§ 4. Механика жидкостей и газов

В задачах этого раздела используются данные таблицы 11 из приложения. Прежде чем приступать к числовым расчетам, необходимо представить все величины в единицах системы СИ.

4.1. Найти скорость v течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время $t = 30$ мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 0{,}51$ кг. Плотность газа $\rho = 7{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы $D = 2$ см.

Решение:

За время t через поперечное сечение трубы проходит некоторый объем газа цилиндрической формы (масса этого объема газа нам известна). $V = \pi\dfrac{D^2}{4}l = \dfrac{m}{\rho}$ — (1). Скорость течения углекислого газа $v = l/t$. Из уравнения (1) найдем $l = \dfrac{4m}{\pi D^2 \rho}$, тогда $v = \dfrac{4m}{\pi D^2 \rho t}$; $v = 0{,}12$ м/с.

4.2. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0{,}5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты $h = 0{,}2$ м.

Решение:

По теореме Бернулли $\dfrac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \dfrac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. В силу неразрывности струи $v_1 S_1 = v_2 S_2$, откуда $v_2 = \dfrac{v_1 S_1}{S_2}$ — (2), где S_1 — площадь поперечного сечения сосуда, S_2 —

площадь поперечного сечения отверстия. Подставляя (2) в (1), получим $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Так как $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ и $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Поскольку $d^4 << D^4$, то $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$.

При $h = 0{,}2$ м скорость $v_1 = 0{,}8$ мм/с.

4.3. На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h_1 от дна сосуда и на расстоянии h_2 от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии l от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случае, если: а) $h_1 = 25$ см, $h_2 = 16$ см ; б) $h_1 = 16$ см, $h_2 = 25$ см?

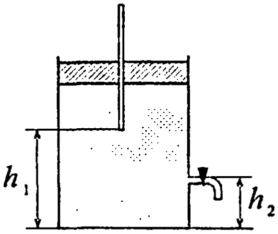
Решение:

По теореме Бернулли $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \frac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. По условию $v_1 = 0$, тогда $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Высота $h_1 = \frac{gt^2}{2}$. Откуда время $t = \sqrt{2h_1 / g}$, тогда расстояние $l = v_2 t$; $l = \sqrt{4gh_1h_2 / g} = 2\sqrt{h_1h_2}$; $l = 0{,}4$ м.

4.4. Сосуд, наполненный водой, сообщается с атмосферой через стеклянную трубку, закрепленную в горлышке сосуда. Кран K находится на расстоянии $h_2 = 2$ см от дна сосуда. Найти скорость v вытекания воды из крана в случае, если расстояние между нижним концом трубки и дном сосуда: а) $h_1 = 2$ см; б) $h_1 = 7{,}5$ см; в) $h_1 = 10$ см.

Решение:

По закону сохранения энергии $W_п = W_к$, где $W_п = mg\Delta h = mg \times (h_1 - h_2)$ — потенциальная энергия водного столба над краном. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия



вытекающей воды. $mg(h_1 - h_2) = \frac{mv^2}{2}$, отсюда $v^2 = 2g(h_1 - h_2)$ и $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. а) При $h_1 = 0{,}02$ м, $h_1 = h_2$, следовательно, $\Delta h = 0$ и $v = 0$. б) При $h_1 = 0{,}075$ м, $v = 1{,}04$ м/с. в) При $h_1 = 0{,}1$ м, $v = 1{,}25$ м/с.

4.5. Цилиндрической бак высотой $h = 1$ м наполнен до краев водой. За какое время t вся вода выльется через отверстие, расположенное у дна бака, если площадь S_2 поперечного сечения отверстия в 400 раз меньше площади поперечного сечения бака? Сравнить это время с тем, которое понадобилось бы для вытекания того же объема воды, если бы уровень воды в баке поддерживался постоянным на высоте $h = 1$ м от отверстия.

Решение:

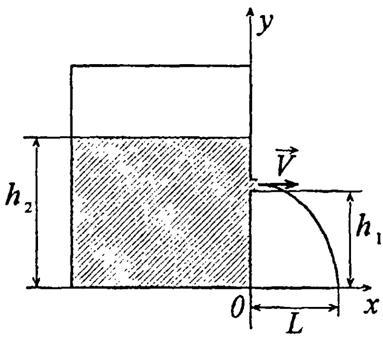
В задаче 4.2 была получена формула, выражающая скорость понижения уровня воды в баке $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gx}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Здесь x — переменный уровень воды в баке. За время dt уровень воды в баке понизится на $dx = v \cdot dt = \frac{S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}\sqrt{x}dt$. Решаем это уравнение:

$$t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}} 2\sqrt{x}\Big|_0^h; \quad t = \frac{2\sqrt{h}\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}.$$

Подставив числовые данные, получим $t = 3$ мин.

