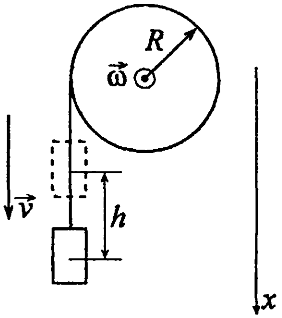
3.33. По ободу шкива, насаженного на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу который подвешен груз массой $m = 1$ кг. На какое расстояние h должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило частоту вращения $n = 60$ об/мин? Момент инерции колеса со шкивом $J = 0{,}42$ кг·м^2, радиус шкива $R = 10$ см.

Решение:



Пусть в верхнем положении груз обладал потенциальной энергией mgh. При опускании груза на расстояние h эта энергия была преобразована в кинетическую энергию вращения колеса и кинетическую энергию поступательного движения груза. $mgh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ — (1). Здесь v — скорость опускания груза, равна линейной скорости вращения точек на ободе шкива. $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n$ — (2), отсюда $v = 2\pi nR$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим: $mgh = 2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)$, следовательно, $h = \frac{2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)}{mg}$; $h = 86{,}5$ см.

3.34. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через время $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса $L = 73{,}5$ кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ колеса через время $t_2 = 20$ с после начала движения.

Решение:

Кинетическая энергия колеса $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ — (1). Момент инерции J можно найти из соотношения $M = J\varepsilon$, откуда

$J = \frac{M}{\varepsilon}$ — (2). Из уравнения моментов $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Решая это уравнение методом разделения переменных, получим $Mdt = dL$; $M\int_0^{t_1} dt = L$; $Mt_1 = L$, откуда $M = \frac{L}{t_1}$ — (3).

Уравнение (2) с учетом (3) запишем как: $J = \frac{L}{t_1 \varepsilon}$ — (4).

Угловое ускорение $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$. Тогда в момент времени t_2 — $\varepsilon = \frac{\omega}{t_2}$, откуда угловая скорость $\omega = \varepsilon t_2$ — (5). Подставив (4) и (5) в (1), получим $W_к = \frac{L\varepsilon^2 t_2^2}{2t_1}$; $W_к = 490$ Дж.

3.35. Маховик вращается с частотой $n = 10$ об/с. Его кинетическая энергия $W_к = 7{,}85$ кДж. За какое время t момент сил $M = 50$ Н·м, приложенный к маховику, увеличит угловую скорость ω маховика вдвое?

Решение:

Согласно закону изменения момента импульса $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, где $L = J\omega$, а $dL = Jd\omega$. Воспользуемся методом разделения переменных: $Mdt = Jd\omega$; $M\int_0^t dt = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega$ или $Mt = J(\omega_2 - \omega_1)$. По условию $\omega_2 = 2\omega_1$, следовательно, $Mt = J\omega_1$, откуда $t = \frac{J\omega_1}{M}$ — (1). Момент инерции J найдем из уравнения кинетической энергии вращения маховика. $W_к = \frac{J\omega_1^2}{2}$, откуда $J = \frac{2W_к}{\omega_1^2}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $t = \frac{2W_к}{\omega_1 M}$ или, с учетом $\omega_1 = 2\pi n$, $t = \frac{W_к}{\pi n M}$; $t = 5$ с.

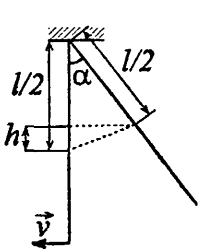
3.36. К ободу диска массой $m = 5$ кг приложена касательная сила $F = 19{,}6$ Н. Какую кинетическую энергию $W_к$ будет иметь диск через время $t = 5$ с после начала действия силы?

Решение:

Импульс силы $F\Delta t = m\Delta v$, но $v_0 = 0$ и $t_0 = 0$, следовательно, $Ft = mv$. Отсюда $v = \frac{Ft}{m}$. Кинетическая энергия вращения диска $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$; где $J = \frac{1}{2}mR^2$, $\omega = \frac{v}{R}$; $W_к = \frac{mR^2v^2}{2\cdot 2\cdot R^2} = \frac{F^2t^2}{4m}$. После подстановки числовых данных $W_к = 480$ Дж.

3.37. Однородный стержень длиной $l = 1$ м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость $v = 5$ м/с?

