§ 3. Вращательное движение твердых тел

В задачах этого раздела используются данные таблиц 3 — 5 и таблицы 11 из приложения. Кроме того, следует учесть замечание к § 1.

3.1. Найти момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения.

Решение:

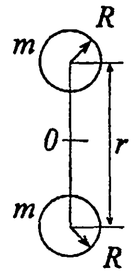
Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}MR^2$, подставляя значение массы и радиуса Земли, получим $J = 97{,}36 \cdot 10^{36}$ кг·м^2. Момент импульса $L = J\omega$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, следовательно, $L = \frac{J2\pi}{T}$. Период обращения Земли $T = 24$ часа. Подставляя числовые данные, получим $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг·м^2/с.

3.2. Два шара одинакового радиуса $R = 5$ см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами $r = 0{,}5$ м. Масса каждого шара $m = 1$ кг. Найти: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции J_2 системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах; в) относительную ошибку $\delta = (J_1 - J_2)/J_2$, которую мы допускаем при вычислении момента инерции системы, заменяя величину J_1 величиной J_2.

Решение:

Момент инерции шара: $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$. По теореме Штейнера

$J_0 + md^2$, где $d = r/2$. Найдем момент инерции каждого шара $J_1 = J_0 + m\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{mr^2}{4} =$

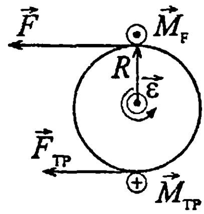


$= m\cdot\left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right)$. Используя свойство аддитивности момента инерции, получим $J_c = \sum_{i=1}^{n} J_i$, где J_c — момент инерции системы, J_i — момент инерции элементов, входящих в систему, найдем момент инерции системы. Т. к. шары одинаковые, то $J_{1c} = 2J_1 = = 2m\cdot\left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right) = 0{,}127$ кг·м^2. Момент инерции материальной точки $J_2 = m\frac{r^2}{4}$, тогда момент инерции системы $J_{2c} = 2m\frac{r^2}{4} = \frac{mr^2}{2} = 0{,}125$ кг·м^2. Относительная ошибка $\delta = \frac{J_1 - J_2}{J_2} = 1{,}6\%$.

3.3. К ободу однородного диска радиусом $R = 0{,}2$ м приложена касательная сила $F = 98{,}1$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр} = 98{,}1$ Н·м. Найти массу m дисков, если известно, что диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$ рад/с^2.

Решение:

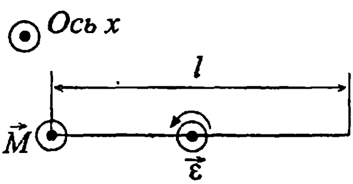
Уравнение вращательного движения диска в векторной форме $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тр}$ — (1), $\vec{M}_F$ — момент силы $\vec{F}$, $\vec{M}_{тр}$ — момент силы трения. Выберем ось x в направлении вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (на нас, перпендикулярно плоскости чертежа). Тогда



уравнение (1) в проекции на ось x $J_\varepsilon = M_F - M_{тр}$ — (2), т.к. вектор $\vec{M}_F$ направлен вдоль $\vec{\varepsilon}$, а $\vec{M}_{тр}$ имеет противоположное направление. Момент инерции диска $J = \frac{1}{2}mR^2$ — (3); $M_F = F \cdot R$ — (4). Перепишем (2) с учетом (3) и (4): $\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = FR - M_{тр}$, отсюда $m = \frac{2(FR - M_{тр})}{\varepsilon R^2} = 7{,}36$ кг.

3.4. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил $M = 98{,}1$ мН·м?

Решение:



Запишем уравнение вращательного движения стержня в проекции на ось x: $M = J\varepsilon$, откуда $\varepsilon = \frac{M}{J}$, где момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину, $J = \frac{1}{12}Ml^2$. Тогда $\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{12M}{ml^2} = 2{,}35$ рад/с^2.

