и (4) выразим скорости шаров: $v_1 = \sqrt{2gh_0}$; $v_1' = \sqrt{2gh_1}$; $v_2' = \sqrt{2gh_2}$. Подставив полученные выражения в (1), произведем преобразования: $m_1\sqrt{2gh_0} = m_1\sqrt{2gh_1} + m_2\sqrt{2gh_2}$; $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{h_2}$ или с учетом (6); $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{\frac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)}$; $m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) = \sqrt{m_2m_1(h_0 - h_1)}$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1 \times (h_0 - h_1)$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1(h_0 - h_1)$; $m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) =$

$= m_2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)$; $\sqrt{h_0}(m_1 - m_2) = \sqrt{h_1}(m_1 + m_2)$; $\sqrt{h_1} = \frac{\sqrt{h_0}(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, отсюда $h_1 = h_0\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; $h_1 = 0{,}005$ м.

Тогда из уравнения (6) $h_2 = 0{,}08$ м. б) Неупругий удар. Потенциальная энергия первого шара при прохождении положения равновесия перешла в кинетическую энергию. $m_1 g h_0 = \frac{m_1 v^2}{2}$ — (1), где v — скорость первого шара в нижней точке. После соударения шаров по закону сохранения импульса $m_1 v = (m_1 + m_2)\cdot u$ — (2), где u — скорость системы двух шаров непосредственно после удара. Кинетическая энергия системы после отклонения шаров на высоту h перешла в потенциальную энергию. $\frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2} = (m_1 + m_2)\cdot gh$ — (3). Выразим из (1) v и подставим в (2) $v = \sqrt{2gh_0}$; $m_1\sqrt{2gh_0} = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \frac{m_1\sqrt{2gh_0}}{m_1 + m_2}$. Подставив полученное выражение в (3), получим $\frac{(m_1 + m_2)m_1^2 \cdot 2gh_0}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)\cdot gh$, отсюда $h = \frac{m_1^2 h_0}{(m_1 + m_2)^2}$; $h = 0{,}02$ м.

2.80. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня $l = 1$ м. Найти скорость v пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

Решение:



Силу сопротивления воздуха не учитываем, следовательно, систему «пуля — шар» можно считать замкнутой. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы: $mv = (m+M)\cdot u$ — (1), где u — скорость шара вместе с пулей после удара. В результате взаимодействия шара с пулей, он приобрел кинетическую энергию, которая после отклонения стержня на $\angle\alpha$ перешла в потенциальную энергию $\frac{(m+M)\cdot u^2}{2} = (m+M)\cdot gh$ — (2).

Из (1) выразим u: $u = \frac{mv}{m+M}$, или $u = \frac{mv}{1001m} = \frac{v}{1001}$. Из (2) получим: $\frac{u^2}{2} = gh$, $\frac{v^2}{2\cdot(1001)^2} = gh$. Найдем h: $BM = l\cos\alpha$, $h = l - BM$; $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$, тогда $v = 1001\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, $v \approx 550$ м/с.

2.81. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m_1 = 5$ г, масса шара $m_2 = 0{,}5$ кг. Скорость пули $v_1 = 500$ м/с. При каком предельном расстоянии l от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

Решение:

См. рисунок к задаче 2.80. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы.

$m_1v_1 = (m_1+m_2)\cdot v_2$ — (1); $\frac{(m_1+m_2)\cdot v_2^2}{2} = (m_1+m_2)gh$ — (2),

где v_2 — скорость шара с пулей после удара. Высота, на которую поднимется шар $h=2l$. Из (2) $\frac{v_2^2}{2}=2gl$, откуда $l=\frac{v_2^2}{4g}$. Из (1) $v_2=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$, тогда $l=\frac{m_1^2v_1^2}{(m_1+m_2)^2\cdot 4g}$; $l=0{,}64$ м.

2.82. Деревянным молотком, масса которого $m_1=0{,}5$ кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара $v_1=1$ м/с. Считая коэффициент восстановления при ударе молотка о стенку $k=0{,}5$, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе. (Коэффициентом восстановления материала тела называют отношение скорости после удара к его скорости до удара.)

