5.137. Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 0{,}01\,\text{м}^2$ за время $t = 10\,\text{с}$, если градиент плоскости в направлении, перпендикулярном к площадке, $\Delta\rho / \Delta x = 1{,}26\,\text{кг/м}^4$. Температура азота $t = 27°\,\text{C}$. Средняя длина свободного пробега молекул азота $\overline{\lambda} = 10\,\text{мкм}$.

Решение:

По закону Фика $m = -D\dfrac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$. Знак минус означает направление вектора градиента плотности, и т. к. масса не может быть отрицательной, то ее следует взять по модулю. Коэффициент диффузии (см. задачу 5.134) $D = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$.

Масса азота $m = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\lambda\dfrac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$; $m = 19{,}9\,\text{г}$.

5.138. При каком давлении p отношение вязкости некоторого газа к коэффициенту его диффузии $\eta / D = 0{,}3\,\text{кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость его молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = 632\,\text{м/с}$?

Решение:

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \dfrac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$ ($\overline{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\overline{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \dfrac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}\rho$. Таким образом, $\dfrac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p = \dfrac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда

$\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$. Но $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\overline{v^2}}{3}$, откуда $p = \frac{\rho \cdot \overline{v^2}}{3}$ или $p = \frac{\eta}{D} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3}$; $p = 39{,}9$ кПа.

5.139. Найти среднюю длину свободного пробега $\overline{\lambda}$ молекул гелия при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 0°$ С, если вязкость гелия $\eta = 13$ мкПа·с.

Решение:

Коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\rho\overline{v}\lambda$, где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho V = \frac{m}{\mu}RT$. Тогда коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Отсюда средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \frac{3RT}{p\mu}\eta\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{3}{p}\eta\sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}$; $\lambda = 182$ нм.

5.140. Найти вязкость η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него $D = 1{,}42 \cdot 10^{-5}$ м^2/с. Найти диаметр молекулы кислорода, если при температуре вязкость кислорода.

Решение:

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$ ($\overline{v}$ —

средняя арифметическая скорость, $\overline{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}\rho$. Таким образом, $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$ или $\frac{RT}{\mu} = \frac{pD}{\eta}$, откуда $\eta = \frac{pD\mu}{RT}$; $\eta = 17{,}8$ мкПа·с.

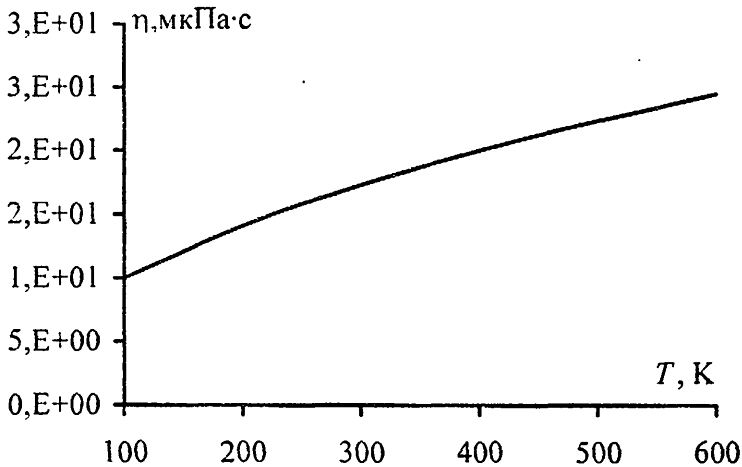
5.141. Найти диаметр σ молекулы кислорода, если при температуре $t = 0°$ С вязкость кислорода $\eta = 18{,}8$ мкПа/с.

Решение:

Динамическая вязкость кислорода определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}\rho$ — (1), где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$, откуда $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}}$; $\sigma = 0{,}3$ нм.

5.142. Построить график зависимости вязкости η азота от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К.

