5.74. Найти удельные теплоемкости c_V и c_p парообразного йода (I_2), если степень диссоциации его $\alpha = 0{,}5$. Молярная масса молекулярного йода $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Решение:

Теплоемкость при постоянном давлении $c_p = \frac{R}{2\mu}(7 + 3\alpha)$ (см. задачу 5.73); $c_p = 139$ Дж/(моль·К). Аналогично можно найти теплоемкость при постоянном объеме $Q = c_V m\Delta T$; $Q = \left[c_V^H(1-\alpha)m + c_V^g \alpha m\right]\cdot\Delta T$, отсюда $c_V = c_V^H(1-\alpha) + c_V^g\alpha$. Но $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, следовательно, $c_V^H = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$; $c_V^g = \frac{3}{2}\frac{2R}{\mu}$, тогда

$$c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}(1-\alpha) + \frac{6}{2}\frac{R}{\mu}\alpha = \frac{R}{2\mu}[5(1-\alpha) + 6\alpha] = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha);$$

$c_V = 89{,}97$ Дж/(моль·К).

5.75. Найти степень диссоциация α азота, если для него отношение $c_p / c_V = 1{,}47$.

Решение:

Теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме для частично диссоциированного газа $c_p = \frac{R}{2\mu}\times$ $\times(7+3\alpha)$; $c_V = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha)$ (см. задачи 5.73 и 5.74). Тогда

$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7+3\alpha}{5+\alpha}$; $\gamma(5+\alpha) = 7 + 3\alpha$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7 + 3\alpha$;

$-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7 + 3\alpha$; $-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$;

$\alpha(3-\gamma) = 5\gamma - 7$; $\alpha = \frac{5\gamma - 7}{3-\gamma}$; $\alpha = 0{,}228$.

5.76. Найти удельную теплоемкость c_p газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 3$ кмоль аргона и количества $\nu_2 = 3$ кмоль азота.

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси газов на некоторую температуру ΔT: $Q = c_p(m_1 + m_2)\cdot\Delta T$ или $Q = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot\Delta T$. Тогда $c_p(m_1 + m_2)\cdot\Delta T = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot\Delta T$, отсюда $c_p = \dfrac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}$. Т. к. аргон — газ одноатомный, то число степеней свободы $i = 3$, а азот — двухатомный, поэтому $i = 5$. Т.к. $c_p = \dfrac{i+2}{2}\dfrac{R}{\mu}$, то $c_{p1} = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu_1}$ и $c_{p2} = \dfrac{7}{2}\dfrac{R}{\mu_2}$. Тогда теплоемкость смеси при $p = const$: $c_p = \dfrac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{R/2(5\nu_1 + 7\nu_2)}{m_1 + m_2}$;
$c_p = \dfrac{R/2(5\nu_1 + 7\nu_2)}{\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2} = \dfrac{R(5\nu_1 + 7\nu_2)}{2(\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2)}$; $c_p = 685{,}72$ Дж/(кг·К).

5.77. Найти отношение c_p/c_V для газовой смеси, состоящей из массы $m_1 = 8$ г гелия и массы $m_2 = 16$ г кислорода.

Решение:

Удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении $c_p = \dfrac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$ (см. задачу 5.76). Аналогично можно найти теплоемкость смеси при постоянном объеме: $Q = c_V\cdot(m_1 + m_2)\Delta T$ и $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T$, откуда

$c_V = \dfrac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$. Но $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\mu_1}$; $c_{V2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu_2}$. Тогда удельная теплоемкость газовой смеси при $V = const$: $c_V = \dfrac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$. Отсюда

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}\,\frac{m_1 + m_2}{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2};$$

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{5m_1/\mu_1 + 7m_2/\mu_2}{3m_1/\mu_1 + 5m_2/\mu_2} = \frac{5m_1\mu_2 + 7m_2\mu_1}{3m_1\mu_2 + 5m_2\mu_1};\ \frac{c_p}{c_V} = 1{,}59.$$