Решение:

По условию $\frac{v_2}{v_1}=k$. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли кинетической энергии молотка $Q=W_{\text{к}1}-W_{\text{к}2}$, где $W_{\text{к}1}=\frac{m_1v_1^2}{2}$; $W_{\text{к}2}=\frac{m_1v_2^2}{2}$. Т.к. $v_2=kv_1$, то $Q=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{k^2m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1v_1^2(1-k^2)}{2}$; $Q=0{,}188$ Дж.

2.83. В условиях предыдущей задачи найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.

Решение:

Согласно закону изменения импульса $F\Delta\vec{t}=m_1\vec{v}_2-m_1\vec{v}_1$ в проекции на горизонтальную ось $F\Delta t=m_1v_1-(-m_1v_2)=$ $=m_1(v_1+v_2)$. Учитывая, что $v_2=kv_1$, $F\Delta t=m_1(v_1+kv_1)=$ $=m_1v_1(1+k)$; $F\Delta t=0{,}75$ Н·с.

2.84. Деревянный шарик массой $m = 0{,}1$ кг падает с высоты $h_1 = 2$ м. Коэффициент восстановления при ударе шарика о пол $k = 0{,}5$. Найти высоту h_2, на которую поднимется шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:

Потенциальная энергия шарика mgh_1 в момент удара о пол переходит в кинетическую энергию: $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1), где v_1 — скорость шарика в момент удара. Когда шарик отскакивает от пола, он обладает кинетической энергией $\frac{mv_2^2}{2}$, которая переходит в потенциальную $mgh_2 = \frac{mv_1^2}{2}$. По условию $v_2 = kv_1$, тогда $mgh_2 = \frac{k^2mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) $g = \frac{v_1^2}{2h_1}$, из уравнения (2) $g = \frac{k^2v_1^2}{2h_2}$. Приравняв правые части уравнений, получим $\frac{v_1^2}{2h_1} = \frac{k^2v_1^2}{2h_2}$, откуда $h_2 = k^2h_1$; $h_2 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$ м. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли потенциальной энергии $Q = W_{п1} - W_{п2} = mgh_1 - mgh_2 = mg(h_1 - h_2)$; $Q = 1{,}47$ Дж.

2.85. Пластмассовый шарик, падая с высоты $h_1 = 1$ м несколько раз отскакивает от пола. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о пол, если с момента падения до второго удара о пол прошло время $t = 1{,}3$ с.

Решение:

Падая с высоты h_1, шарик подлетает к полу со скоростью v_1, а отскакивает от него со скоростью $v_2 = kv_1$. Согласно закону сохранения механической энергии $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ и $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$, откуда $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, а $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. После почленного деления получим $\frac{v_2}{v_1} = \frac{kv_1}{v_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$, т.е. $h_2 = k^2 h_1$. Промежуток времени с момента падения шарика до второго удара о пол $t = t_1 + 2t_2$, где t_1 — время падения шарика с высоты h_1 и t_2 — время падения шарика с высоты h_2. Так как $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ и $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = k\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, то $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}(1+2k)$; отсюда $k = \frac{t - \sqrt{2h_1/g}}{2\sqrt{2h_1/g}}$; $k = 0{,}94$.

2.86. Стальной шарик, падая с высоты $h_1 = 1{,}5$ м на стальную плиту, отскакивает от нее со скоростью $v_2 = 0{,}75 \cdot v_1$, где v_1 — скорость, с которой он подлетает к плите. На какую высоту h_2 он поднимется? Какое время t пройдет с момента падения до второго удара о плиту?

