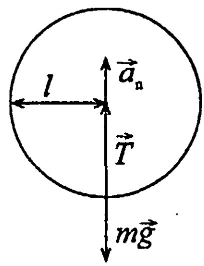
2.98. Камень, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения n веревка разорвется, если известно, что она разрывается при десятикратной силе тяжести, действующей на камень?

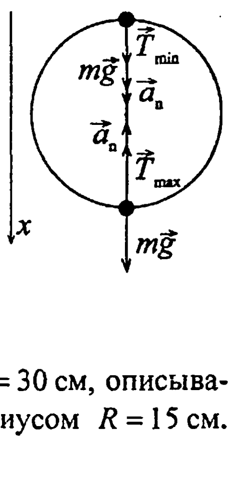
Решение:



По второму закону Ньютона $T - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \dfrac{v^2}{l}$ — (2). Линейная скорость $v = \omega \cdot l$; $\omega = 2\pi n$, тогда $v = 2\pi n l$, откуда $n = \dfrac{v}{2\pi l}$ — (3). Из (1) $v = \sqrt{a_n l}$; Из (2) $a_n = \dfrac{T - mg}{m} = \dfrac{9mg}{m} = 9g$, тогда $v = 3\sqrt{lg}$ — (4). Подставив (4) в (3), получим $n = \dfrac{3\sqrt{lg}}{2\pi l} = \dfrac{3}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $n = 2{,}12$ об/с.

2.99. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

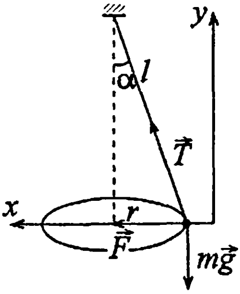
Решение:



По второму закону Ньютона для верхней и нижней точек соответственно $\begin{cases} mg + T_{min} = ma_n & —(1), \\ mg - T_{max} = -ma_n & —(2). \end{cases}$ Сложив (1) и (2), получим $2mg - \Delta T = 0$; $2mg = \Delta T$, отсюда $m = \dfrac{\Delta T}{2g}$; $m \approx 0{,}5$ кг.

2.100. Гирька, привязанная к нити длиной $l = 30$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 15$ см. С какой частотой n вращается гирька?

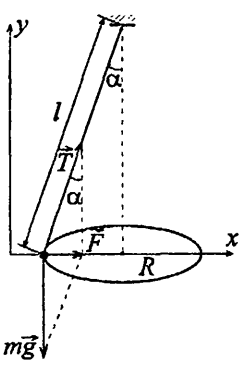
Решение:



В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила: $F = T\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$ ($a_\tau = 0$, т.к. движение равномерное) или $TR/l = ma_n$. По оси y: $T\cos\alpha - mg = 0$, $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - R^2/l^2}$. Тогда $mgR/l\cos\alpha = ma_n$ или $a_n = \frac{gR}{l\cos\alpha} = \frac{gR}{l\sqrt{1 - R^2/l^2}} = \frac{gR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$, но $a_n = \omega^2 R$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$, откуда $n = (1/2\pi)\times$ $\times\sqrt{a_n/R}$ или $n = 1/2\pi\sqrt{g/\sqrt{l^2 - R^2}}$; $n = 59$ об/мин.

2.101. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $n = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити T.

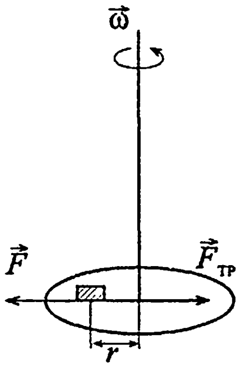
Решение:



В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha =$ $= ma_n$, где $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Учитывая, что $a_n = \omega^2 R = (2\pi n)^2 R$, запишем: $m(2\pi n)^2 R = T\frac{R}{l}$, откуда $T = ml(2\pi n)^2$; $T = 1{,}96$ Н.