4.6. В сосуд льется вода, причем за единицу времени наливается объем воды $V_t = 0{,}2$ л/с. Каким должен быть диаметр d отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне $h = 8{,}3$ см?

Решение:



Чтобы вода в сосуде была на постоянном уровне, необходимо, чтобы за одинаковые промежутки времени втекало и вытекало одинаковое количество воды. $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$. Т. к. $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения отверстия, то скорость вытекания жидкости $v = \frac{4V_t}{\pi d^2}$. Из уравнения Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h$, отсюда $v = \sqrt{2gh}$. Тогда $\sqrt{2gh} = \frac{4V_t}{\pi d^2}$; $d^2 = \frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}$; $d = \sqrt{\frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}} = 1{,}4$ см.

4.7. Какое давление p создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью $v = 25$ м/с? Плотность краски $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³.

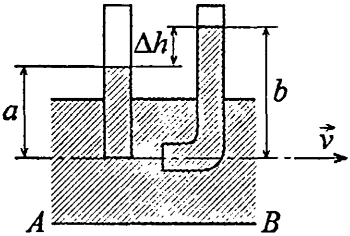
Решение:

Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

В нашем случае при $h = 0$, $p = \frac{\rho v^2}{2} = 250$ кПа.

4.8. По горизонтальный трубе АВ течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубах a и b равна $\Delta h = 10$ см. Диаметры трубок a и b одинаковы. Найти скорость v течен жидкости в трубе AB.

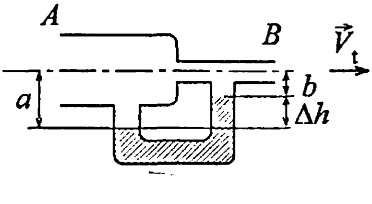
Решение:



Т. к. диаметры трубок $D_a = D_b$, то площади поперечного сечения $S_a = S_b$ — (1). В силу неразрывности струи $v_a S_a = v_b S_b$ — (2). Из (1) и (2) $v_a = v_b = v$. По формуле Торричелли $\rho g a + \frac{\rho v^2}{2} = \rho g b$, отсюда $v^2 / 2 = gb - ga = g(b-a)$. Т. к. $b - a = \Delta h$, то $v^2 = 2g\Delta h$ и $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}4$ м/с.

4.9. Воздух продувается через трубку AB. За единицу времени через трубку AB протекает объем воздуха $V_t = 5$ л/мин. Площадь поперечного сечения широкой части трубки AB равна $S_1 = 2$ см^2, а узкой ее части и трубки abc равна $S_2 = 0{,}5$ см^2. Найти разность уровней Δh воды, налитой в трубку abc. Плотность воздуха $\rho = 1{,}32$ кг/м^3.

Решение:



Объем воздуха, протекающий за единицу времени через трубку AB, $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$, где l — длина струи, t — время, $v = l/t$ — скорость движения воздуха. $v_1 = \frac{V_t}{S_1}$; $v_2 = \frac{V_t}{S_2}$; $V_t = 8{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^3/с. Из формулы

Торричелли имеем $\frac{\rho_{воз} v_1^2}{2} + \rho_{вод} g\Delta h = \frac{\rho_{воз} v_2^2}{2}$, откуда $\Delta h = \frac{\rho_{воз} V_l^2}{2\rho_{вод} g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\rho_{воз} V_l^2 \left(S_1^2 - S_2^2\right)}{2\rho_{вод} g S_1^2 S_2^2} = 1{,}75$ мм.

4.10. Шарик всплывает с постоянной скоростью v в жидкости, плотность ρ_1 которой в 4 раза больше плоскости материала шарика. Во сколько раз сила трения $F_{тр}$, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести mg, действующей на этот шарик?

Решение:

По второму закону Ньютона $F_A - mg - F_{тр} = 0$ — (1), где $F_A = \rho_1 Vg$ — (2); $m = \rho_2 V$ — (3). Из (3) $V = \frac{m}{\rho_2}$, тогда $F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg$ — (4). Преобразуя (1) с учетом (4), получим $F_{тр} = 3mg$ или $\frac{F_{тр}}{mg} = 3$.

4.11. Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром $d = 0{,}3$ мм, если динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Па·с?