5.78. Удельная теплоемкость газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 1$ кмоль кислорода и некоторой массы m_2 аргона равна $c_V = 430$ Дж/(кг·К),. Какая масса m_2 аргона находится в газовой смеси?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси на некоторую температуру ΔT $Q = c_V(m_1 + m_2)\cdot\Delta T$ или $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\cdot\Delta T$. Отсюда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{iR}{2\mu}$. Для кислорода $i_1 = 5$, а для аргона $i_2 = 3$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{5R}{2\mu_1} = 650$ Дж/(кг·К) и $c_{V2} = \dfrac{3R}{2\mu_2} = 312{,}5$ Дж/(кг·К). Тогда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$; $m_2(c_V - c_{V2}) = m_1(c_{V1} - c_V)$, откуда $m_2 = \dfrac{m_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}} = \dfrac{\mu_1\nu_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 60$ кг.

5.79. Масса $m = 10$ г кислорода находится при давлении $p = 0{,}3$ МПа и температуре $t = 10°$ С. После нагревания при $p = const$ газ занял объем $V_2 = 10$ л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, и энергию теплового движения молекул газа W до и после нагревания.

Решение:

Энергия теплового движения молекул кислорода до нагревания $W_1 = 5mRT_1 / 2\mu$ — (1), после нагревания $W_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). При расширении газа была совершена работа $\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$ — (3). Количество теплоты, полученное газом в соответствии с первым законом термодинамики, $\Delta Q = \Delta W + \Delta A$ — (4). Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$ — (5). Неизвестные V_1 и T_2 можно найти из уравнений начального и конечного состояний газа. $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (6); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (7). Из (6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$. Из (7) $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$. Из уравнения (1) $W_1 = 1{,}8$ кДж. Подставив (7) в (2), получим $W_2 = \frac{5}{2}pV_2$; $V_2 = 7{,}6$ кДж. Из (4), с учетом (3) и (6),

$$\Delta Q = (W_2 - W_1) + p \cdot \left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right); \ \Delta Q = 7{,}9 \text{ кДж}.$$

5.80. Масса $m = 12$ г азота находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л при температуре $t = 10°$ С. После нагревания давление в сосуде стало равным $p = 1{,}33$ МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу при нагревании?

Решение:

При $V = const$ $A = \int pdv = 0$ имеем $dQ = \frac{M}{\mu} C_V dT$, отсюда $Q = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{M}{\mu} C_V dt = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$. Температуру T_2 найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2 V = \frac{m}{\mu} RT_2$, откуда $T_2 = \frac{p_2 V \mu}{mR}$; $T_2 = 747$ К. Молярная теплоемкость азота $c_V = 20{,}8$ Дж/моль·К. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставив числовые данные, получим $Q = 4{,}15$ кДж.

5.81. В сосуде объемом $V = 0{,}1$ МПа находится азот при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при $p = const$ объем увеличился вдвое; б) при $V = const$ давление увеличилось вдвое?

Решение:

а) При $p = const$ количество теплоты $Q = \Delta W + A = = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, откуда $p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{p\Delta V}{R}$. Тогда из (1) получим $Q = \frac{C_p p\Delta V}{R} = 700$ Дж. б) При $V = const$ имеем $Q = \Delta W = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$ и $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $V\Delta p = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{V\Delta p}{R}$. Тогда из (1) получим $Q = C_V V\Delta p / R$; $Q = 500$ Дж.

5.82. В закрытом сосуде находится масса $m = 14$ г азота при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 27°$ С. После нагревания давление в сосуде повысилось в 5 раз. До какой температуры t_2 был нагрет газ? Найти объем V сосуда и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение:

Состояние газа до и после нагревания описывается уравнением Менделеева — Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1) и $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Поскольку $V = const$, то $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 5$, откуда $T_2 = 5T_1 = 1500$ К. Решая совместно (1) и (2), получим $V = \frac{mRT_1}{\mu p_1}$; $V = 12{,}4$ л. Количество теплоты, полученное газом, $Q = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T$, где молярная теплоемкость азота $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль·К). $Q = 12{,}4$ Дж.

5.83. Какое количество теплоты Q надо сообщить массе $m = 12$ г кислорода, чтобы нагреть его на $\Delta t = 50°$ С при $p = const$?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания при $p = const$: $Q = c_p m\Delta t$, где c_p — удельная теплоемкость.