3.5. Однородный диск радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Решение:

Воспользуемся рисунком к задаче 3.3. Относительно оси x момент касательной силы приложенной к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Уравнение вращательного движения в проекции на ось x: $M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \frac{mR^2\varepsilon}{2}$ — (2). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = B$ — (3). Решая совместно (1) — (3), найдем $F = \frac{BmR}{2}$; $F = 4$ Н.

3.6. Маховик, момент инерции которого $J = 63{,}6$ кг·м^2 вращается с угловой скоростью $\omega = 31{,}4$ рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время $t = 20$ с. Маховик считать однородным диском.

Решение:

Момент сил торможения $M = J\varepsilon$, где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, т.к. вращение равнозамедленное и конечная угловая скорость $\omega = 0$. Тогда $M = \frac{J\omega}{t}$; $M \approx 100$ Н.

3.7. К ободу колеса радиусом 0,5м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 98{,}1$ Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения $n = 100$ об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение:

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент касательной силы, приложенный к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Кроме того,

$M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \dfrac{mR^2 \varepsilon}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\varepsilon = \dfrac{2F}{mR}$; $\varepsilon = 7{,}8$ рад/с^2. Угловую скорость ω можно выразить двумя способами: $\omega = 2\pi n$ и $\omega = \varepsilon t$, отсюда $t = \dfrac{2\pi n}{\varepsilon}$; $t = 1$ мин 20 с.

3.8. Маховик радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 10$ кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Сила натяжения ремня, идущего без скольжения, $T = 14{,}7$ Н. Какую частоту вращения n будет иметь маховик через время $t = 10$ с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение:

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент силы натяжения ремня $M = T \cdot R$ — (1), кроме того, $M = J \cdot \varepsilon$ — (2), где момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — (3), $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi n}{t}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), найдем $n = \dfrac{Tt}{\pi m R}$; $n = 23{,}4$ об/с.

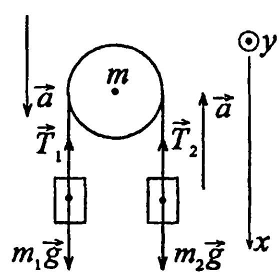
3.9. Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $n = 20$ об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Решение:

Поскольку вращение колеса является равнозамедленным, то количество оборотов, которое оно сделало до полной остановки $N = nt/2$; $N = 600$ об. Момент сил трения $M = J \cdot \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$, то $M = \frac{2J\pi n}{t} = 513$ Н·м.

3.10. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение:

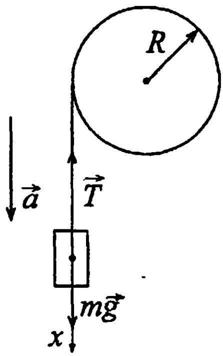


Запишем в векторной форме уравнения поступательного движения первой и второй гири: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$; $m_2\vec{a} = = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}$ и уравнение вращательного движения диска $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, где M_1 — момент силы натяжения нити T_1, M_2 — момент силы натяжения нити T_2. Спроектируем первые два уравнения на ось x, а последнее на ось y и добавим уравнение кинематической связи. Получим систему 4 уравнений: $m_1 a = m_1 g - T_1$ — (1); $-m_2 a = m_2 g - T_2$ — (2); $J\varepsilon = RT_1 - RT_2$ — (3); $a = \varepsilon R$.

Подставим (4) в (3): $J\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$ — (5). Вычтем (2) из (1), подставим в полученное выражение (5) и найдем $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8$ м/с^2 — (6). Подставляя (6) в (1) и (2), получим $T_1 = m_1(g - a)$; $T_1 = 14$ Н. $T_2 = m_2(g + a)$; $T_2 = 12{,}6$ Н.