2.102. Диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой $n = 30$ об/мин. На расстоянии $r = 20$ см от оси вращения на диске лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения k между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

Решение:



Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, в системе диска, тогда при вращении диска на тело вдоль нормальной оси действует центробежная сила $\vec{F}$ и сила трения $F_{тр}$. Тело не будет соскальзывать с диска, если $F_{тр} \geq F$, т.е. $kmg \geq m\dfrac{v^2}{r}$ или $k \geq \dfrac{v^2}{rg}$. Т.к. $v = \omega \times$ $\times r = 2\pi n r$, то $k \geq \dfrac{4\pi^2 n^2 r}{g}$; $k \geq 0{,}2$.

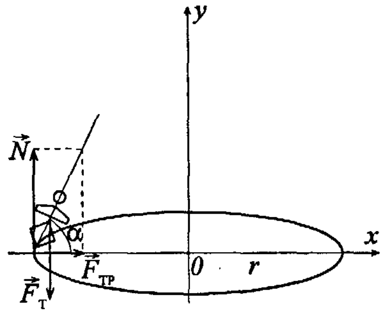
2.103. Самолет, летящий со скоростью $v = 900$ км/ч, делает «мертвую петлю». Каким должен быть радиус «мертвой петли» R, чтобы наибольшая сила F, прижимающая летчика к сидению, была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

Решение:

Искомая сила $F = ma_n = \dfrac{mv^2}{R}$. а) $5mg = \dfrac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \dfrac{v^2}{5g}$; $R \approx 1600$ м. б) $10mg = \dfrac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \dfrac{v^2}{10g}$; $R \approx 711$ м.

2.104. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v = 72$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 100$ м. На какой угол α при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

Решение:



Силы, действующие на мотоциклиста: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила, которая может обеспечить движение мотоциклиста по окружности, — сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно законам статики, для того, чтобы мотоциклист не потерял равновесия, необходимо, чтобы равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ была направлена по прямой, проходящей через центр тяжести. Тогда $tg\alpha = \frac{N}{F_{тр}} = \frac{1}{k}$. Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $ma_n = F_{тр}$ — (1), $0 = N - mg$ — (2), $F_{тр} = kN = kmg$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), учитывая, что $a_n = \frac{v^2}{R}$, получим $\frac{v^2}{R} = kg$ — (4). Выразив k из (4), найдем $tg\alpha = \frac{gR}{v^2}$, откуда $\alpha = 22°$.

2.105. К потолку трамвайного вагона подвешен на нити шар. Вагон идет со скоростью $v = 9$ км/ч по закруглению радиусом $R = 36{,}4$ м. На какой угол α отклонится при этом нить с шаром?

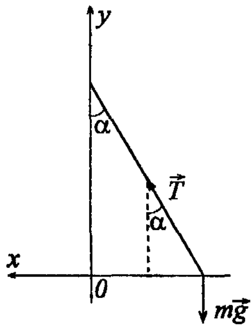
Решение:

Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$ — (1), $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Из (2)

$T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда $mg\,tg\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$,

откуда $tg\alpha = \dfrac{v^2}{gR}$; $tg\alpha = 0{,}018$;

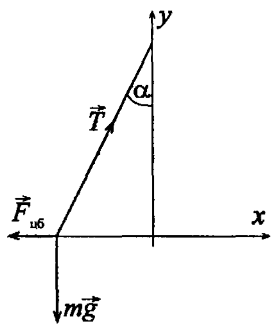
$\alpha \approx 1^o$.



2.106. Длина стержней центробежного регулятора $l = 12{,}5$ см. С какой частотой n должен вращаться центробежный регулятор, чтобы грузы отклонялись от вертикали на угол, равный: а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 30°$?

Решение:

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (1); $mg - T\cos\alpha = 0$ — (2). Из (2) $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда (1) запишем в виде $mg \cdot tg\alpha = ma_n$, откуда $a_n = g\,tg\alpha$ — (3). С другой стороны, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $R = l\sin\alpha$, т. е. $a_n = \omega^2 l\sin\alpha = 4\pi^2 n^2 \cdot l\sin\alpha$ — (4).



Решая совместно (3) и (4), получим $n = \sqrt{\dfrac{a_n}{4\pi^2 l\sin\alpha}}$;

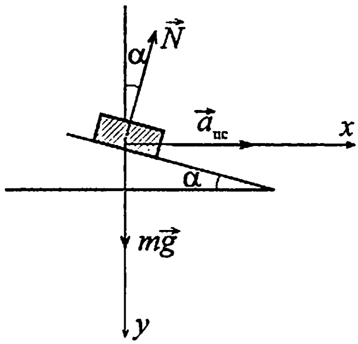
$n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g\,tg\alpha}{l\sin\alpha}}$; $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$.