Решение:

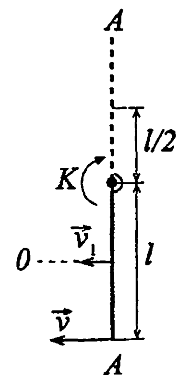


Рассмотрим движение центра масс стержня. При отклонении на угол α он обладает потенциальной энергией mgh. При прохождении положения равновесия его потенциальная энергия перешла в кинетическую энергию вращения.

$mgh = \frac{J\omega^2}{2}$ — (1); $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J = \frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega = \frac{v'}{l/2}$, где v' — скорость прохождения положения равновесия центром масс. $v' = \frac{v}{2}$, следовательно, $\omega = \frac{v}{l}$. С учетом всего вышеизложенного, перепишем уравнение (1): $mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{ml^2v^2}{6l^2}$, $gl(1-\cos\alpha) = \frac{mv^2}{3}$. Отсюда $\cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{3gl}$. Подставим числовые значения $\cos\alpha = 0{,}15$; $\alpha = 81°$.

3.38. Однородный стержень длиной $l = 85$ см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость v надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Решение:

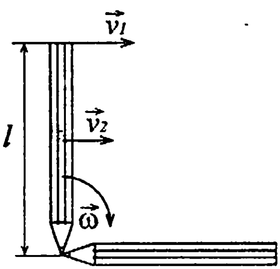


Рассмотрим движение центра масс стержня. Пусть K — точка подвеса стержня. Если стержень сделает пол-оборота и поднимется вертикально вверх, он будет обладать потенциальной энергией mgl. Для этого центру масс стержня нужно сообщить кинетическую энергию $\frac{J\omega^2}{2} = mgl$ — (1). Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера:

$J = \frac{1}{12}ml^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega = \frac{v}{l}$ — (3), она одинакова для всех точек, принадлежащих стержню. Подставив (2) и (3) в (1), получим $\frac{ml^2v^2}{3 \cdot 2 \cdot l^2} = mgl$, откуда $v = \sqrt{6gl}$; $v = 7{,}1$ м/с. Это скорость, при которой стержень поднимется в строго вертикальное положение. При $v > 7{,}1$ м/с он сделает полный оборот.

3.39. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будет иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

Решение:



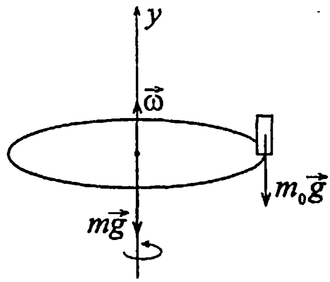
Рассмотрим движение центра масс карандаша. В вертикальном положении он обладает потенциальной энергией, которая при падении переходит в кинетическую энергию вращения. $\frac{J\omega_1^2}{2} = mg\frac{l}{2}$ — (1).

Момент инерции карандаша относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$ — (2).

Подставив (2) в (1), получим $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$, откуда $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$; $\omega_1 = 14$ рад/с. Поскольку $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а линейная скорость $v = \omega R$, то скорость конца карандаша $v_1 = \omega \cdot l = 2{,}1$ м/с. Скорость середины $v_2 = \omega\frac{l}{2} = 1{,}05$ м/с.

3.40. Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение:



Система «человек — платформа» замкнута в проекции на ось y, т. к. моменты сил $M_{mg} = 0$ и $M_{m_0 g} = 0$ в проекции на эту ось. Следовательно, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса. В проекции на ось y: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, где J_1 — момент инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком, стоящим в центре, ω_1 и ω_2 — угловые скорости платформы в обоих случаях. Здесь $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$, $J_2 = \frac{mR^2}{2}$ — (2), где R — радиус платформы. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения платформы, получим $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = 2\pi n_2\frac{mR^2}{2}$; $n_2 = n_1\frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} =$
$= n_1\frac{m + 2m_0}{m}$; $n_2 = 22$ об/мин.

3.41. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к ее центру в условиях предыдущей задачи? Радиус платформы $R = 1{,}5$ м.