Решение:



Динамическая вязкость азота определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$. Величина $\frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu}{R\pi}} = const \approx 10^{-6}$, тогда $\eta = 10^{-6}\sqrt{T}$. Характер зависимости вязкости η от температуры T дан на графике.

5.143. Найти коэффициент диффузии D и вязкость η воздуха при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 10°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Коэффициент диффузии (см. задачи 5.134 и 5.135) $D=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D=1{,}45\cdot10^{-5}$ м²/с. Кроме того, коэффициент диффузии $D=\frac{1}{3}\bar{v}\lambda$, а коэффициент вязкости $\eta=\frac{1}{3\rho}\bar{v}\lambda$. Таким образом, $\eta=pD$, где плотность ρ можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV=\frac{m}{\mu}RT$, отсюда $\rho=\frac{m}{V}=\frac{p\mu}{RT}$. Тогда $\eta=\frac{p\mu}{RT}D$; $\eta=18{,}2$ мкПа·с.

5.144. Во сколько раз вязкость кислорода больше вязкости азота? Температуры газов одинаковы.

Решение:

Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\times$ $\times\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Тогда $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Т. к. температура газов одинакова , то $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2$; $\frac{\eta_1}{\eta_2}=1{,}07$.

5.145. Коэффициент диффузии и вязкость водорода при некоторых условиях равны $D=1{,}42\cdot10^{-4}$ м²/с и $\eta=8{,}5$ мкПа·с. Найти число n молекул водорода в единице объема.

Решение:

Коэффициенты вязкости и диффузии связаны соотношением $\eta = \rho D$ (см. задачу 5.143). Отсюда плотность $\rho = \frac{\eta}{D}$. Число частиц в единице объема $n = \frac{\rho}{\mu} N_A = \frac{\eta N_A}{\mu D}$; $n = 1{,}8 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

5.146. Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ м^2/с и $\eta = 19{,}5$ мкПа·с. Найти плотность ρ кислорода, среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$ и среднюю арифметическую скорость $\bar{v}$ его молекул.

Решение:

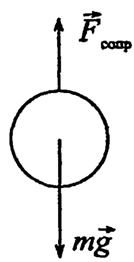
Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ ($\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$. Таким образом $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа $\rho = 1{,}6$ кг/м^3. Средняя арифметическая скорость $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или, после несложных преобразований, $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$, но из (2) $\frac{RT}{\mu} = \frac{\bar{v}^2\pi}{8}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\bar{v}^2\pi}{8}$, откуда $p = \frac{\rho\bar{v}^2\pi}{8}$. Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2\pi n}$, где

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{\rho\bar{v}^2\pi}{8kT}=\frac{\rho R}{k\mu}, \text{ отсюда } \lambda=\frac{k\mu}{\sqrt{2}\sigma^2\pi\rho R}; \quad \lambda=83{,}5 \text{ нм.}$$

Из уравнения (1) $\bar{v}=\frac{3D}{\lambda}$; $\bar{v}=440$ м/с.

5.147 Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром $D=0{,}3$ мм? Диаметр молекул воздуха $\sigma=0{,}3$ нм. Температура воздуха $t=0°$ С. Считать, что для дождевой капли справедлив закон Стокса.

Решение:



На каплю действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По второму закону Ньютона $m\vec{g}+\vec{F}_{сопр}=m\vec{a}$. Когда капля достигнет максимальной скорости ускорение a станет равным нулю, тогда $mg=F_{сопр}$. По закону Стокса $F_{сопр}=6\pi\eta r v_{max}$. Каплю считаем шаром, поэтому ее объем $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, а масса $m=\rho V=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$. Тогда имеем $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=6\pi\eta r v$. Отсюда $v=\frac{4r^2\rho g}{18\eta}=\frac{2(D/2)^2\rho g}{9\eta}=\frac{D^2\rho g}{18\eta}$. Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta=\frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$, где $\lambda=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда, искомая, максимальная скорость дождевой капли $v=\frac{D^2\rho g}{18}\frac{3RT\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{p\mu kT}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}=\frac{\sqrt{2}D^2\rho g N_A\pi\sigma^2}{6\mu}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}$;

$v=2{,}73$ м/с.