а) $n = 2$ об/с;

б) $n = 1{,}5$ об/с.

2.107. Шоссе имеет вираж с уклоном $\alpha = 10°$ при радиусе закругления дороги $R = 100$ м. На какую скорость v рассчитан вираж?

Решение:



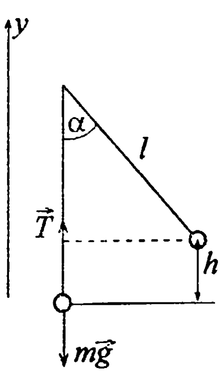
Данную задачу решаем без учета силы трения. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $N\sin\alpha = ma_n$; $mg - N \times \times\cos\alpha = 0$. Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; $mg = N\cos\alpha$;

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\frac{v^2}{R};$$

$g \cdot tg\alpha = \dfrac{v^2}{R}$; $v^2 = gRtg\alpha$, отсюда $v = \sqrt{gRtg\alpha}$; $v = 13{,}5$ м/с= =47,3км/ч.

2.108. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на нити, отклоняют на угол $\alpha = 30°$ и отпускают. Найти силу натяжения нити T в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение:



В момент прохождения грузом положения равновесия согласно второму закону Ньютона в проекции на ось y

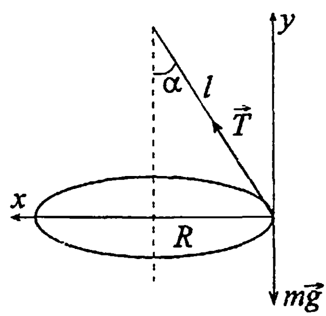
$ma_n = T - mg$ или $m\dfrac{v^2}{l} = T - mg$, откуда

$T = mg + \dfrac{mv^2}{l}$, где l — длина нити. Кроме того, $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Но

$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$. Тогда $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, а $\frac{mv^2}{l} = \frac{m}{l}2gh = \frac{m}{l}2gl(1-\cos\alpha) = 2mg(1-\cos\alpha)$ и сила натяжения $T = mg(1+2(1-\cos\alpha)) = 12{,}4$ Н.

2.109. Мальчик массой $m = 45$ кг вращается на «гигантских шагах» с частотой $n = 16$ об/мин. Длина канатов $l = 5$ м. Какой угол α с вертикалью составляют канаты «гигантских шагов»? Каковы сила натяжения канатов T и скорость v вращения мальчика?

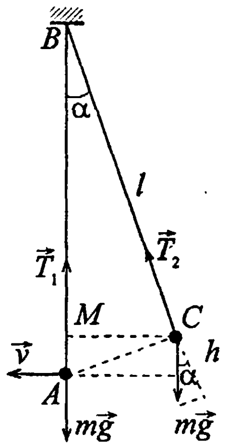
Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (1) и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (2). Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$. Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$ — (3), тогда $a_n = 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$. Подставим выражение для a_n в (2): $T\sin\alpha = m\cdot 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$ или $T = 4\pi^2 n^2 lm$, $T = 632$ Н. $T\cos\alpha = mg$ из (1), откуда $\cos\alpha = \frac{mg}{T}$, $\cos\alpha = 0{,}7$, $\alpha \approx 45°30'$. Скорость найдем из выражения $v = \omega R = 2\pi nl\sin\alpha$, с учетом $\omega = 2\pi n$ и (3): $v \approx 6$ м/с.

2.110. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на невесомом стержне длиной $l = 0{,}5$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. При каком угле отклонения α стержня от вертикали кинетическая энергия груза в его нижнем положении $W_к = 2{,}45$ Дж? Во сколько раз при таком угле отклонения сила натяжения стержня T_1 в нижнем положении больше силы натяжения стержня T_2 в верхнем положении?