При постоянном давлении $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. кислород — двухатомный газ, то $i = 5$ и $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m\Delta t$; $Q = 545$ Дж.

5.84. На нагревание массы $m = 40$ г кислорода от температуры $t_1 = 16°$ С до $t_2 = 40°$ С затрачено количество теплоты $Q = 628$ Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

Решение:

В процессе нагревания при постоянном давлении $Q_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m\Delta T$ (см. задачу 5.83) $Q_p = 872$ Дж. Аналогично для нагревания при постоянном объеме $Q_V = c_V m(T_2 - T_1)$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$. Тогда $Q_V = 626$ Дж. Значит, газ нагревается при постоянном объеме.

5.85. В закрытом сосуде объемом $V = 10$ л находится воздух при давлении $p = 0{,}1$ МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить воздуху, чтобы повысить давление в сосуде в 5 раз?

Решение:

Воздуху надо сообщить количество теплоты $Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$.

По уравнению Менделеева — Клапейрона $V\Delta p = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{\mu V \Delta p}{mR}$. Тогда $Q = C_V \frac{V\Delta p}{R} = \frac{i}{2} V\Delta p$; $Q = 10$ кДж.

5.86. Какую массу m углекислого газа можно нагреть при $p = const$ от температуры $t_1 = 20°$ С до $t_2 = 100°$ С количеством теплоты $Q = 222$ Дж? На сколько при этом изменится кинетическая энергия одной молекулы?

Решение:

Количество тепла $Q = c_p m \Delta T$. Теплоемкость при $p = const$: $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Молярная масса $\mu = \mu_c + 2\mu_o$. Т. к. CO_2 — газ трехатомный, то $i = 6$. Тогда $c_p = 4\frac{R}{\mu} = \frac{4R}{\mu_c + 2\mu_o}$. Откуда $Q = \frac{4R}{\mu_c + 2\mu_o} m(T_2 - T_1)$, значит, $m = \frac{Q(\mu_c + 2\mu_o)}{4R(T_2 - T_1)}$; $m = 3{,}67$ г. Кинетическая энергия поступательного движения молекул $W = \frac{i}{2}kT$, при $i = 6$: $W_1 = 3kT_1$; $W_2 = 3kT_2$. Тогда $\Delta W = W_2 - W_1 = 3k(T_2 - T_1)$; $\Delta W = 3{,}31 \cdot 10^{-21}$ Дж.

5.87. В закрытом сосуде объем $V = 2$ л находится азот, плотность которого $\rho = 1{,}4$ кг/м^3. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы нагреть его на $\Delta T = 100$ К?

Решение:

Т.к. объем постоянный, то количество тепла $Q = c_V m \Delta T$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, причем т. к. азот — газ двухатомный, то число степеней свободы $i=5$, значит $c_V=\frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Масса $m=\rho V$, тогда $Q=\frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\rho V\Delta T$; $Q=207{,}75$ Дж.

5.88. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V=3$ л при температуре $t_1=27°$ С и давлении $p_1=0{,}3$ МПа. После нагревания давление в сосуде повысилось до $p_2=2{,}5$ МПа. Найти температуру t_2 азота после нагревания и количество теплоты Q, сообщенное азоту.

Решение:

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для начального и конечного состояний $p_1V=\frac{m}{\mu}RT_1$ — (1); $p_2V=\frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Разделим (1) на (2) $\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1}{T_2}$, отсюда $T_2=\frac{T_1p_2}{p_1}$; $T_2=2500$ К. Количество теплоты, необходимое для нагревания при постоянном объеме $Q=c_V m\Delta t$, где $c_V=\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i=5$, т. к. азот двухатомный газ. Следовательно, $c_V=\frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Из (1) $m=\frac{p_1V_\mu}{RT_1}$ — масса газа, тогда $Q=\frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1V_\mu}{RT_1}(T_2-T_1)=\frac{5}{2}\frac{p_1V(T_2-T_1)}{T_1}$; $Q=16500$ Дж.

5.89. Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta t_1=50°$ С при $p=const$ необходимо затратить количество теплоты $Q_1=670$ Дж.