Решение:

При переходе с края платформы к центру человек совершает работу, равную разности кинетических энергий вращения. $A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), где J_1 — момент инерции платформы с человеком на краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком в центре. $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$; $J_2 = \frac{mR^2}{2}$. Частота вращения $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Воспользуемся формулой для n_2, полученной в задаче 3.40: $n_2 = n_1\frac{m + 2m_0}{m}$, тогда $\omega_2 = 2\pi n_1\frac{m + 2m_0}{m} = \omega_1\frac{m + 2m_0}{m}$. Подставив числовые значения, получим: $J_1 = 247{,}5\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$, $J_1 = 112{,}5\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$, $\omega_1 = 1{,}1$ рад/с, $\omega_2 = 2{,}3$ рад/с. Подставив найденные значения в (1), получим: $A \approx 162$ Дж.

3.42. Горизонтальная платформа массой $m = 80$ кг и радиусом $R = 1$ м вращается с частотой $n_1 = 20$ об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 2{,}94$ до $J_2 = 0{,}98\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$? Считать платформу однородным диском.

Решение:

Момент инерции платформы с человеком складывается из момента инерции пустой платформы и момента инерции человека. В начальном положении $J_{10} = J_0 + J_1$ — (1), а когда человек опустил руки $J_{10} = J_0 + J_2$ — (2). Здесь $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ — (3). По закону сохранения момента импульса

$J_{10}\omega_1 = J_{20}\omega_2$, где $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Тогда $J_{10} 2\pi n_1 = J_{20} 2\pi n_2$, откуда $n_2 = \frac{J_{10} n_1}{J_{20}}$ — (4). Решая сорместно (1) — (4), получим: $n_2 = \frac{(mR^2/2 + J_1)\cdot n_1}{mR^2/2 + J_2}$ — (5); $n_2 = 0{,}35$ об/с $= 21$ об/мин.

3.43. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия $W_к$ платформы с человеком в условиях предыдущей задачи?

Решение:

Кинетическая энергия платформы с человеком $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$.

Тогда первоначальная кинетическая энергия $W_{k1} = \frac{J_{10}\omega_1^2}{2}$, а после того, как человек опустил руки $W_{k2} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{2}$. Здесь

$$J_{10} = \frac{mR^2}{2} + J_1; \quad J_{20} = \frac{mR^2}{2} + J_2; \quad \omega_1 = 2\pi n_1; \quad \omega_2 = 2\pi n_2.$$

Тогда $$\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{J_{10}\omega_1^2} = \frac{(mR^2/2 + J_1)4\pi^2 n_1^2}{(mR^2/2 + J_2)4\pi^2 n_2^2} = \frac{n_1^2(mR^2 + 2J_1)}{n_2^2(mR^2 + J_2)}.$$

Из уравнения (5) предыдущей задачи $n_2 = \frac{(mR^2 + 2J_1)\cdot n_1}{mR^2 + 2J_2}$,

тогда $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = \frac{mR^2 + 2J_2}{mR^2 + 2J_1}$; $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = 1{,}05$.

3.44. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $v_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение:

По закону сохранения момента импульса $(J_1 + J_2)\times$ $\times\omega = rm_0v_0$ — (1), где $J_1 = m_0r^2$ — (2) — момент инерции человека; $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$ — (3) — момент инерции платформы, rm_0v_0 — момент импульса человека. Подставив (2) и (3) в (1), получим $\left(m_0r^2 + 1/2mR^2\right)\omega = rm_0v_0$ или $\left(m_0r^2 + 1/2mR^2\right)2\pi n = rm_0v_0$, откуда $n = \frac{rm_0v_0}{\pi\left(2m_0r^2 + mR^2\right)}$.

Подставив числовые значения, учитывая, что $v = 1{,}1$ м/с, получим $n = 0{,}49$ об/мин.

3.45. Однородный стержень длиной $l = 0{,}5$ м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальный оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

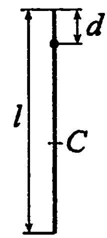
Решение:

В данной задаче стержень является физическим маятником, его период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mdg}}$, где J — момент инерции стержня относительно оси вращения, $d = \frac{l}{2}$ — (2) — расстояние от центра масс до оси вращения. По теореме Штейнера $J = J_0 + md^2$, где $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$, отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$ — (3).

Подставив (2) и (3) в (1), полvчим $T = 2\pi\sqrt{\frac{2ml^2}{3mlg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$; $T = 1{,}16$ с.

3.46. Найти период колебания T стержня предыдущей задачи, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии $d = 10$ см от его верхнего конца.