5.148. Самолет летит со скоростью $v=360$ км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости,

$d = 4$ см, найти касательную силу F_S, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Температура воздуха $t = 0°$ С.

Решение:

По закону Ньютона $F_{тр} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Знак минуса означает направление градиента скорости, поэтому нас интересует модуль силы. Сила на единицу площади $F_S = \frac{F_{тр}}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x}$. В нашем случае $\Delta v = v$ и $\Delta x = d$. Коэффициент вязкости (см. задачи 5.139 и 5.147). $\eta = \frac{1}{3} \frac{p\mu}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} =$ $= \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A \pi\sigma^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Отсюда $F_S = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A \pi\sigma^2} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{v}{d}$; $F_S = 44{,}77$ мН/м^2.

5.149. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны $r = 5$ см и $R = 5{,}2$ см. Высота внутреннего цилиндра $h = 25$ см. Внешний цилиндр вращается с частотой $n = 360$ об/мин. Для того чтобы внутренней цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу $F = 1{,}38$ мН. Рассматривая в первом приближении случай как плоский, найти из данных этого опыта вязкость η газа, находящегося между цилиндрами.

Решение:

По закону Ньютона для вязкости $F_{тр} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Пространство между цилиндрами $\Delta x = R - r$. Линейная скорость вращения внешнего цилиндра $\Delta v = Ln$, где $L = 2\pi R$ — длина окружности внешнего цилиндра. Тогда $\Delta v = 2\pi R n$. Площадь боковой поверхности внутреннего цилиндра $\Delta S = 2\pi r h$. По третьему закону Ньютона, касательная сила

$F = -F_{тр} = \eta \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Следовательно, $F = \eta \dfrac{2\pi R n}{R-r} 2\pi r h =$ $= \eta \dfrac{4\pi^2 R r n h}{R-r}$. Отсюда $\eta = \dfrac{F(R-r)}{4\pi^2 R r n h}$; $\eta = 17{,}92$ мкПа·с.

5.150. Найти теплопроводность K водорода, вязкость которого $\eta = 8{,}6$ мкПа·с.

Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = \dfrac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$, а коэффициент вязкости $\eta = \dfrac{1}{3} \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Отсюда следует, что коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением $K = c_V \eta$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. водород — двухатомный газ. Тогда $c_V = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu}$, поэтому $K = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu}\eta$; $K = 89{,}33$ мВт/(м·К).

5.151. Найти теплопроводность K воздуха при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 10°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

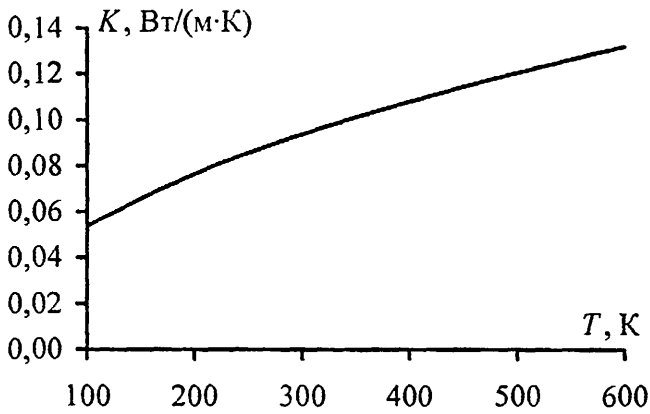
Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = \dfrac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Средняя арифметическая скорость $\bar{v}_{ср} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$, плотность $\rho = m/V =$

$=\dfrac{p\mu}{RT}$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V=\dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, где для воздуха $i=5$. Тогда коэффициент теплопроводности $K=\dfrac{1}{3}\dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}\dfrac{p\mu}{RT}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $K=\dfrac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\times$ $\times\sqrt{8RT/\pi\mu}$; $K=13{,}1$ мВт/(м·К).