Если эту же массу газа охладить на $\Delta t_2 = 100°$ С при $V = const$, то выделяется количество теплоты $Q_2 = 1005$ Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

Решение:

Количество теплоты, необходимое для нагрева при $p = const$: $Q_1 = c_p m \Delta t_1$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_1 = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t_1$ — (1). Количество тепла, выделенное при изохорном охлаждении $Q_2 = c_V \cdot m \Delta t_2$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_2 = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t_2$ — (2). Разделим (1) на (2): $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{i+2}{i}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$, отсюда $Q_1 i \Delta t_2 = Q_2 (i+2) \Delta t_1$; $Q_1 i \Delta t_2 = Q_2 i \Delta t_1 + 2Q_2 \Delta t_1$; $i(Q_1 \Delta t_2 - Q_2 \Delta t_1) = 2Q_2 \Delta t_1$; $i = \frac{2Q_2 \Delta t_1}{Q_1 \Delta t_2 - Q_2 \Delta t_1}$ — число степеней свободы; $i = 6$.

5.90. Масса $m = 10$ г азота находится в закрытом сосуде при температуре $t_1 = 7°$ С. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость его молекул вдвое? Во сколько раз при этом изменится температура газа? Во сколько раз при этом изменится давление газа на стенки сосуда?

Решение:

Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Тогда $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\frac{3kT_1}{m}}$; $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$. По условию

$2\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\overline{v_2^2}}$ или $2\sqrt{\frac{3kT_1}{m}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$; $4T_1 = T_2$; $\frac{T_2}{T_1} = 4$. Т. к. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$ при $V = const$ (см. задачу 5.88), то $\frac{p_2}{p_1} = 4$. Изменение температуры $\Delta T = T_2 - T_1 = 4T_1 - T_1 = 3T_1$. Количество тепла, подведенное к системе $Q = c_v m \Delta T$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 5$, т.к. азот — двухатомный газ, поэтому $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu} m 3T_1$; $Q = 6{,}23$ кДж.

5.91. Гелий находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л при температуре $t_1 = 20°$ С и давлении $p_1 = 100$ кПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить гелию, чтобы повысить его температуру на $\Delta t = 100°$ С? Каковы будут при новой температуре средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ его молекул, давление p_2, плотность ρ_2 гелия и энергия теплового движения W его молекул?

Решение:

Количество тепла, необходимое для повышения температуры $Q = c_V m \Delta t$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 3$, т. к. гелий — одноатомный газ, поэтому $c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. $p_1 V = \frac{m}{\mu} RT_1$, то $m = \frac{p_1 V \mu}{RT_1}$ — масса гелия в сосуде. Тогда $Q = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1 V \mu \Delta t}{RT_1} = \frac{3 p_1 V \Delta t}{2T_1}$; $Q = 102{,}39$ Дж. Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT_2 / \mu}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 1{,}565$ км/с. Т.к. $p_2 / p_1 = T_2 / T_1$ (см. задачу 5.88), то $p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \frac{p_1(T_1 + g\Delta t)}{T_1}$; $p_2 = 134$ кПа. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2 V = \frac{m}{\mu} RT_2$, значит, $\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{p_2 \mu}{RT_2}$ — плотность газа. $\rho_2 = 0{,}164$ кг/м^3. Энергия теплового движения молекул $W = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu} RT_2 = \frac{3}{2} p_2 V$; $W = 402$ Дж.

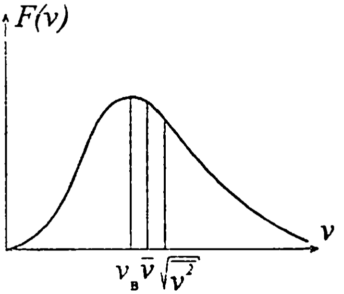
5.92. В закрытом сосуде объемом $V = 2$ л находится масса m азота и масса m аргона при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь на $\Delta t = 100°$ С?