Решение:

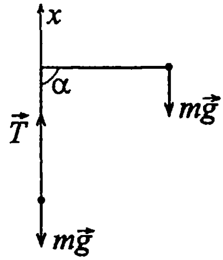


Во время колебаний груза кинетическая энергия, которой он обладает в нижней точке, переходит в потенциальную в верхнем положении. $W_к = \frac{mv^2}{2} = mgh$ — (1). Найдем h: $h = AB - MB$, $h = l - l\cos\alpha$, $h = l(1-\cos\alpha)$. Подставим значение h в (1): $mgl(1-\cos\alpha) = W_к$, $1-\cos\alpha = \frac{W_к}{mgl}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{2{,}45}{1\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5} = 0{,}5$, $\alpha = 60°$. Запишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего положения груза: $\begin{cases} T_2 - mg\cos\alpha = ma_n & —(2), \\ T_1 - mg = ma_n & —(3); \end{cases}$ выразим из (2) и (3) T_2 и T_1: $\begin{cases} T_2 = m(a_n + g\cos\alpha) & —(4), \\ T_1 = m(a_n + g) & —(5); \end{cases}$ но $a_n = \frac{v^2}{l}$, а $v^2 = \frac{2W_к}{ml}$ $v^2 = \frac{2W_к}{ml}$, следовательно, $a_n = \frac{2W_к}{ml}$. Подставив это выражение в (4) и (5), получим следующие уравнения: $T_1 = m\cdot\left(\frac{2W_к}{ml} + g\right) = m\cdot\left(\frac{2W_к + gml}{ml}\right)$ и $T_2 = m\cdot\left(\frac{2W_к}{ml} + g\cos\alpha\right) = m\cdot\frac{2W_к + mlg\cos\alpha}{ml}$. Разделим первое уравнение на второе: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2W_к + mlg}{2W_к + mlg\cos\alpha}$, $T_1/T_2 = 1{,}3$.

2.111. Груз массой m, подвешенный на невесомом стержне, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти силу натяжения T стержня в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение:

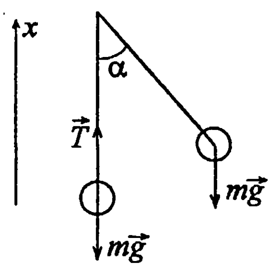
По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия: $T - mg = ma_n$ — (1), но $a_n = \frac{v^2}{l}$. Выразим из (1) T, подставив выражение для a_n: $T = mg + \frac{mv^2}{l}$. В результате преобразования потенциальной энергии в кинетическую $mgl = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v^2 = 2gl$, тогда $T = mg + \frac{m2gl}{l} = 3mg$.



2.112. Груз массой $m = 150$ кг подвешен на стальной проволоке, выдерживающей силу натяжения $T = 2{,}94$ кН. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении грузом положения равновесия?

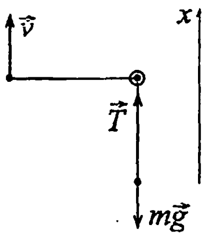
Решение:

Воспользуемся формулой, полученной в задаче 1.108: $T = mg(1 + 2(1 - \cos\alpha))$. Выразим из нее $\cos\alpha$: $T = mg + 2mg - 2mg\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{3mg - T}{2mg}$. Подставив исходные данные, получим: $\cos\alpha = 0{,}5$, следовательно, $\alpha = 60°$.



2.113. Камень массой $m = 0{,}5$ кг привязан к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности $T = 44$ Н. На какую высоту h поднимется камень, если веревка обрывается в тот момент, когда скорость направлена вертикально вверх?

Решение:



Для камня в нижнем положении запишем второй закон Ньютона: $T - mg = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{l}$, $T - mg = m\frac{v^2}{l}$, $v = \sqrt{\frac{l(T-mg)}{m}}$.

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение камня в момент обрыва веревки. В этот момент камень обладает кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$, которая по мере подъема камня переходит в потенциальную. На высоте h вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную, т.е. $\frac{mv^2}{2} = mgh$, откуда $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{l(T-mg)}{2mg}$; $h = 2$ м.

2.114. Вода течет по трубе диаметром $d = 0{,}2$ м, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей закругление радиусом $R = 20{,}0$ м. Найти боковое давление воды P, вызванное центробежной силой. Через поперечное сечение трубы за единицу времени протекает масса воды $m_t = 300$ т/ч.