5.152. Построить график зависимости теплопроводности K от температуры T в интервале $100\le T\le 600$ К через каждые 100К.

Решение:



Имеем $K=\dfrac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}c_V\rho$ — (1), где $\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); $\bar{\lambda}=\dfrac{RT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — (3); $\rho=\dfrac{p\mu}{RT}$ — (4). Удельная теплоемкость водорода $c_V=10400$ Дж/кг·К. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), получим $K=\dfrac{2kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\dfrac{\mu}{R\pi^3}}\cdot\sqrt{T}$

или $K = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\sqrt{T}$. Характер зависимости теплопроводности K от температуры T дан на графике.

5.153. В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $K = 14$ мВт/(м·К). Найти коэффициент диффузии D газа.

Решение:

Коэффициент теплопроводности $K = c_V \rho \bar{v} \lambda / 3$, а коэффициент диффузии $D = \bar{v}\lambda / 3$, следовательно, коэффициенты теплопроводности и диффузии связаны соотношением $K = c_V \rho D$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Число частиц в единице объема $n = \dfrac{\rho}{\mu} N_A$, а в объеме V $N = nV = \dfrac{\rho V N_A}{\mu}$, отсюда $\rho = \dfrac{\mu N}{V N_A}$. Тогда $K = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu}\dfrac{\mu N}{V N_A}$; $D = \dfrac{5kND}{2V}$, откуда $D = \dfrac{2VK}{5kN}$; $D = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5.154. Углекислый газ и азот находится при одинаковых температурах и давлениях. Найти для этих газов отношение: а) коэффициентов диффузии; б) вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Решение:

а) Коэффициент диффузии (см. задачу 5.135) $D = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} \dfrac{rT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Т. к. $\sigma_1 = \sigma_2$, то $\dfrac{D_1}{D_2} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\dfrac{D_1}{D_2} = 0{,}8$.

б) Коэффициент вязкости (см. задачу 5.148) $\eta = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A \pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Тогда $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$; $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}25$.

в) Коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, тогда $\frac{K_1}{K_2} = \frac{i_1}{i_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\frac{K_1}{K_2} = 0{,}96$.

5.155. Расстояние между стенками дьюаровского сосуда $d = 8$ мм. При каком давлении p теплопроводность воздуха, находящегося между стенками сосуда, начнет уменьшатся при откачке? Температура воздуха $t = 17°$ С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Теплопроводность воздуха между стенками сосуда начинает уменьшаться, когда средняя длина свободного пробега молекул станет равной расстоянию между стенками сосуда, т. е. $\lambda = d$. Т. к. $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120), отсюда $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}$; $p = 1{,}25$ Па.

5.156. Цилиндрический термос с внутренним радиусом $r_1 = 9$ см и внешним радиусом $r_2 = 10$ см наполнен льдом. Высота термоса $h = 20$ см. Температура льда $t_1 = 0°$ С, температура наружного воздуха $t_2 = 20°$ С. При каком предельном давлении p воздуха между стенками термоса теплопроводность K еще будет зависеть от давления? Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм, а температуру воздуха между стенками термоса считать равной среднему арифметическому температур льда и наружного воздуха. Найти теплопроводность K воздуха, заключенного между стенками термоса, при давлениях $p_1 = 101{,}3$ кПа и $p_2 = 13{,}3$ мПа, если молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Какое количество теплоты Q проходит за время $\Delta t = 1$ мин через боковую поверхность термоса средним радиусом $r = 9{,}5$ см при давлениях $p_1 = 101{,}3$ кПа и $p_2 = 13{,}3$ мПа?

Решение:

Теплопроводность начнет зависеть от давления при средней длине свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = d$, где d — расстояние между стенками термоса. Т. к. $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, то при $\bar{\lambda} = d$ получим $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi s^2 d} = 980$ мПа. При $p_1 = 101{,}3$ кПа коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K_1 = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 13{,}1$ мВт/(м·К). При $p_2 = 13{,}3$ мПа средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ больше расстояния d между стенками термоса. Тогда $K = \frac{1}{3}d\bar{v}\rho c_V = \frac{1}{3}(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{p\mu}{RT}\frac{iR}{2\mu} = \frac{1}{6}(r_2 - r_1)pi\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}}$.