Решение:

Количество тепла, необходимое для нагревания газовой смеси, $Q = (c_{V1} m + c_{V2} m)\Delta t = (c_{V1} + c_{V2}) m \Delta t$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$. Для аргона $i = 3$, т. к. газ одноатомный, тогда $c_{V1} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu_1}$. Для азота $i = 5$, т. к. газ двухатомный, поэтому $c_{V2} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu_2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2}\right) RT = \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right) mRT$, отсюда $m = \dfrac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}$. Тогда $Q = \left(\dfrac{3}{\mu_1} + \dfrac{5}{\mu_2}\right)\dfrac{R}{2} \times$ $\times \dfrac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}\Delta t$; $Q = \dfrac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\dfrac{pV\Delta t}{2T}$; $Q = 154{,}2$ Дж.

5.93. Найти среднюю арифметическую $\bar{v}$, среднюю квадратичную $\sqrt{\overline{v^2}}$ и наиболее вероятную $v_в$ скорости молекул газа, который при давлении $p = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

Решение:



На графике функции распределения молекул по скоростям приведено взаимное расположение величин скоростей $v_в$, $\bar{v}$ и $\sqrt{\overline{v^2}}$. Искомые скорости выражаются следующими соотношениями: $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — (1); $v_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$ — (2); $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT/\mu}$ — (3). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p\mu = \rho RT$, откуда $\dfrac{RT}{\mu} = \dfrac{p}{\rho}$ — (4). Подставив (4) в (1) — (3), получим $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8p}{\pi\rho}}$; $\bar{v} = 579$ м/с; $v_в = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}}$; $v_в = 513$ м/с; $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 628$ м/с. Полученные данные соответствуют графику.

5.94. При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 50$ м/с?

Решение:

По определению наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, а средняя квадратичная $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. По условию задачи $\sqrt{\overline{v^2}} = v_в + \Delta v$, тогда $\Delta v = \sqrt{\overline{v^2}} - v_в = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

Отсюда $\sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $T = \frac{\mu(\Delta v)^2}{R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$; $T = 83{,}37$ К.

5.95. Какая часть молекул кислорода при $t = 0°$ С обладает скоростями v от 100 до 110 м/с?

Решение:

Согласно закону Максвелла распределение молекул по скоростям определяется соотношением: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где u — относительная скорость. По условию $v = 100$ м/с и $\Delta v = 10$ м/с. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; $v_в = 376$ м/с. Тогда $u = \frac{v}{v_в} = \frac{100}{376}$; $u^2 = 0{,}071$; $e^{-u^2} = 0{,}93$; $\Delta u = \frac{10}{376}$. Подставляя в (1) числовые значения, найдем $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004 = 0{,}4\%$. Т. е. число молекул, скорости которых лежат в заданном интервале, равно 0,4% заданного числа молекул.

5.96. Какая часть молекул азота при $t = 150°$ С обладает скоростями v от 300 до 325 м/с?

Решение:

Из закона Максвелла имеем $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{v^2}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где относительная скорость $\frac{v_1}{v_b}$ — (2), $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_b} = \frac{v_2 - v_1}{v_b}$ — (3). Здесь $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4) — наиболее вероятная скорость молекул. Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_1^2 \mu}{2RT}} \cdot \frac{v_1^2 \mu}{2RT} \cdot \frac{(v_2 - v_1)\sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$; $\frac{\Delta N}{N} = 2{,}8$ %.

5.97. Какая часть молекул водорода при $t = 0°$ С обладает скоростями v от 2000 до 2100 м/с?

Решение:

Согласно закону распределения Максвелла $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} exp\left(-u^2\right) \cdot u^2 \Delta u$. Относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, где $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — наиболее вероятная скорость. В нашем случае $v = v_1 = 2000$ м/с, $\Delta v = v_2 - v_1$; $\Delta v = 100$ м/с, $v_в = 1506$ м/с. Тогда $u = \frac{v}{v_в}$; $u = 1{,}328$; $u^2 = 1{,}764$;

$exp\left(-u^2\right)=0{,}171$; $\Delta u=\frac{\Delta v}{v_в}$; $\Delta u=0{,}066$ м/с. Окончательно $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}$; $\frac{\Delta N}{N}=4{,}49\ \%$.

5.98. Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, больше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $\sqrt{\overline{v^2}}$ до $\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v$?