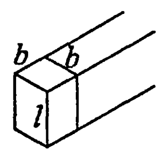
Решение:

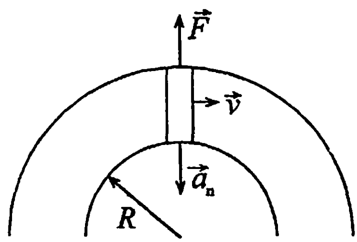
Боковое давление воды $P = \frac{F_{цб}}{ld}$ — (1), где $F_{цб}$ — центробежная сила, l — длина той части трубы, на которую производится давление, по модулю $F_{цб} = \frac{mv^2}{R}$ — (2), где $m = \rho lS$ — (3) — масса воды в объеме Sl (S — площадь поперечного сечения трубы, ρ — плотность воды). Скорость течения воды $v = \frac{m_t}{\rho S}$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $P = \frac{m_t^2}{R\rho dS}$; $P = 56{,}0$ Па.

2.115. Вода течет по каналу шириной $b = 0{,}5$ м, расположенному в горизонтальной плоскости и имеющему закругление радиусом $R = 10$ м. Скорость течения воды $v = 5$ м/с. Найти боковое давление воды P, вызванное центробежной силой.

Решение:

Рассмотрим участок боковой поверхности канала, площадь которого: $S = b \cdot l$. Давление: $P = \frac{F_{цб}}{S}$, где $F_{цб}$ по модулю $F = m\frac{v}{R}$. $m = \rho V = \rho \cdot l \cdot b^2$ — масса воды в данном объеме. $F = \frac{\rho l b^2 v^2}{R}$;





$P = \frac{\rho l b^2 v^2}{Rbl} = \frac{\rho b v^2}{R}$; $P = 1{,}25$ кПа.

2.116. Найти работу A, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $l = 20$ см, если известно, что сила F пропорциональна сжатию l и жесткость пружины $k = 2{,}94$ кН/м.

Решение:

Работа, совершаемая при сжатии пружины, определяется формулой $A = -\int_0^l F dl$ — (1), где l — сжатие. По условию сила пропорциональна сжатию, т.е. $F = -kl$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \int_0^l kl dl = \frac{kl^2}{2}$; $A = 58{,}8$ Дж.

2.117. Найти наибольший прогиб h рессоры от груза массой m, положенного на ее середину, если статический прогиб рессоры от того же груза $h_0 = 2$ см. Каким будет наибольший прогиб, если тот же груз падает на середину рессоры с высоты $H = 1$ м без начальной скорости?

Решение:

При статическом прогибе $mg = kh_0$; отсюда $k = mg / h_0$. При падении этого груза с высоты H имеем $mg(H+h) = \frac{kh^2}{2} = \frac{mgh^2}{2h_0}$, или $h^2 - 2h_0 h - 2h_0 H = 0$. Решая это уравнение, находим $h = h_0 \pm \sqrt{h_0^2 + 2h_0 H}$. Если $H = 0$, то $h = 2h_0 = 4$ см; если $H = 1$ м, то $h = 22{,}1$ см.

2.118. Акробат прыгает в сетку с высоты $H = 8$ м. На какой предельной высоте h над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_0 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает в нее с высоты $H_0 = 1$ м.

Решение:

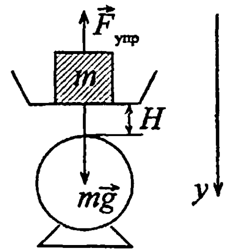
По закону сохранения энергии потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругого взаимодействия $mg(H+h) = k\frac{h^2}{2}$; $mg(H_0 + h_0) = k\frac{h_0^2}{2}$;

Разделив первое уравнение на второе, получим: $\frac{H+h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{H}{H_0+h_0} + \frac{h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{h^2(H_0+h_0) - hh_0^2}{h_0^2(H_0+h_0)} = \frac{H}{H_0+h_0}$; $(H_0+h_0)h^2 - h_0^2 \cdot h - Hh_0^2 = 0$, решим данное квадратное уравнение: $D = h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)$;

$h = \frac{h_0^2 \pm \sqrt{h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)}}{2(H_0+h_0)}$; $h_1 = 1{,}23$ м ; $h_2 = -1{,}07$ м — противоречит условию задачи.