Подставляя числовые данные, получим $K_2 = 178$ мВт/(м·К).

Количество теплоты $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S \cdot \Delta t$. Но $\Delta S = 2\pi r h = 2\pi h\frac{r_1 + r_2}{2} = \pi h(r_1 + r_2)$. Тогда $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}\pi h(r_1 + r_2)\cdot \Delta t$.

Подставляя числовые данные, получим $Q_1 = 188$ Дж; $Q_2 = 2{,}55$ Дж.

5.157. Какое количество теплоты Q теряет помещение за время $t = 1$ час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы $S = 4$ м^2, расстояние между ними $d = 30$ см. Температура помещения $t_1 = 18°$ C, температура наружного воздуха $t_2 = -20°$ C. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление $p = 101{,}3$ кПа.

Решение:

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K = \dfrac{2Kc_v}{3\sigma^2}\sqrt{\dfrac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь T — температура воздуха между рамами, $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 272$ К; удельная теплоемкость воздуха $c_V = 717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K = 12{,}9 \cdot 10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x = d$, имеем $Q = K\dfrac{T_2 - T_1}{d}S \cdot t$; $Q = 24$ кДж.

5.158. Между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T = 1$ К. Площадь каждой пластины $S = 0{,}01\ \text{м}^2$. Какое количество теплоты Q передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за время $t = 10$ мин? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение:

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\dfrac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K = \frac{2Kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь $T = 273$ К. Удельная теплоемкость воздуха $c_V = 717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K = 13 \cdot 10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x = d$, имеем $Q = K\frac{\Delta T}{d}S \cdot t$; $Q = 24$ кДж.

5.159. Масса $m = 10$ г кислорода находится при давлении $p = 300$ кПа и температуре $t = 10°$ С. После нагревания при $p = const$ газ занял объем $V = 10$ л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔW внутренний энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Решение:

Количество теплоты, полученное газом определяется следующим соотношением: $Q = \frac{m}{\mu}C_p\Delta T$ — (1). Молярная теплоемкость кислорода при $p = const$ $C_p = 29{,}1$ Дж/моль·К. Запишем уравнения состояния газа до и после нагревания. $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (2); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (3). Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), получим $p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T$ — (4). Из (2) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$ — (5). Выразим из (4) ΔT с учетом (5): $\Delta T = \frac{\mu p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)}{mR} = \frac{\mu pV_2 - mRT_1}{mR}$ — (6). Тогда уравнение (1) можно записать в виде $Q = C_p \frac{(\mu p V_2 - mRT_1)}{\mu R}$; $Q = 7{,}92$ кДж. Изменение внутренней энергии кислорода $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$ или, подставляя (6), $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{1}{\mu}\times$ $\times(\mu p V_2 - mRT_1)$; $\Delta W = 5{,}66$ кДж. Работа, совершаемая при изменении объема газа $A = p\int\limits_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$ или, с учетом (5), $A = p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $A = 2{,}26$ кДж.

5.160. Масса $m = 6{,}5$ г водорода, находящегося при температуре $t = 27°$ С, расширяется вдвое при $p = const$ за счет притока тепла извне. Найти работу A расширения газа, изменение ΔW внутренний энергии газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Работа расширения газа $A = p\int\limits_{V}^{2V} dV = p(2V - V) = pV$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ работа $A = \frac{m}{\mu}RT$; $A = 8{,}1$ Дж. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$, где $i = 5$. Т. к. $p = const$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, следовательно, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$. Отсюда $T_2 = 2T_1$ и $\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1 = t + 273^o$. Тогда $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_1$;

$\Delta W = 20{,}25$ кДж. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta W + A$; $Q = 28{,}35$ кДж.

