§ 7. Насыщенные пары и жидкости

При решении задач этого раздела используются данные таблиц 3,6,7,8,10 из приложения, кроме того, следует учесть указание к § 5.

7.1. В таблице 8 дано давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах. Как составить из этих данных таблицу m масс водяного пара в объеме $V = 1\ м^3$ воздуха, насыщенного водяным паром при разных температурах? Для примера решить задачу при температуре $t = 50°\ C$.

Решение:

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $m = \dfrac{pV\mu}{RT}$ — (1).

При $T = 323\ К$ давление насыщенного пара $p_н = 12{,}3\ кПа$. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018\ кг/моль$, тогда из (1) получим $m = 82\ г$.

7.2. Найти плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре $t = 50°\ C$.

Решение:

По таблице 8 находим давление водяного пара, насыщающего пространство при температуре $t = 50°\ C$. Оно равно $p_н = 12{,}302\ кПа$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\mu}{RT}$.

Подставляя в полученное выражение числовые данные, найдем: $\rho = \dfrac{12{,}302\cdot 10^3\cdot 0{,}018}{8{,}31\cdot 323} = 0{,}082\ кг/м^3$.

7.3. Во сколько раз плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре $t = 16°$ С меньше плотности ρ воды.

Решение:

Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \frac{p_н \mu}{RT}$, где $p_н = 1{,}809$ кПа, тогда $\rho = 0.014$ кг/м^3 и отношение плотностей $\frac{\rho_к}{\rho_н} = 73754$.

7.4. Во сколько разных плотность $\rho_{н1}$ насыщенного водяного пара при температуре $t_1 = 200°$ С больше плотности $\rho_{н2}$ насыщенного водяного пара при температуре $t_1 = 100°$ С?

Решение:

Давления насыщенного пара при температуре t_1 и t_2 соответственно равны $p_{н1} = 1549890$ Па и $p_{н2} = 101080$ Па.

Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \frac{p_н \mu}{RT}$, тогда отношение плотностей $\frac{\rho_{н1}}{\rho_{н2}} = \frac{p_{н1} T_2}{p_{н2} T_2} = 12{,}09$.

7.5. Какая масса m водяного пара содержится в объеме $V = 1$ м^3 воздуха в летний день при температуре $t = 30°$ С и относительной влажности $\omega = 0{,}75$?

Решение:

Относительная влажность определяется соотношением $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, находящегося в воздухе, и $p_н$ — давление водяного пара, насыщающего пространство при данной температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $m = \frac{pV\mu}{RT} = \frac{\omega p_н V\mu}{RT}$ — (1). При $T = 303$ К давление насыщенного пара $p_н = 4{,}23$ кПа. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Тогда из (1) получим $m = 22{,}5$ г.

7.6. В замкнутом объеме $V = 1\,м^3$ относительная влажность воздуха $\omega = 0{,}6$ при температуре $t = 20°\,С$. Какая масса Δm воды должна еще испариться в этот объем, чтобы водяной пар стал насыщенным?

Решение:

По определению, относительная влажность $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, содержащегося в воздухе. $p_н$ — давление насыщенного пара при той же температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем $(p_н - p)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, где $p = \omega \cdot p_н$, тогда $p_н(1-\omega)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, откуда $\Delta m = \frac{pV\mu(1-\omega)}{RT} = 6{,}88$ г.

7.7. Температура комнаты $t_1 = 18°\,С$, относительная влажность $\omega = 0{,}5$. В металлический чайник налили холодную воду. Какова температура t_2 воды, при которой чайник перестанет запотевать?

Решение:

Давление водяного пара, содержащегося в воздухе, при температуре $t_1 = 18°\,С$ равно $p_1 = \omega \cdot p_{01}$, где p_{01} — давление насыщенного пара при той же температуре. Сравним давление p_1 с давлением p_{02} насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $p_1 < p_{02}$, пар конденсироваться не будет, т.е. чайник перестает запотевать при $p_1 = p_{02}$. Отсюда $\omega \cdot p_{01} = p_{02}$. Определив по таблице 8 значение p_{01}, вычислим $p_{02} = 1034$ Па, что соответствует температуре $t_2 \approx 7°$ С.

7.8. Найти число n молекул насыщенного водяного пара, содержащихся в единице объема при температуре $t_1 = 30°$ С.

Решение:

При $t = 30°$ С, по таблице 8 находим для данной температуры $p_н = 4229$ Па. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $p_н V = \nu RT$ найдем число молей $\nu = \frac{p_н V}{RT}$. Число частиц в объеме V равно $N = \nu N_A = \frac{p_н V N_A}{RT}$, а в единице объема $n = \frac{N}{V} = \frac{p_н N_A}{RT} = 1{,}011 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

7.9. Масса $m = 0{,}5$ г водяного пара занимает объем $V_1 = 10$ л при температуре $t = 50°$ С, какова при этом относительная влажность ω? Какая масса Δm пара сконденсируется, если изотермически уменьшить объем от V_1 до $V_2 = V_1 / 2$?