Решение:

Воспользуемся функцией Максвелла распределения молекул по скоростям: $f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\cdot v^2$ — (1). Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, есть $\frac{\Delta N_1}{N}=\int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} f(v)dv$ — (2). Если $\Delta v \ll v_в$, то функция $f(v)$ на данном интервале можно приближенно считать $f(v_в)=const$. Тогда из (2) имеем $\frac{\Delta N_1}{N}=f(v_в)\int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} dv=f(v_в)[v_в+\Delta v-v_в]=f(v_в)\Delta v$. Поскольку $v_в=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$, то из уравнений (1) и (2) получим

$$\frac{\Delta N_1}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{2kT}{m}\right)\frac{2kT}{m}\cdot\Delta v;$$

$\frac{\Delta N_1}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp(-1)\frac{2kT}{m}\Delta v$ — (3). Аналогично во втором случае $\frac{\Delta N_2}{N}=\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v} f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)dv$, но т. к. $\Delta v << \sqrt{\overline{v^2}}$.

то $f(v)\approx f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)=const$. Тогда из уравннний (1) и (2)

$\frac{\Delta N_2}{N}=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v}dv=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\Delta v$. Поскольку средняя

квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{3kT/m}$, то

$$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{3kT}{m}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v;$$

$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v$ — (4). Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим искомое отношение: $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{exp(-1)2kT\Delta v/m}{exp(-3/2)3kT\Delta v/m}=exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$. Произведя вычисления, окончательно получим $\Delta N_2/\Delta N_1=1{,}1$.

5.99. Какая часть молекул азота при температуре T имеет скорости, лежащие в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, где $\Delta v=20$ м/с. если: а) $T=400$ К; б) $T=900$ К?

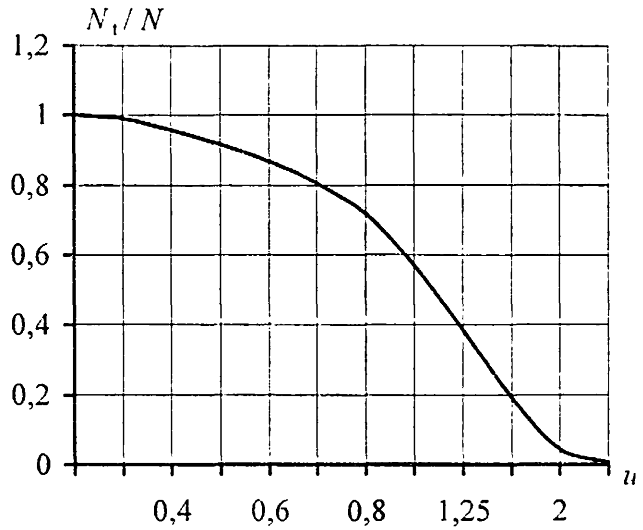
Решение:

Согласно закону Максвелла $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\nu}}u^2e^{-u^2}\Delta u$ — (1), где $u=\frac{v_в}{v_в}=1$ — (2); $\Delta u=\frac{\Delta v}{v_в}$ — (3). Наиболее вероятная скорость молекул $v_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), а затем (2) и (3) в (1), получим $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\frac{\Delta v\sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$.

а) $\frac{\Delta N}{N}=3{,}4\ \%$; б) $\frac{\Delta N}{N}=2{,}2\ \%$.

5.100. Какая часть молекул азота при температуре $t=150°\,\text{C}$ имеет скорости, лежащие в интервале от $v_1=300$ м/с до $v_2=800$ м/с?

Решение:



В данной задаче нельзя использовать формулу Максвелла, т. к. интервал скоростей велик. Для решения задачи найдем число молекул N_1 и N_2, скорости которых больше v_1 и v_2. Тогда скорости, лежащие в интервале от v_1 до v_2, имеют число молекул $N_x=N_1-N_2$. Значения N_1 и N_2 найдем по графику зависимости N_x/N от u. Наиболее вероятная скорость $v_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=500$ м/с, тогда $u_1=\frac{300}{500}=0{,}6$ и $u_2=\frac{800}{500}=1{,}6$. По графику найдем

$\frac{N_1}{N} = 0{,}87 = 87\%$ и $\frac{N_2}{N} = 0{,}17 = 17\%$. Т. е. 87% молекул движется со скоростями большими v_1 и 17% молекул имеют скорости превышающие v_2. Тогда искомая часть молекул $\frac{N_x}{N} = 87\% - 17\% = 70\%$.