5.161. В закрытом сосуде находится масса $m_1 = 20$ г азота и масса $m_2 = 32$ г кислорода. Найти изменение ΔW внутренней энергии смеси газов при охлаждении ее на $\Delta T = 28$ К.

Решение:

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. Для двухатомных газов количество степеней свободы $i = 5$, следовательно, для смеси кислорода и азота имеем; $\Delta W = \frac{5}{2}R\Delta T\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $\Delta W = 1$ кДж.

5.162. Количество $\nu = 2$ кмоль углекислого газа нагревается при постоянном давлении на $\Delta T = 50$ К. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа, работу A расширения газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. В условиях данной задачи $\Delta W = \nu 3R\Delta T$; $\Delta W = 2{,}5$ МДж. Работа, совершаемая при расширении газа, $A = p\Delta V$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, следовательно, $\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mu p}$, тогда $A = \frac{mR\Delta T}{\mu} = \nu R\Delta T$; $A = 0{,}83$ МДж. Количество теплоты, сообщенное газу, $Q = \nu \cdot C_p\Delta T$. Молярная теплоемкость углекислого газа $C_p = 33{,}2$ Дж/моль·К. $Q = 3{,}32$ МДж.

5.163. Двухатомному газу сообщено количество теплоты $Q = 2{,}093$ кДж. Газ расширяется при $p = const$. Найти работу A расширения газа.

Решение:
Т. к. по условию давление постоянно, то количество тепла, сообщенное газу $Q = c_p m\Delta T$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Тогда $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Из первого закона термодинамики следует, что $A = Q - \Delta W = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T - \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Т. к. $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, то $\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{2Q}{7}$, следовательно, работа расширения газа $A = \frac{2Q}{7}$; $A = 598$ Дж.

5.164. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа $A = 156{,}8$ Дж. Какое количество теплоты Q было сообщено газу?

Решение:
Количество теплоты, сообщенное газу, $dQ = C_p dT$, откуда $Q = C_p \int_{T_1}^{T_2} dT$; $Q = C_p(T_1 - T_2)$ — (1). Работа, совершаемая при расширении газа, $dA = pdV$; $A = p\int_{V_1}^{V_1} dV$; $A = p \times (V_2 - V_1)$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p\Delta v = vR\Delta T$, тогда $A = vR(T_2 - T_1)$ — (2). Решая совместно

(1) и (2), получим $Q = C_p \frac{A}{\nu R}$, где $C_p = \nu \frac{7}{2} R$. Отсюда $Q = \frac{7}{2} A$; $Q = 550$ Дж.

5.165. В сосуде объемом $V = 5$ л находится газ при давлении $p = 200$ кПа и температуре $t = 17°$ С. При изобарическом расширении газа была совершена работа $A = 196$ Дж. На сколько нагрели газ?

Решение:
Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи. $A = \nu R \Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{A}{\nu R}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$, откуда $\nu = pV / RT$. Тогда $\Delta T = \frac{AT}{pV}$; $\Delta T = 57$ К.

5.166. Масса $m = 7$ г углекислого газа была нагрета на $\Delta T = 10$ К в условиях свободного расширения. Найти работу A расширения газа и изменение ΔW его внутренней энергии.

Решение:
Работа по расширению газа $A = \nu R \Delta T = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ (см. уравнение (2) из задачи 2.164), $A = 13{,}2$ Дж. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T$, для CO_2 — $i = 6$, тогда $\Delta W = 3 \cdot \left(\frac{m}{\mu} R \Delta T \right)$, т. е. $\Delta W = 3A$; $\Delta W = 39{,}6$ Дж.

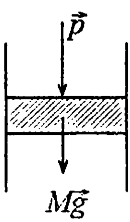
5.167. Количество $\nu = 1$ кмоль многоатомного газа нагревается на $\Delta T = 100$ К в условиях свободного расширения. Найти количество теплоты Q, сообщенное газу, изменение ΔW его внутренней энергии и работу A расширения газа.