2.119. Груз положили на чашку весов. Сколько делений покажет стрелка весов при первоначальном отбросе, если после успокоения качаний она показывает 5 делений?

Решение:



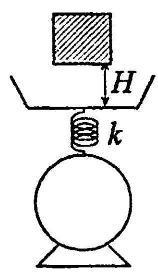
По закону сохранения энергии $W_{п1} = W_{п2}$. Потенциальная энергия гравитационного и упругого взаимодействия $W_{п1} = mgH$; $W_{п2} = \frac{kx^2}{2}$, следовательно, $mgH = \frac{kx^2}{2}$ — (1). После установления равновесия $m\bar{g} + \bar{F}_{упр} = 0$, где $F_{упр} = -kx$ — закон Гука.

В проекциях на ось y: $mg + kx = 0$, откуда $k = \frac{mg}{x}$ (2).

Подставив (2) в (1), получим $mgH = \frac{mg}{x} \cdot \frac{x^2}{2}$; $H = \frac{x}{2}$; $x = 2H$, отсюда $x = 2 \cdot 5 = 10$ делений.

2.120. Груз массой $m = 1$ кг падает на чашку весов с высоты $H = 10$ см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чашка весов опускается на $h = 0{,}5$ см?

Решение:



По закону сохранения энергии в момент удара $W_{п1} = W_{п2}$, где $W_{п1} = mgH$, а $W_{п2} = \frac{kx_1^2}{2}$.

Отсюда $mgH = \frac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — деформация пружины весов в момент удара. После успокоения качаний наступает равновесие $mg = F_2$, где $F_2 = kx_2$, по закону Гука, причем $x_2 = h$.

Тогда $mg = kh$; $k = \frac{mg}{h}$. Показания весов в момент удара $F = mg + F_1$, где $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — по закону Гука

Тогда $F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$; $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg +$ $+\sqrt{2mgH\frac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}$; $F = mg\left(1+\sqrt{\frac{2H}{h}}\right)$, откуда $F - 72.5$ Н.

2.121. С какой скоростью v двигался вагон массой $m = 20$ т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на $l = 10$ см? Жесткость пружины каждого буфера $k = 1$ МН/м.

Решение:

За счет кинетической энергии движущегося поезда была совершена работа по сжатию буферов. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 2.116. Работа по сжатию первого буфера: $A_1 = k\frac{l^2}{2}$, второго $A_2 = k\frac{l^2}{2}$; $A = A_1 + A_2$ или $A = 2k\frac{l^2}{2} = kl^2$. Тогда $\frac{mv^2}{2} = kl^2$, $v = l\sqrt{\frac{2k}{m}}$; $v = 1$ м/с.

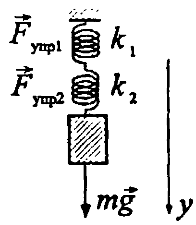
2.122. Мальчик, стреляя из рогатки, натянул резиновый шнур так, что его длина стала больше на $\Delta l = 10$ см. С какой скоростью v полетел камень массой $m = 20$ г? Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

Решение:

В результате совершенной работы по растяжению шнура камень приобрел кинетическую энергию. С учетом формулы, полученной в задаче 2.116, имеем: $\frac{mv^2}{2} = k\frac{\Delta l^2}{2}$. Откуда $v = \Delta l\sqrt{\frac{k}{m}}$, $v = 22{,}3$ м/с.

2.123. К нижнему концу пружины, подвешенной вертикально, присоединена другая пружина, к концу которой прикреплен груз. Жесткости пружин равны k_1 и k_2. Пренебрегая массой пружин по сравнению с массой груза, найти отношение $W_{п1}/W_{п2}$ потенциальных энергий этих пружин.