3.11. На барабан массой $m_0 = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение a груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

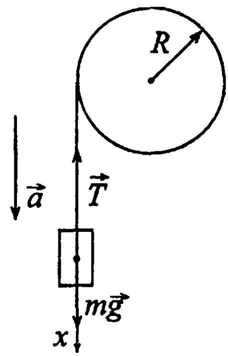
Решение:



Без учета сил трения и сопротивления среды систему «груз — цилиндр» можно считать замкнутой и применить закон сохранения энергии. В начальный момент времени груз обладает потенциальной энергией mgh, которая при опускании груза уменьшается, переходя в кинетическую энергию поступательного движения груза и в кинетическую энергию вращения барабана $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где момент инерции барабана $J = \frac{m_0 R^2}{2}$ — (2); $\omega = \frac{v}{R}$ — (3), где R — радиус барабана. Уравнение (1) с учетом (2) и (3) можно записать как $mgh = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{m_0}{2}\right)$ — (4). Груз опускается под действием постоянной силы, следовательно, его движение равноускоренное, тогда $h = \frac{at^2}{2}$ — (5); $v = at$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (4), получим $a = \frac{2mg}{m_0 + 2m}$; $a = 3$ м/с^2.

3.12. На барабан радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $a = 2{,}04$ м/с^2.

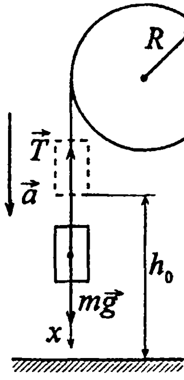
Решение:



Сила натяжения шнура $\vec{T}$ создает вращающий момент $M = TR$ — (1). С другой стороны, $M = J\varepsilon$ — (2). Ускорение, с которым опускается груз, равно тангенциальному ускорению вращения барабана. Тогда $\varepsilon = \frac{a}{R}$ — (3). Решая совместно (1) — (3) получим: $J = \frac{TR^2}{a}$ — (4). Силу натяжения шнура $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона в проекциях на ось x. $mg - T = ma$, откуда $T = m(g - a)$. Тогда уравнение (4) примет вид: $J = \frac{mR^2(g-a)}{a}$; $J = 9{,}5$ кг·м^2.

3.13. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота груза над полом $h_0 = 1$ м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $W_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение:



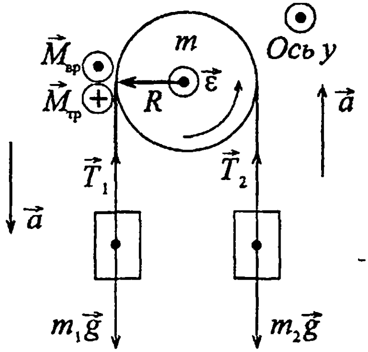
При опускании груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения и кинетическую энергию вращательного движения: $mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где $\omega = \frac{v}{R}$, откуда $mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = \frac{R^2v^2m + Jv^2}{2R^2}$ или

$$mgh_0 = \frac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}; \quad v = \sqrt{\frac{2R^2mgh_0}{mR^2 + J}} \quad — (2).$$

Движение равноускоренное, поэтому $h_0 = \frac{at^2}{2}$ — (3); $a = \varepsilon R$; $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$; $h_0 = \frac{\omega R t^2}{t2} = \frac{vRt}{2R} = \frac{vt}{2}$ — (4). Выразим t из (4) и подставим в (2): $t = \frac{2h_0}{v} = \sqrt{\frac{4h_0(mR^2 + J)}{2R^2 mgh_0}} = \sqrt{\frac{2(mR^2 + J)}{R^2 mg}}$; $t = 1{,}1$ с. Кинетическая энергия $W_к = \frac{mv^2}{2}$, подставив уравнение (2), получим $W_к = \frac{m2R^2 mgh_0}{2(mR^2 + J)} = \frac{m^2 gh_0 R^2}{mR^2 + J}$; $W_к = 0{,}82$ Дж. По второму закону Ньютона $mg - T = ma$, откуда $T = m(g - a)$. Из (3): $a = \frac{2h_0}{t^2}$, тогда $T = m(g - 2h_0 / t^2)$; $T = 4{,}1$ Н.