Решение:

Рассуждая как в задаче 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{0{,}75^2 mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) имеем $gh_1 = \frac{v_1^2}{2}$ — (3). Из уравнения (2) $\frac{gh_2}{0{,}56} = \frac{v_1^2}{2}$ — (4). Тогда $\frac{gh_2}{0{,}56} = gh_1$, откуда $h_2 = 0{,}56 h_1$; $h_2 = 0{,}56 \cdot 1{,}5 = 0{,}84$ м. Время t можно разложить на три составляющие: t_1 — время от начала падения до первого удара о плиту; t_2 — время от первого удара о плиту до подъема на высоту h_2; t_3 — время от начала падения с высоты h_2 до второго удара о плиту. $t = t_1 + t_2 + t_3$. Скорости шарика на этих участках: $v_1 = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{g} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, с учетом (3); $v_2 = gt_2$, откуда $t_2 = 0{,}75t_1$, т.к. по условию $v_2 = 0{,}75v_1$; $v_3 = v_2 = gt_3$, следовательно, $t = t_1 + 2 \cdot 0{,}75t_1 = 2{,}5t_1 = 2{,}5\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$; $t = 1{,}4$ с.

2.87. Металлический шарик, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о плиту.

Решение:

Воспользуемся уравнением (3) из задачи 2.84 $h_2 = k^2 h_1$, отсюда $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$; $k = 0{,}9$.

2.88. Стальной шарик массой $m = 20$ г, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный плитой за время удара, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение:

Рассуждая аналогично 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ — (2). Тогда из (1) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ — (3), из (2) соответственно $v_2 = \sqrt{2gh_2}$ — (4). Согласно закону изменения импульса $F\Delta\vec{t} = m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1$ или в проекции на горизонтальную ось: $F\Delta t = m\Delta v = m(v_1 - (-v_2)) = m(v_1 + v_2)$. Подставляя (3) в (4) получим $F\Delta t = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)$; $F\Delta t = 0{,}17$ Н·с. Количество выделившейся теплоты равно убыли потенциальной энергии $Q = mgh_1 - mgh_2 = mg \times$ $\times (h_1 - h_2)$; $Q = 37{,}2$ мДж.

2.89. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть кинетической энергии $W_{к1}$ первого тела переходит при ударе в тепло. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение:

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара кинетические энергии обоих тел $W'_к = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$, где $u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$ — общая скорость тел.

Следовательно, $W'_к = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Тогда кинетическая энергия, перешедшая при ударе в тепло: $W_{к1} - W'_к = \frac{m_1 v^2}{2} -$ $- \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$. Искомое отношение: $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}5$; б) Если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}1$.

2.90. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, найти, какую часть кинетической энергии $W_{к1}$ первое тело передает второму при ударе. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение:

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара второе тело приобрело кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2 u^2}{2}$, где $u = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$. Таким образом, первое тело передало второму телу кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2$. Искомое отношение: $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 1$; б) если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 0{,}36$.

2.91. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Каким должно быть отношение масс m_1 / m_2, чтобы при центральном упругом ударе скорость первого тела уменьшилась в 1,5 раза? С какой кинетической энергией $W'_{к2}$ начинает двигаться при этом второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела $W_{к1} = 1$ кДж?

Решение:

Из условия следует, что движение происходит вдоль горизонтальной оси. Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данного взаимодействия: $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ — (1); $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$ — (2). Умножив (2) на 2 и учитывая, что $v_1 = 1{,}5 u_1$, получим $m_1 \cdot 1{,}5 u_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$; $m_1 \cdot 2{,}25 u_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$ или $m_1 \cdot 0{,}5 u_1 = m_2 u_2$ — (3); $m_1 \cdot 1{,}25 u_1^2 = m_2 u_2^2$ — (4). Выразим u_2 из (3) $u_2 = \frac{0{,}5 m_1 u_1}{m_2}$ — (5). Подставим это выражение в (4): $1{,}25 m_1 u_1^2 = m_2 \left(\frac{0{,}5 m_1 u_1}{m_2} \right)^2$; $1{,}25 = \frac{0{,}25 m_1}{m_2}$.