Решение:



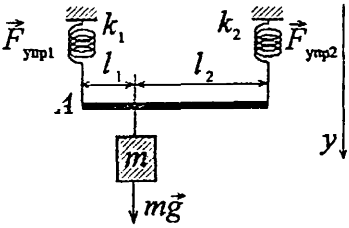
Потенциальная энергия взаимодействия для каждой отдельно взятой пружины $W_{п1} = \frac{k_1 x_1^2}{2}$ — (1); $W_{п2} = \frac{k_2 x_2^2}{2}$ — (2). Условия равновесия пружин в проекциях на ось y: $\begin{cases} mg - F_{упр1} = 0, \\ mg - F_{упр2} = 0, \end{cases}$ где по закону Гука $F_{упр} = -kx$, отсюда $\begin{cases} mg = k_1 x_1 \\ mg = k_2 x_2 \end{cases}$ и $k_1 x_1 = k_2 x_2$ — (3). Из (3) выразим: $x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1}$; $x_2 = \frac{k_2^2 x_2^2}{k_1^2}$. Разделив (1) на (2), получим $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 x_1^2}{2} \cdot \frac{2}{k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1 k_2^2 x_2^2 / k_1^2}{k_2 x_2^2}$;

$\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2^2 x_2^2}{k_1 k_2 x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2}{k_1}$.

2.124. На двух параллельных пружинах одинаковой длины висит невесомый стержень длиной $L = 10$ см. Жесткости пружин $k_1 = 2$ Н/м и $k_2 = 3$ Н/м. В каком месте стержня надо подвесить груз, чтобы стержень оставался горизонтальным?

Решение:

Чтобы система находилась в равновесии, т.е. чтобы стержень был в горизонтальном положении, необходимо выполнение двух условий: $m\vec{g} + \vec{F}_{упр1} + \vec{F}_{упр2} = 0$ — (1)



и $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$ — (2). В проекции на ось y уравнение (1) имеет вид: $mg - k_1x - k_2x = 0$ или $mg = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$ — (3). Моменты сил относительно точки A: $M_1 = 0$; $M_2 = mgl_1$; $M_3 = k_2xL$. Тогда из уравнения (2) $mgl_1 - k_2xL = 0$, из уравнения (3) $x = \dfrac{mg}{k_1 + k_2}$. Следовательно, $mgl_1 - \dfrac{k_2mgL}{k_1 + k_2} = 0$; $l_1 = \dfrac{k_2L}{k_1 + k_2}$. $L = l_1 + l_2$; $l_2 = L - l_1 = L \cdot \left(1 - \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}\right)$; $l_1 = 6$ см; $l_2 = 4$ см.

2.125. Резиновый мяч массой $m = 0{,}1$ кг летит горизонтально с некоторой скоростью и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время $\Delta t = 0{,}01$ с мяч сжимается на $\Delta l = 1{,}37$ см; такое же время Δt затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча. Найти среднюю силу $\overline{F}$, действующую на стенку за время удара.

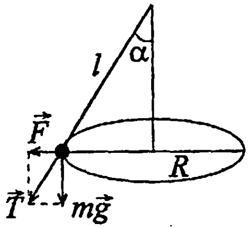
Решение:

Запишем второй закон Ньютона в виде: $F = m\Delta v / \Delta t$, но $\Delta v = \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$, тогда $F = \dfrac{m\Delta l}{\Delta t^2}$; $F = 13{,}7$ Н.

2.126. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, привязанная к резиновому шнуру длиной l_0, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гири $n = 2$ об/с. Угол отклонения шнура от вертикали $\alpha = 30°$. Жесткость шнура $k = 0{,}6$ кН/м. Найти длину l_0 нерастянутого резинового шнура.

Решение:

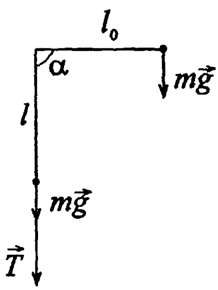
Сила натяжения шнура $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 5{,}7$ Н вызывает растяжение шнура на Δl, причем $T = k\Delta l$; отсюда $\Delta l = \frac{T}{k} = 9{,}5$ мм.



Из рисунка видно, что $\frac{l}{R} = \frac{T}{F}$ — (1). Но $F = T\sin\alpha = \frac{mv^2}{R} = 4\pi^2 n^2 mR$ — (2). Из (1) и (2) имеем $l = \frac{T}{4\pi^2 n^2 m} = 7{,}25$ см. Таким образом, длина нерастянутого резинового шнура $l_0 = l - \Delta l = 6{,}3$ см.