3.14. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J = 50$ кг·м^2 и радиус $R = 20$ см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр} = 98{,}1$ Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_1 - T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2{,}36$ рад/с^2. Блок считать однородным диском.

Решение:

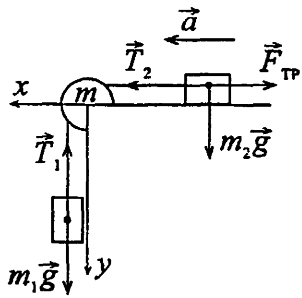


Согласно основному закону динамики вращательного движения (в проекции на ось y) при $J = const$ $\sum M = J\varepsilon$. Разность сил $(T_1 - T_2)$ создает вращательный момент $M_{вр}$, тогда

$(T_1 - T_2) - M_{тр} = J\varepsilon$, следовательно, $T_1 - T_2 = (J\varepsilon + M_{тр})/R$; $T_1 - T_2 = 1{,}08$ кН.

3.15. Блок массой $m = 1$ кг укреплен на конце стола (см. рис. и задачу 2.31). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

Решение:



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x и y: $\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 & —(1), \\ m_2 a = T_2 - F_{тр} & —(2), \end{cases}$ где $F_{тр} = km_2 \times$ $\times g$ — (3). Разность сил $(T_1 - T_2)$ создает момент вращения, следовательно, $(T_1 - T_2)R = \frac{Ja}{R}$, где $J = \frac{mR^2}{2}$, откуда $T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}$ — (4). Из уравнений (1) — (3) найдем $T_1 = m_1(g - a)$ — (5); $T_2 = m_2(a + kg)$ — (6). Пусть $m_1 = m_2 = m'$. Тогда $T_1 - T_2 = m'(g - 2a - kg) = m'g(1 - k) -$ $- 2m'a$, подставив (1), получим $mg(1 - k) = \frac{ma}{2} + 2m'a =$ $= \frac{a(m + 4m')}{2}$, откуда $a = \frac{2m'g(1 - k)}{m + 4m'}$; $a = 3{,}5$ м/с^2. Тогда из уравнения (5) $T_1 = 6{,}3$ Н; $T_2 = 4{,}5$ Н.

3.16. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальный плоскости со скоростью $v = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию W_k диска.

Решение:

В задаче рассматривается так называемое «плоское движение». Полная кинетическая энергия диска складывается из кинетической энергии поступательного движения точки центра масс и кинетической энергии вращения относительно оси, проходящей через центр масс: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Поскольку $J = \frac{mR^2}{2}$ и $\omega = \frac{v}{R}$, где m — масса диска, R — радиус диска, то $W_к = \frac{3mv^2}{4}$; $W_к = 24$ Дж.

3.17. Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

Решение:

Кинетическая энергия шара складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{2mR^2}{5}$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $W_к = \frac{4\pi^2 mR^2 n^2}{2} + \frac{2mR^2 4\pi^2 n^2}{5 \cdot 2} = \frac{7\pi^2 D^2 mn^2}{10}$; $W_к = 0{,}1$ Дж.

3.18. Обруч и диск одинаковой массы $m_1 = m_2$ катятся без скольжения с одной и той же скоростью v. Кинетическая энергия обруча $W_{к1} = 4$ кгс·м. Найти кинетическую энергию $W_{к2}$ диска.