Решение:

Во время падения на каплю действуют две противоположно направленные силы. Сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}$ (силу Архимеда не учитываем). При увеличении скорости падения сила сопротивления растет. Максимальной скорости капля достигнет, когда сила тяжести и сила сопротивления воздуха станут равны, $F = mg$. По закону Стокса $F = 6\pi\eta rv = 3\pi\eta dv$, тогда

$3\pi\eta dv = mg$. Поскольку $m = \rho V = \rho\dfrac{\pi d^3}{6}$, где ρ — плотность воды, то $3\pi\eta dv = \rho g\dfrac{\pi d^2}{6}$, откуда $v = \dfrac{\rho g d^2}{18\eta}$; $v = 4{,}1$ м/с.

4.12. Стальной шарик диаметром $d = 1$ мм падает с постоянной скоростью $v = 0{,}185$ см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую вязкость η касторового масла.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c\dfrac{\pi d^3}{6}$ —(2); сила Архимеда $F_A = \rho_м Vg = \rho_м g \times \times\dfrac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times \times(\rho_c - \rho_м)$, откуда $\eta = \dfrac{d^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18v}$; $\eta = 2$ Па·с.

4.13. Смесь свинцовых дробинок с диаметрами $d_1 = 3$ мм и $d_2 = 1$ мм опустили в бак с глицерином высотой $h = 1$ м. На сколько позже упадут на дно дробинки меньшего диаметра по сравнению с дробинками большего диаметра? Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}47$ Па·с.

Решение:

Считая движение дробинок равномерным, запишем второй закон Ньютона в общем случае $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса дробинки $m=\rho_c V=\rho_c \pi d^3/6$ — (2); сила Архимеда $F_A=\rho_г Vg=\rho_г g\dfrac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления глицерина $F=3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставив уравнение (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v=d^2 g(\rho_c-\rho_г)$ — (5). Здесь ρ — плотность свинца, $\rho_г$ — плотность глицерина. При равномерном движении скорость $v=\dfrac{h}{t}$ — (6). Подставив уравнение (6) в (5), выразим время t за которое дробинка достигнет дна $t=\dfrac{18\eta h}{d^2 g(\rho_c-\rho_г)}$. Тогда $\Delta t=t_2-t_1=\dfrac{18\eta h}{g(\rho_c-\rho_г)}$; $\Delta t=4$ мин.

4.14. Пробковый шарик радиусом $r=5$ мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую и кинематическую вязкости касторового масла, если шарик всплывает с постоянной скоростью $v=3{,}5$ см/с.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $F_A-F-mg=0$ — (1), где масса шарика $m=\rho_п V=\rho_п\dfrac{4\pi r^3}{3}$ — (2); сила Архимеда $F_A=\rho_м Vg=\rho_м g\dfrac{4\pi r^3}{3}$ — (3); сила сопротивления масла $F=6\pi\eta rv$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v=4r^2 g(\rho_п-\rho_м)$, откуда динамическая вязкость $\eta=\dfrac{2r^2 g(\rho_п-\rho_м)}{9v}$; $\eta=1{,}09$ Па·с. Кинематическая вязкость масла $\nu=\eta/\rho_м$; $\nu=12{,}1$ см^2/с.

4.15. В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом $R = 2$ см вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус $r = 1$ мм которого и длина $l = 2$ см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}2$ Па·с. Найти зависимость скорости v понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Найти значение этой скорости при $h = 26$ см.

Решение:

Объем масла, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля: $V = \frac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta}$ — (1), где разность давлений на концах капилляра $\Delta P = \rho g h$ — (2). С другой стороны, $V = S'v't = \pi r^2 v't$ — (3), где v' — скорость протекания масла через капилляр. Решая совместно (1) — (3), найдем $v' = \frac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}$. В силу неразрывности струи $v'S' = vS$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, отсюда $v = \frac{v'S'}{S} = \frac{v'r^2}{R^2}$. Окончательно имеем $v = \frac{r^4 \rho g h}{8 l \eta R^2}$. При $h = 0{,}26$ м скорость $v = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с.

4.16. В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого $r = 1$ мм и длина $l = 1{,}5$ см. В сосуд налит глицерин, динамическая вязкость которого $\eta = 1{,}0$ Па·с. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 0{,}18$ м выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объем глицерина $V = 5\ \text{см}^3$?

Решение:

Объем глицерина, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля

$V=\dfrac{\pi r^4 t\Delta P}{8l\eta}$ — (1). Разность давлений на концах капилляра обусловлена гидростатическим давлением жидкости, $\Delta P=\rho gh$ — (2). Подставив (2) в (1), выразим t: $t=\dfrac{8Vl\eta}{\pi r^4\rho gh}$; $t=1{,}5$ мин.