2.127. Гирю массой $m = 0{,}5$ кг, привязанную к резиновому шнуру длиной $l_0 = 9{,}5$ см, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти длину l резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Жесткость шнура $k = 1$ кН/м.

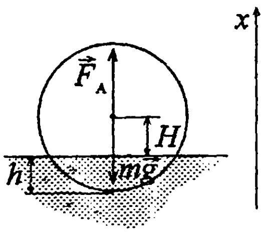
Решение:



Сила натяжения шнура T совершает работу по растяжению шнура на Δl. $T = k\Delta l$. Решая аналогичную задачу для нерастяжимого шнура (см. задачу 2.111), мы получили, что при прохождении положения равновесия $T = 3mg$. Тогда $3mg = k\Delta l$; $l - l_0 = \frac{3mg}{k}$; $l = \frac{3mg}{k} + l_0$; $l \approx 11$ см.

2.128. Мяч радиусом $R = 10$ см плавает в воде так, что его центр масс находится на $H = 9$ см выше поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить мяч в воду до диаметральной плоскости?

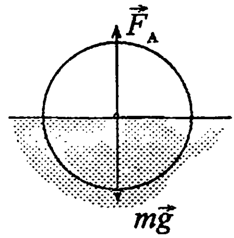
Решение:



Мяч плавает, если сила тяжести, действующая на него, уравновешивается силой Архимеда, т.е. $mg = F_A$, или $mg = \rho_0 V_0 g$ — (1), где V_0 — объем шарового сегмента высотой h, находящегося в воде при равновесии, ρ_0 — плотность воды, m — масса мяча. Очевидно, что $H + h = R$, т.е. радиусу мяча. Если теперь погрузить мяч в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на мяч, и результирующая сила, выталкивающая мяч из воды, будет $F_x = F'_A - mg$ — (2). Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 V g$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $h + x$. Из (1) — (3) имеем $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g (V - V_0) = \rho_0 g V_x$, где V_x — объем шарового слоя высотой x. Шаровой сегмент высотой l имеет объем шарового слоя $V_x = V - V_0 = $
$= \frac{\pi (x+h)^2}{3}[3R - (x+h)] - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Тогда $F_x = \rho_0 g V_x =$
$= \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left[3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R - h)\right]$ — (4). Работа, которую надо совершить при погружении мяча до диаметральной плоскости, будет $A = \int_0^H Fxdx$ — (5). Подставляя (4) в (5), интегрируя и учитывая, что $H + h = R$, получим, после подстановки данных задачи, $A = 0{,}74$ Дж.

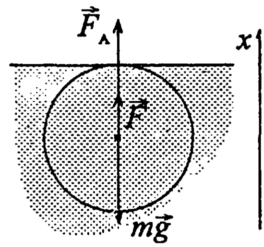
2.129. Шар радиусом $R = 6$ см удерживается внешней силой под водой так, что его верхняя точка касается поверхности воды. Какую работу A произведет выталкивающая сила, если отпустить шар и предоставить ему свободно плавать? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:



Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\bar{g}$ уравновешивается силой Архимеда F_A. Следовательно, $mg = F_A$;

$m = V_ш \rho$; $\quad \frac{3}{4}\pi R^3 \rho g = \rho_в V_0 g$, где



$\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2} V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. В первоначальном положении на шар действует сила $F = F_A - mg$. В предыдущей задаче была получена формула, выражающая зависимость выталкивающей силы от глубины погружения x, если при свободном плавании в воде находился шаровой сегмент высотой h. Учитывая, что в данном случае $h = R$, имеем $F = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right]$.

Если отпустить мяч и предоставить ему свободно плавать, то в этом случае работа выталкивающей силы:

$$A = \int_0^R F dx = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\int_0^R \left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right];$$

$$A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R\frac{(x+R)^3}{3}\Bigg|_0^R - \frac{(x+R)^4}{4}\Bigg|_0^R - 2R^3 x\Big|_0^R\right];$$

$$A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[7R^4 - \frac{15}{4}R^4 - 2R^4\right]; \; A = \frac{5\pi\rho_0 g}{3 \cdot 4}R^4; \; A = 0{,}17 \text{ Дж}.$$