Решение:

Пусть $m_1 = m_2 = m$. Кинетическая энергия обруча и диска складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения $W_{к1}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), $W_{к2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}$ — (2). Момент инерции обруча $J_1=mR_1^2$. Угловая скорость $\omega_1=\frac{v}{R_1}$. Момент инерции диска $J_2=\frac{1}{2}mR_2^2$; частота $\omega_2=\frac{v}{R_2}$. Произведем следующие преобразования: $J_1\omega_1^2=mR_1^2\frac{v^2}{R_1^2}=$ $=mv^2$, $J_2\omega_2^2=\frac{1}{2}mR_2^2\frac{v^2}{R_2^2}=\frac{mv^2}{2}$. Тогда, с учетом уравнений (1) и (2), можно записать $W_{к1}=mv^2$, $W_{к2}=\frac{3mv^2}{4}$ или $W_{к2}=\frac{3W_{к1}}{4}$. Переведем числовые значения в единицы системы СИ: $W_{к1}=39{,}24$ Дж, тогда $W_{к2}=29{,}43$ Дж.

3.19. Шар массой $m=1$ кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $v=10$ см/с, после удара $u=8$ см/с. Найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе шара о стенку.

Решение:

Будем считать, что движение происходит в горизонтальной плоскости, тогда количество теплоты Q равно убыли кинетической энергии $Q=W_{к1}-W_{к2}$. Здесь $W_{к1}$ — кинетическая энергия шара до удара, она складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. $W_{к1}=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega_1^2}{2}$, где $J=\frac{2}{5}mR^2$; $\omega_1=\frac{v}{R}$. Аналогично для

$W_{к2}$ — кинетическая энергия шара после удара: $W_{к2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{J\omega_2^2}{2}$, где $\omega_2=\frac{u}{R}$. Преобразуем предварительно выражения $J\omega_1^2$ и $J\omega_2^2$: $J\omega_1^2=\frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2}=\frac{2}{5}mv^2$; $J\omega_2^2=\frac{2}{5}mu^2$. Тогда $W_{к1}=\frac{mv^2}{2}+$ $+\frac{mv^2}{5}=\frac{7mv^2}{10}$, $W_{к2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{mu^2}{5}=\frac{7mu^2}{10}$. Отсюда $Q=\frac{7mv^2}{10}-\frac{7mu^2}{10}=\frac{7}{10}m\left(v^2-u^2\right)$; $Q=2{,}5$ мДж.

3.20. Найти относительную ошибку δ, которая получится при вычислении кинетической энергии $W_к$ катящегося шара, если не учитывать вращения шара.

Решение:

Кинетическая энергия шара с учетом вращения: $W_к=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}$, без учета вращения: $W'_к=\frac{mv^2}{2}$. Относительная ошибка $\delta=\frac{W_к-W'_к}{W'_к}$; $\delta=\frac{J\omega^2/2}{mv^2/2}=\frac{J\omega^2}{mv^2}$, где $J=\frac{2}{5}mR^2$; $\omega=\frac{v}{R}$. Отсюда $\delta=\frac{2mR^2v^2}{5R^2mv^2}=\frac{2}{5}=40\%$.

3.21. Диск диаметром $D=60$ см и массой $m=1$ кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой $n=20$ об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

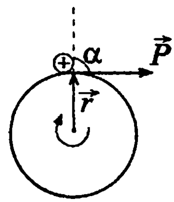
Решение:

Работа сил торможения равна изменению кинетической энергии диска $-A=W_к-W_{к0}$. В момент остановки $W_к=0$, следовательно, $A = W_{к0}$; $A = \dfrac{J\omega^2}{2}$, где $J = \dfrac{mR^2}{2}$; $\omega = 2\pi n$.

Тогда $A = \dfrac{m(D/2)^2(2\pi n)^2}{4} = m\dfrac{D^2}{4}\pi^2 n^2$; $A = 355$ Дж.

3.22. Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой $n = 5$ об/с, $W_к = 60$ Дж. Найти момент импульса L вала.