Решение:

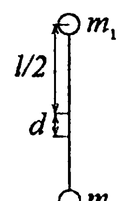


Период малых колебаний стержня $T = 2\pi \times \sqrt{\frac{J}{m \cdot (l/2 - d)g}}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + m\left(\frac{l}{2} - d\right)^2$, где $J_0 = \frac{ml^2}{12}$. Отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} - mld + md^2 = \frac{4ml^2}{12} - md(l-d)$; $J = m \cdot \left(\frac{l^2}{3} - dl + d^2\right)$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/3 - dl + d^2}{g(l/2 - d)}}$; $T = 1{,}07$ с.

3.47. На концах вертикального стержня укреплены два груза. Центр масс грузов находится ниже середины стержня на расстоянии $d = 5$ см. Найти длину стержня l, если известно, что период малых колебаний стержня с грузами вокруг горизонтальный оси, проходящей через его середину, $T = 2$ с. Массой стержня пренебречь по сравнению с массой грузов.

Решение:



Данная система является математическим маятником, для которого квадрат периода малых колебаний определяется по формуле: $T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{(m_1 + m_2)dg}$. Момент инерции такого маятника: $J = l^2(m_1 + m_2)/4$. Отсюда $T^2 = 4\pi^2 \times$

$\times \dfrac{l^2(m_1+m_2)}{4(m_1+m_2)\cdot dg} = \pi^2 \dfrac{l^2}{dg}$, откуда окончательно получим: $l = T\sqrt{dg}/\pi$; $l = 0{,}446$ м.

3.48. Обруч диаметром $D = 56{,}5$ см висит на гвозде, вбитом в стенку, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний T обруча.

Решение:

Центр масс находится в центре обруча, тогда период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mRg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2J}{mDg}}$, где $J = \dfrac{1}{2}m \times$ $\times\left(R_1^2 + R_2^2\right)$, $R_1 = R_2$, следовательно, $J = mR^2 = m\dfrac{D^2}{4}$.

Отсюда $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{D}{2g}}$; $T = 1{,}5$ с.

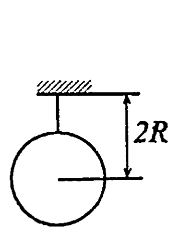
3.49. Какой наименьшей длины l надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром $D = 4$ см, чтобы при определении периода малых колебаний T шарика рассматривать его как математический маятник? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 1%.

Решение:

Период малых колебаний математического маятника $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ — (1), период малых колебаний физического маятника $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$, где J — момент инерции шарика относительно оси вращения, m — масса шарика и l — расстояние от центра масс шарика до точки подвеса. В нашем случае $J=\frac{2}{5}mR^2+ml^2=ml^2\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]$. Обозначим $A=1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2$, тогда $J=Aml^2$. С учетом этого получим $T_2=2\pi\sqrt{\frac{lA}{g}}$ — (2). Из (1) и (2) имеем $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{A}$. Ошибка, которую мы делаем, принимая подвешенный шарик за математический маятник, будет $\delta=\frac{T_2-T_1}{T_1}=$ $=\frac{T_2}{T_1}-1=\sqrt{A}-1$; отсюда $A=\left[1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]=(1+\delta)^2$, или $\frac{R}{l}=\sqrt{\frac{5}{2}\left[(1+\delta)^2-1\right]}$ — (3). По условию $\delta\le 0{,}01$. Подставляя в (3), получим $\frac{R}{l}\le 0{,}0224$. Так как $R=\frac{D}{2}=0{,}02$ м, то предельное расстояние от центра масс шарика до точки подвеса $l\ge 0{,}089$ м, а предельная длина нити $L=l-R$; $L=0{,}069$ м.

3.50. Однородный шарик подвешен на нити, длина которой l равна радиусу шарика R. Во сколько раз период малых колебаний T_1 этого маятника больше периода малых колебаний T_2 математического маятника с таким же расстоянием от центра масс до точки подвеса?

Решение:



Период малых колебаний данного физического маятника $T_1=2\pi\sqrt{\frac{J}{m2Rg}}$. Период малых колебаний математического маятника

$T_2 = 2\pi\sqrt{2R/g}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + m(2R)^2$, где $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$, отсюда $J = \frac{2}{5}mR^2 + 4mR^2 = 4{,}4mR^2$. Тогда $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4{,}4mR^2}{2mRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}2R}{g}}$; $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{2{,}2R}\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{g}\sqrt{2R}}$. После подстановки $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}05$.