4.17. На столе стоит сосуд, в боковую поверхность которого вставлен горизонтальный капилляр на высоте $h_1=5$ см от дна сосуда. Внутренний радиус капилляра $r=1$ мм и длина $l=1$ см. В сосуд налито машинное масло, плотность которого $\rho=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3 и динамическая вязкость $\eta=0{,}5$ Па·с. Уровень масла в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h_2=50$ см выше капилляра. На каком расстоянии L от конца капилляра (по горизонтали) струя масла падает на стол?

Решение:

По формуле Пуазейля $V=\dfrac{\pi r^4 t\Delta p}{8l\eta}$, где по закону Паскаля перепад давления $\Delta p=\rho g\Delta h=\rho g(h_2-h_1)$. Тогда $V=\dfrac{\pi r^4 t\rho g(h_2-h_1)}{8l\eta}$, отсюда $V_t=\dfrac{V}{t}=\dfrac{\pi r^4\rho g(h_2-h_1)}{8l\eta}$. С другой стороны, $V_t=vS=v\pi r^2$ (см. задачи 4.6 и 4.9), следовательно, $v\pi r^2=\dfrac{\pi r^4\rho g(h_2-h_1)}{8l\eta}$; $v=\dfrac{r^2\rho g(h_2-h_1)}{8l\eta}$ — скорость вытекания струи из капилляра. Далее рассматриваем движения струй вдоль осей x и y, как независимые, причем по x движение равномерное, а по y — равнопеременное, поэтому $x=vt$ и $y=h_1-\dfrac{gt^2}{2}$. В точке падения струи на стол $y=0$, соответственно $h_1-\dfrac{gt^2}{2}=0$;

$t^2 = \frac{2h_1}{g}$; $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Тогда струя падает на стол на расстоянии $L = x = vt = \frac{r^2 \rho g(h_2 - h_1)}{8l\eta}\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1\,\text{см}$.

4.18. Стальной шарик падает в широком сосуде, наполненном трансформаторным маслом, плотность которого $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3$ и динамическая вязкость $\eta = 0{,}8\ \text{Па·с}$. Считая, что закон Стокса имеет место при числе Рейнольдса $Re \le 0{,}5$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр шарика), найти предельное значение диаметра D шарика.

Решение:

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}$ — (2); сила Архимеда $F_A = \rho_м V g = \rho_м \times \times g\frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta d v$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times \times(\rho_c - \rho_м)$, откуда $v = \frac{D^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18\eta}$ — (5). Число Рейнольдса определяется соотношением $Re = \frac{Dv\rho_м}{\eta}$. По условию $Re \le 0{,}5$, тогда $\frac{Dv\rho_м}{\eta} \le 0{,}5$ или, с учетом (5), $\frac{D^3 g(\rho_c - \rho_м)\rho_м}{18\eta^2} \le 0{,}5$. Отсюда $D \le \sqrt[3]{\frac{0{,}5 \cdot 18\eta^2}{g\rho_м(\rho_c - \rho_м)}}$. Предельный диаметр шарика $D = 4{,}6\ \text{мм}$.

4.19. Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса $Re \le 3000$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр трубы), показать, что условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению. Кинематическая вязкость газа $\nu = 1{,}33 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Решение:

Поскольку число Рейнольдса можно задать соотношением $Re = \dfrac{Dv}{\nu}$, то ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\dfrac{Dv}{\nu} \le 3000$. Подставив данные задачи 4.1, получим $1805 \le 3000$. Мы получили верное неравенство, следовательно, условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению.

4.20. Вода течет по трубе, причем за единицу времени через поперечное сечение трубы протекает объем воды $V_t = 200$ см³/с. Динамическая вязкость воды $\eta = 0{,}001$ Па·с. При каком предельном значении диаметра D трубы движение воды остается ламинарным? (Смотри условие предыдущей задачи.)

Решение:

Ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\dfrac{Dv\rho}{\eta} \le 3000$ — (1). Скорость течения воды $v = \dfrac{l}{t}$, в единицу времени $v = l$, где l — высота цилиндра объемом V_t. $V_t = \frac{\pi D^2 l}{4}$, откуда $l = \frac{4V_t}{\pi D^2}$. Тогда $v = \frac{4V_t}{\pi D^2}$, а неравенство (1) можно переписать: $\frac{4V_t \rho}{\pi D \eta} \leq 3000$, откуда $D \leq \frac{4V_t \rho}{3000 \pi \eta}$; $D \leq 0{,}085$ м.