Решение:



Момент импульса — вектор, направление которого определяется по правилу векторного произведения $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$, где $\vec{p} = m\vec{v}$, а модуль равен $L = Rp\sin\alpha = mvR$ — (1), т.к. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Кинетическая энергия вала $W_к = \dfrac{J\omega^2}{2}$ — (2), где $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — (3), $\omega = 2\pi n$ — (4). Решая совместно уравнения (2) — (4) получим $W_к = mR^2\pi^2 n^2$, откуда $m = \dfrac{W_к}{R^2\pi^2 n^2}$ — (5); $v = 2\pi nR$ — (6).

Подставив (5) и (6) в (1), найдем $L = \dfrac{2W_к}{\pi n}$; $L = 7{,}6$ кг·м²/с.

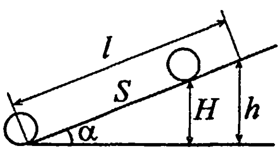
3.23. Найти кинетическую $W_к$ энергию велосипедиста, едущего со скоростью $v = 9$ км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение:

Кинетическая энергия велосипедиста складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения двух колес. $W_к = \dfrac{mv^2}{2} + 2\dfrac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции одного колеса $J = \frac{m_0 R^2}{2}$, а угловая скорость $\omega = \frac{v}{R}$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{m_0 R^2 v^2}{2R^2} = \frac{v^2(m + m_0)}{2}$; $W_к = 253$ Дж.

3.24. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $v = 7{,}2$ км/ч. На какое расстояние s может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

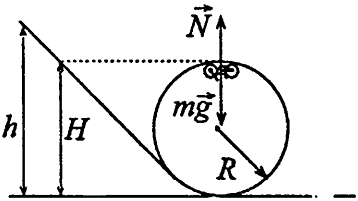
Решение:



У основания горки обруч обладал кинетической энергией $W_к$, которая складывалась из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. Когда обруч вкатился на горку на расстояние S, его кинетическая энергия перешла в потенциальную. $W_к = W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$; $W_п = mgH$. Момент инерции обруча $J = mR^2$, частота вращения $\omega = v/R$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2 v^2}{2R^2} = mv^2$. Следовательно, $mv^2 = mgH$, откуда $H = \frac{v^2}{g}$. Из рисунка видно, что $\frac{h}{H} = \frac{l}{S}$, откуда $S = \frac{Hl}{h}$ или $S = \frac{v^2 l}{gh}$. Подставив числовые данные с учетом $v = 2$ м/с, получим $S = 4{,}1$ м.

3.25. С какой наименьшей высоты h должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом $R = 3$ м*, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 75$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение:



Система замкнута, следовательно, по закону сохранения энергии $W = W_п + W_{к1} + W_{к2}$. Здесь $W = mgh$ — начальная потенциальная энергия. Потенциальная энергия в верхней точке «мертвой петли» $W_п = mgH$, т.к. $H = 2R$, то $W_п = 2mgR$. Кинетическая энергия поступательного движения велосипедиста $W_{к1} = \dfrac{mv^2}{2}$. Кинетическая энергия вращательного движения колес $W_{к2} = \dfrac{J\omega^2}{2}$. $J = m_0 r^2$ — момент инерции обруча, где r — его радиус. $\omega = \dfrac{v}{r}$ — угловая скорость $\omega^2 = \dfrac{v^2}{r^2}$. Тогда $W_{к2} = \dfrac{m_0 r^2 v^2 / r^2}{2} = \dfrac{m_0 v^2}{2}$;

$mgh = 2mgR + mv^2/2 + m_0 v^2/2$; $\quad mg(h - 2R) = \dfrac{v^2}{2}(m + m_0)$,

отсюда $v^2 = \dfrac{2mg(h-2R)}{m+m_0}$. По второму закону Ньютона в верхней точке «мертвой петли» $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$. В предельном случае $N = 0$, поэтому $mg = ma_n$, откуда $a_n = g$. С другой стороны, нормальное ускорение

* В первоисточнике, очевидно, допущена опечатка: радиус петли $R = 0{,}3$ м.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R}, \quad \text{следовательно,} \quad g = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R};$$

$$2m(h-2R) = (m+m_0)R; \quad h = 2R + \frac{R}{2}\left(1+\frac{m_0}{m}\right).$$ Подставив числовые значения, получим $h = 7{,}56$ м.