Отсюда $\frac{m_1}{m_2} = 5$. После столкновения первоначальная кинетическая энергия первого тела перераспределилась между первым и вторым телом, которые стали двигаться со скоростями u_1 и u_2 соответственно. $W_{к1} = W'_{к1} + W'_{к2}$, где $W'_{к1} = \frac{m_1 u_1^2}{2}$; $W'_{к2} = \frac{m_2 u_2^2}{2}$; $u_2^2 = \frac{1{,}25 m_1 u_1^2}{2}$. По условию $W_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot 2{,}25 u_1^2}{m_2}$, откуда $u_1^2 = \frac{2 W_{к1}}{2{,}25 m_1}$. Из (5) найдем $u_2^2 = \frac{1{,}25 m_1 \cdot 2 W_{к1}}{m_2 \cdot 2{,}25 m_1} = \frac{2{,}5 W_{к1}}{2{,}25 m_2}$. Тогда $W'_{к2} = \frac{m_2 \cdot 2{,}5 \cdot W_{к1}}{2 \cdot 2{,}25 \cdot m_2} = \frac{0{,}5 \cdot W_{к1}}{0{,}9} = \frac{5}{9} W_{к1}$; $W'_{к2} = \frac{5}{9}$ кДж.

2.92. Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро атома углерода $(m = 12 m_0)$. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия $W_к$ нейтрона при ударе.

Решение:

Кинетическая энергия нейтрона до и после удара выражается следующими соотношениями: $W_{к1}=\frac{m_0 v_1^2}{2}$ — (1); $W_{к2}=\frac{m_0 v_2^2}{2}$ — (2), откуда $\frac{W_{к1}}{W_{к2}}=\frac{v_1^2}{v_2^2}$. По закону сохранения энергии $W_{к1}=W_{к2}+W'_к$ — (3), где $W'_к$ — кинетическая энергия ядра атома углерода после взаимодействия, $W'_к=\frac{12m_0 u^2}{2}$ — (4). Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $m_0 v_1^2=m_0 v_2^2+12m_0 u^2$, откуда $v_1^2=v_2^2+12u^2$ — (5). Согласно закону сохранения импульса $m_0 v_1=m_0 v_2+12m_0 u$, откуда $v_1=v_2+12u$ или $u=\frac{v_1-v_2}{12}$ — (6). Подставим (6) в (5) и произведем преобразования: $v_1^2=v_2^2+12\cdot\left(\frac{v_1-v_2}{12}\right)^2$; $v_1^2=v_2^2+\frac{(v_1-v_2)^2}{12}$; $v_1^2-v_2^2=\frac{(v_1-v_2)^2}{12}$; $v_1+v_2=\frac{v_1-v_2}{12}$; $12\left(\frac{v_1}{v_2}+1\right)=\frac{v_1}{v_2}-1$; $11\frac{v_1}{v_2}=-13$. Отсюда $\frac{v_1^2}{v_2^2}=1{,}4$, т.е. $\frac{W_{к1}}{W_{к2}}=1{,}4$.

2.93. Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро: а) атома углерода $(m=12m_0)$; б) атома урана $(m=235m_0)$. Считая удар центральным и упругим, найти, какую часть скорости v потеряет нейтрон при ударе.

Решение:

а) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии данной системы тел. $m_0 v=-m_0(v-\Delta v)+$ $+12m_0 u$ — (1). Знак «–» указывает на изменение направления скорости нейтрона на противоположный. $\frac{m_0 v^2}{2}=\frac{m_0(v-\Delta v)^2}{2}+\frac{12m_0u^2}{2}$ — (2). Скорость нейтрона после удара $v-\Delta v$; u — скорость ядра атома углерода после удара. Разделив (1) на m_0, получим $v=-(v-\Delta v)+12u$, откуда $u=\frac{2(v-\Delta v)}{12}$. Подставим в уравнение (2) выражение для u и преобразуем его: $v^2=(v-\Delta v)^2+12u^2$, $v^2=(v-\Delta v)^2+12\left(\frac{2v-\Delta v}{12}\right)^2$, $v^2-(v-\Delta v)^2=\frac{(2v-\Delta v)^2}{12}$, $\Delta v(2v-\Delta v)=\frac{(2v-\Delta v)^2}{12}$, $12\Delta v=$ $=2v-\Delta v$, $13\frac{\Delta v}{v}=2$ и получаем $\frac{\Delta v}{v}=\frac{2}{13}$.