Решение:

Работа расширения газа (см. задачу 5.160) $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T=$ $=\nu R\Delta T$; $A=831$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta W=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где $i=6$, т. к. газ многоатомный, тогда $\Delta W=3\nu R\Delta T$; $\Delta W=2{,}49$ МДж. Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta W+A$; $Q=3{,}32$ МДж.

5.168. В сосуде под поршнем находится масса $m=1$ г азота. Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на $\Delta T=10$ К? На сколько при этом поднимется поршень? Масса поршня $M=1$ кг, площадь его поперечного сечения $S=10\ \text{см}^2$. Давление над поршнем $p=100$ кПа.

Решение:



Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta W+A$. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где количество степеней свободы $i=5$, поскольку азот двухатомный газ. Работа газа по подъему поршня (см. задачу 5.160) $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Тогда количество теплоты необходимое для нагрева азота $Q=\frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T+\frac{m}{\mu}R\Delta T=$ $=\frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$; $Q=10{,}39$ Дж. При расширении газ совершает работу против сил тяжести и против сил атмосферного давления. Тогда $A=(Mg+pS)\Delta h$, но т. к. $A=\frac{m}{\mu}R\Delta T$, то

$(Mg + pS)\Delta h = \frac{m}{\mu} R\Delta T$. Отсюда найдем $\Delta h = \frac{mR\Delta T}{\mu(Mg + pS)}$; $\Delta h = 2{,}7$ см.

5.169. В сосуде под поршнем находится гремучий газ. Какое количество теплоты Q выделяется при взрыве гремучего газа, если известно, что внутренняя энергия газа изменилась при этом на $\Delta W = 336$ Дж и поршень поднялся на высоту $\Delta h = 20$ см? Масса поршня $M = 2$ кг, площадь его поперечного сечения $S = 10$ см^2. Над поршнем находится воздух при нормальных условиях.

Решение:

Работа гремучего газа по подъему поршня (см. задачу 5.168) $A = (Mg + pS)\Delta h$. Согласно первому закону термодинамики $Q = A + \Delta W = (Mg + pS)\Delta h + \Delta W$; $Q = 360{,}12$ Дж.

5.170. Масса $m = 10{,}5$ г азота изотермически расширяется при температуре $t = -23°$ С, причем его давление изменится от $p_1 = 250$ кПа до $p_2 = 100$ кПа. Найти работу A, совершенную газом при расширении.

Решение:

Работа, совершаемая при изотермическом изменении объема газа, $A = RT\frac{m}{\mu} \ln\frac{V_2}{V_1}$, где $T = 250$ К. Из закона Бойля — Мариотта $p_1 V_1 = p_2 V_2$ следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, поэтому работа $A = RT\frac{m}{\mu} \ln\frac{p_1}{p_2}$; $A = 713{,}85$ Дж.

5.171. При изотермическом расширении массы $m = 10$ г азота, находящегося при температуре $t = 17°$ C, была совершена работа $A = 860$ Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении?

Решение:
Работа, совершаемая при изотермическом расширении (см. задачу 5.170), $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{p_1}{p_2}$. Отсюда $ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{A\mu}{RTm}$, тогда $\frac{p_1}{p_2} = exp\left(\frac{A\mu}{RTm}\right)$; $\frac{p_1}{p_2} = 2{,}72$.

5.172. Работа изотермического расширения массы $m = 10$ г некоторого газа от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$ оказалась равной $A = 575$ Дж. Найти среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ молекул газа при этой температуре.

Решение:
Работа по расширению газа $dA = pdV$, откуда $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно, $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Тогда работа $A = \int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}$. Откуда выразим температуру $T = \frac{A\mu}{mR\cdot ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{A\mu}{mR\,ln2}$ — (1). Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Из (1) $\frac{RT}{\mu} = \frac{A}{m\,ln2}$, тогда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3A}{m\,ln2}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 500$ м/с.