3.26. Медный шар радиусом $R = 10$ см вращается с частотой $n = 2$ об/с вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу A надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость ω вращения шара вдвое?

Решение:

Кинетическая энергия вращения шара $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$. Работа по увеличению угловой скорости вращения шара будет равна приращению его кинетической энергии. $A = W_{к2} - W_{к1}$, где $W_{к1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$; $W_{к2} = J\omega_2^2/2 = 4J\omega_1^2/2$. Отсюда $A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2$ — (1); $\omega_1 = 2\pi n$ — (2). Масса шара $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, $\rho = 8{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3, тогда $J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^2\rho$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим $A = \frac{3}{2}\frac{8}{15}\pi R^5\rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{5}\pi^3 R^5 \rho n^2$; $A = 34{,}1$ Дж.

3.27. Найти линейные ускорения a центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные ускорения с ускорением тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение:

При скатывании тела с наклонной плоскости его потенциальная энергия переходит в кинетическую. Т.е. $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где J — момент инерции тела и m — его масса. Но $h = l\sin\alpha$ — (2), $\omega = \frac{v}{R}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $mgl\sin\alpha = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)$ — (4). Так как движение происходит под действием постоянной силы, то движение тел равноускоренное, поэтому $l = \frac{at^2}{2}$ — (5), $v = at$ — (6). Решая (4) — (6) совместно, получим $a = \frac{mg\sin\alpha}{m + J/R^2}$ — (7). Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда из (7) найдем $a_1 = 3{,}50\text{ м/с}^2$. Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, $a_2 = 3{,}27\text{ м/с}^2$. Момент инерции обруча $J = mR^2$, $a_3 = 2{,}44\text{ м/с}^2$. Для тела, соскальзывающего с наклонной плоскости без трения, имеем $a = g\sin\alpha$; $a = 4{,}9\text{ м/с}^2$.

3.28. Найти линейные скорости v движения центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости $h = 0{,}5$ м, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение:

В отсутствие трения систему можно считать замкнутой. Каждое из тел в начальный момент обладает потенциальной энергией mgh, которая затем преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ и кинетическую энергию вращения, т.е. $mgh = J\omega^2/2 + + mv^2/2$ — (1). С учетом того, что $\omega = \frac{v}{R}$, выразим скорость тел v в нижней точке: $mgh = \frac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}$; $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}$. а) Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда $v_1 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2m/5}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$; $v_1 = 2{,}65$ м/с. б) Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, тогда $v_2 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m/2}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$; $v_2 = 2{,}56$ м/с. в) Момент инерции обруча $J = mR^2$, тогда $v_3 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m}} = \sqrt{gh}$; $v_3 = 2{,}21$ м/с. г) Для тела, соскальзывающего без трения с наклонной плоскости, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$; $v = 3{,}13$ м/с.

3.29. Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) — одинакового радиуса $R = 6$ см и одинаковой массы $m = 0{,}5$ кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции J_1 и J_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости $h = 0{,}5$ м, угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, начальная скорость каждого цилиндра $v_0 = 0$.

Решение:

В предыдущей задаче мы нашли, что поступательная скорость цилиндров в нижней точке наклонной плоскости определяется формулой $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + J/R^2}}$ — (1). Момент инерции алюминиевого цилиндра $J_1 = \dfrac{mR^2}{2}$ — (2). Момент инерции свинцового цилиндра $J_2 = m\dfrac{R^2 + R_0^2}{2}$. Найдем внутренний радиус R_0 свинцового цилиндра. По условию массы обоих цилиндров равны, следовательно, $\rho_1 L\pi R^2 = \rho_2 L\pi\left(R^2 - R_0^2\right)$, где L — длина цилиндров, ρ_1 — плотность алюминия, ρ_2 — плотность свинца. Отсюда $R_0^2 = R^2\dfrac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2}$. Тогда момент инерции свинцового цилиндра $J_2 = \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{2\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ — (3). Подставляя числовые данные, получим $J_1 = 9 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $J_1 = 15{,}9 \cdot 10^{-4}$ кг·м². Т. к. скатывание цилиндров происходит под действием постоянной силы, то $v = at$ и $l = \dfrac{h}{sin\alpha} = \dfrac{at^2}{2}$; отсюда $\dfrac{h}{sin\alpha} = \dfrac{vt}{2}$ и $t = \dfrac{1}{sin\alpha}\dfrac{2h}{v}$ — (4). Подставляя в (4) формулу (1), получим $t = \dfrac{1}{sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h\left(m + J/R^2\right)}{mg}}$ — (5). С учетом (2) и (3), получим соответственно для алюминиевого и свин-

цового цилиндров $t_1 = \frac{1}{sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}$, $t_1 = 0{,}78$ с; $t_2 = \frac{1}{sin\alpha} \times$
$\times \sqrt{\frac{2h}{g}\left(1 + \frac{2\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2}\right)}$, $t_2 = 0{,}88$ с.

3.30. Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время $t = 1$ мин частоту вращения от $n_1 = 300$ об/мин до $m_2 = 180$ об/мин. Момент инерции колеса $J = 2$ кг·м^2. Найти угловое ускорение ε колеса, момент сил торможения M, работу A сил торможения и число оборотов N, сделанных колесом за время $t = 1$ мин.

Решение:

Преобразуем числовые единицы в систему СИ: $t = 60$ с, $h_1 = 5$ об/с, $n_2 = 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов можно определить так: $N = \frac{n_1 + n_2}{2}t$; $N = 240$ об. Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}$. Имеем: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$, следовательно, $\varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}$. Подставив числовые значения, получим $\varepsilon = -0{,}21$ рад/с^2. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$; $M = 0{,}42$ Н·м. Работа сил торможения равна приращению кинетической энергии $-A = W_{к2} - W_{к1} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}$;
$A = \frac{J}{2}\left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2\right) = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_2^2\right)$; $A = 630$ Дж.

3.31. Вентилятор вращается с частотой $n = 900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N = 75$ об. Работа сил торможения $A = 44{,}4$ Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Решение:

Работа сил трения равна приращению кинетической энергии. $-A = W_к - W_{к0}$. Поскольку в момент остановки $W_к = 0$, то $A = W_{к0} = \frac{J\omega^2}{2}$. Откуда выразим момент инерции J, учитывая, что $\omega = 2\pi n$ — (1): $J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2}$; $J = 0{,}01\,кг{\cdot}м^2$. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$ — (2), где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ — (3). Поскольку вращение является равнозамедленным, то среднее число оборотов за единицу времени $\pi = \frac{n}{2}$, а число оборотов, сделанное до остановки $N = \pi t = \frac{nt}{2}$, откуда $t = \frac{2N}{n}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), получим $M = \frac{J\pi n^2}{N}$; $M = 94 \cdot 10^{-3}\,Н{\cdot}м$.

3.32. Маховое колесо, момент инерции которого $J = 245\,кг{\cdot}м^2$, вращается с частотой $n = 20$ об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав $N = 1000$ об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента до остановки колеса.

Решение:

Момент сил трения $M_{тр} = J\varepsilon$. Поскольку вращение равнозамедленное и конечная скорость равна нулю, то $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, где $\omega = 2\pi n$. Тогда $M_{тр} = J\frac{2\pi n}{t}$. Число оборотов при равнозамедленном движении $N = \frac{n}{2}t$, откуда $t = \frac{2N}{n}$; $t = 100$ с и $M_{тр} = 308\,Н{\cdot}м$.