б) Рассуждая аналогично случаю а), запишем: $m_0 v=-m_0(v-\Delta v)+235m_0u$, $m_0v^2/2=m_0(v-\Delta v)^2/2+$ $+\frac{235m_0u^2}{2}$, $2v-\Delta v=235u$ и $u=\frac{2v-\Delta v}{235}$. Подставляя в формулу (2) новые значения и преобразуя ее, получим: $v^2=(v-\Delta v)^2+235u^2$, $v^2-(v-\Delta v)^2=\frac{(2v-\Delta v)^2}{235}$, $235\Delta v=2v-\Delta v$; $235\Delta v=2v-\Delta v$, $236\Delta v=2v$ и $\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{118}$.

2.94. На какую часть уменьшится вес тела на экваторе вследствие вращения Земли вокруг оси?

Решение:

На экваторе на тело действует сила тяготения $F=G\frac{mM}{R^2}$ — (1) (M — масса Земли, m — масса тела, R — радиус Земли, G — гравитационная постоянная) и сила реакции опоры N, при этом тело, участвуя в суточном вращении Земли, движется по окружности радиусом R. Составим уравнение на основании второго закона Ньютона $F - N = m\omega^2 R$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость; T — период вращения Земли вокруг своей оси: $T = 86400$ с. Тогда $F - N = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, откуда $N = F - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$ — (2). По третьему закону Ньютона вес тела на экваторе $P_э = N$ — (3). Вес покоящегося тела для любой точки Земли численно равен силе тяжести: $P = mg$ — (4). Относительное изменение веса тела $\delta = \frac{P - P_э}{P}$ — (5). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P_э = G\frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$ — (6). Подставляя (4) и (6) в (5), получим $\delta = 1 - \frac{GM}{gR^2} + \frac{4\pi^2 R}{gT^2}$ — (7). Примем ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Подставляя числовые данные в (7), получим $\delta = 0{,}34\%$.

2.95. Какой продолжительности T должны были бы быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса.

Решение:

Вес тела на экваторе $P_э = G\frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$ (см. задачу 2.94). По условию $P_э = 0$, тогда $\frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$. Отсюда $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$. Подставляя числовые данные, получим $T = 5056$ с $= 1$ ч 24 мин.

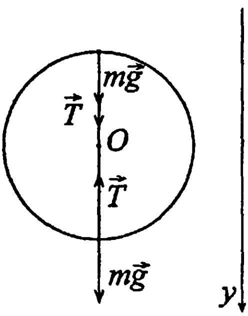
2.96. Трамвайный вагон массой $m = 5$ т идет по закруглению радиусом $R = 128$ м. Найти силу бокового давления F колес на рельсы при скорости движения $v = 9$ км/ч.

Решение:

При равномерном движении по окружности $a_\tau = 0$ и $a = a_n$. Тогда второй закон Ньютона запишется в виде: $F = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$, отсюда $F = 245$ Н.

2.97. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной $l = 60$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти наименьшую скорость v вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается. Какова сила натяжения веревки T при этой скорости в высшей и низшей точках окружности? Масса ведерка с водой $m = 2$ кг.

Решение:



Поскольку вращение вокруг оси О является равномерным, то $a = a_n = \dfrac{v^2}{l}$. На воду в ведерке в высшей точке действует центробежная сила равная $m\dfrac{v^2}{l}$, направленная вверх и сила тяжести mg, направленная вниз. Вода не будет выливаться из ведерка при условии, что $m\dfrac{v^2}{l} = mg$ или $g = \dfrac{v^2}{l}$, откуда $v = \sqrt{lg}$; $v = 2{,}43$ м/с. В проекции на ось y уравнение движения ведра с водой в верхней точке: $ma = mg + T$, в нижней точке $ma = T - mg$. Учитывая, что $g = \dfrac{v^2}{l} = a_n$, получим: в верхней точке $T = 0$, в нижней точке $T = 2mg = 39{,}2$ Н.