5.101. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше наиболее вероятной скорости $v_в$, б) меньше наиболее вероятной скорости $v_в$?

Решение:

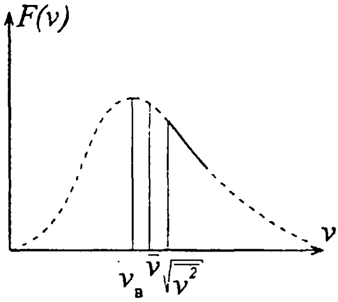
а) Т. к. в данной задаче мы имеем большие интервалы скоростей, то нельзя пользоваться функцией распределения Максвелла. Т.к. относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, то для $v = v_в$ имеем $u = \frac{v_в}{v_в} = 1$. По таблице 11 находим для $u = 1$; $\frac{N_1}{N} = 0{,}572$. Значит, доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$, равна $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$.

б) Т. к. доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$: $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$ (см. пункт а), то доля молекул у которых скорости $v < v_в$: $\frac{N_1}{N} = 42{,}8\%$. Поэтому график функции Максвелла не симметричен.

5.102. В сосуде находится масса $m = 2{,}5$ г кислорода. Найти число N_x молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$.

Решение:

Наиболее вероятная скорость молекул $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{kT}{m}}$, отсюда $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{v_в}{\sqrt{2}}$. Средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_в = \sqrt{1{,}5}v_в$. Тогда относи-



тельная скорость u для $v = \sqrt{\overline{v^2}}$: $u = \frac{v}{v_в} = \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{v_в} = \frac{\sqrt{1{,}5}v_в}{v_в}$; $u = 1{,}225$. По таблице 11 $u = 1$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}572$; $u = 1{,}25$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}374$. По графику находим, что для $u = 1{,}225$ — $\frac{N_1}{N} \approx 0{,}405$. Число молекул кислорода $N = \frac{m}{\mu}N_A$; $N = 4{,}705 \cdot 10^{22}$. Тогда $N_1 = 0{,}405N$; $N_1 = 1{,}905 \cdot 10^{22}$.

5.103. В сосуде находится масса $m = 8$ г кислорода при температуре $T = 1600$ К. Какое число N_x молекул кислорода имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию $W_0 = 6{,}65 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Решение:

Кинетическая энергия поступательного движения молекулы $W_0 = \frac{m_0 v_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2W_0}{m_0}}$. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$, тогда относительная скорость молекулы $u = \frac{v_0}{v_в} = \sqrt{\frac{W_0}{kT}}$; $u = 1{,}73$. Используя график к задаче 5.100, найдем относительное число молекул $\frac{N_x}{N}$, относительная скорость которых больше u. Получим $\frac{N_x}{N} = 0{,}12$, т. е. 12% молекул имеют кинетическую энергию больше W_0. Общее число молекул кислорода в сосуде $N = \frac{m}{\mu}N_A = 1{,}5 \cdot 10^{23}$. Следовательно, $N_x = 0{,}12N = 1{,}8 \cdot 10^{22}$.

5.104. Энергию заряженных частиц часто выражают в электронвольтах: 1эВ — энергия, которую приобретает электрон, пройдя в электрическом поле разность потенциалов $U = 1$ В, причем 1эВ $= 1{,}60219^{-19}$ Дж. При какой температуре T_0 средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_0 = 1$ эВ? При какой температуре 50% всех молекул имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию $W_0 = 1$ эВ?

Решение:

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_0 = \frac{3}{2}kT$. Отсюда $T = \frac{2W_0}{3k}$; $T = 7730$ К. Воспользовавшись графиком из задачи 5.100, найдем, что значению $\frac{N_x}{N} = 0{,}5$ соответствует значение $u = 1{,}1$. В задаче 5.103 мы определили, что относительная скорость молекул $u = \sqrt{\frac{W_0}{kT}}$, отсюда $T = \frac{W_0}{ku^2}$; $T = 9600$ К.