Решение:

Из таблицы находим давление насыщенного пара при температуре $T = 323$ К, которое равно $p_0 = 12302$ Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT$ находим давление $p = \frac{mRT}{\mu V_1}$. Тогда относительная влажность $\omega = \frac{p}{p_0} = \frac{mRT}{p_0 \mu V_1}$; $\omega = 0{,}606 \cdot 100\% = 60{,}6\%$. Найдем массу водяного пара при относительной влажности 100% или $\omega_1 = 1$, тогда давление $p = p_0 = 12302$ Па. Учитывая, что $V_2 = \frac{V_1}{2}$ из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{p_0 V_1}{2} = \frac{m - \Delta m}{\mu} RT$ находим $m - \Delta m = \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT}$. Отсюда масса сконденсированного пара равна $\Delta m = m - \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT} = 87{,}5$ мг.

7.10. В камере Вильсона объемом $V = 1$ л заключен воздух, насыщенный водяным паром. Начальная температура камеры $t_1 = 20°$ С. При движении поршня объем камеры увеличился до $V_2 = 1{,}25 V_1$. Расширение считать адиабатическим, причем показатель адиабаты $\chi = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$. Найти: а) давление водяного пара до расширения; б) массу m_1 водяного пара в камере до расширения; в) плотность ρ_1 водяного пара до расширения; г) температуру t_2 пара после расширения (изменением температуры из-за выделения тепла при конденсации пара пренебречь); д) массу Δm сконденсированного пара; е) плотность ρ_2 водяного пара после конденсации; ж) степень перенасыщения, т.е. отношение плотности водяного пара после расширения (но до конденсации) к плотности водяного пара, насыщающего пространство при температуре, установившейся после конденсации

Решение:

а) До расширения насыщенный водяной пар находится при температуре $t_1 = 20°$ С, следовательно, давление этого пара $p_1 = 2{,}33$ кПа см. таблицу 8. б) Масса водяного пара до расширения $m_1 = \frac{p_1 \mu V_1}{RT_1} = 17{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. в) $\rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1} = 17{,}2 \times 10^{-3}$ кг/м^3. г) Т.к. процесс считается адиабатическим, то

$T_2 = \dfrac{T_1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = 268\,К.$ д) При температуре $t_2 = -5°\,С$ давление насыщенного водяного пара $p_2 = 399\,Па$. Масса пара в камере, соответствующая этому значению, $m_2 = \dfrac{p_2 \mu V_2}{RT_2} = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг. Следовательно, масса сконденсированного пара $\Delta m = m_1 - m_2 = (17{,}2 - 4{,}0) = 13{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. е) $\rho_2 = \dfrac{p_2 \mu}{RT_2} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. ж) Т. к. плотность водяного пара после расширения (но до конденсации) $\rho_3 = \dfrac{m_1}{V_2} = \dfrac{17{,}2 \cdot 10^{-6}}{1{,}25 \cdot 10^{-3}}$ кг/м^3 $= 13{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, то степень перенасыщения $s = \dfrac{\rho_3}{\rho_2} = 4{,}3$.

7.11. Найти удельный объем v воды в жидком и парообразном состояниях при нормальных условиях.

Решение:

По определению, удельный объем жидкости и пара соответственно $v_ж = \dfrac{V_ж}{m} = \dfrac{V_{0ж}}{\mu}$ и $v_п = \dfrac{V_п}{m} = \dfrac{V_{0п}}{\mu}$. Молярный объем жидкости $V_{0ж} = \mu / \rho$, тогда удельный объем жидкости $v_ж = \dfrac{V_{0ж}}{\mu} = \dfrac{1}{\rho} = 10^{-3}$ м^3/кг. Молярный объем пара найдем из соотношения: $V_{0п} = \dfrac{RT}{p - p_н}$, тогда удельный объем пара $v_п = \dfrac{RT}{\mu(p - p_н)} = 1{,}25$ м^3/кг.

7.12. Пользуясь первым законом термодинамики и данными таблицы 7 и 8, найти удельную теплоту парообразования r воды при $t = 200°$ С. Для воды критическая температура $T_к = 647$ К, критическое давление $p = 22$ МПа. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение:

Количество теплоты Q при испарении тратится на преодоление сил взаимодействия молекул и на работу расширения. Таким образом, согласно первому закону термодинамики имеем $Q = r_0 = \Delta W + A$ — (1), где r_0 — молярная теплота парообразования, ΔW — изменение молярной внутренней энергии сил взаимодействия при испарении, A — молярная работа, совершаемая против внешнего давления. $A = p_н\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)$ — (2), где $p_н$ — давление насыщенного пара, $V_{0ж}$ — молярный объем жидкости, $V_{0п}$ — молярный объем пара. Имеем $V_{0ж} = \dfrac{\mu}{\rho} = 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль, где μ — молярная масса и ρ — плотность воды. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_{0п} = \nu RT / p_н$. При $T = 473$ К имеем (см. таблицу 8) $p_· = 1{,}55$ МПа и $V_{0н} = 2{,}5$ л/моль. Считая, что изменение внутренней энергии взаимодействия молекул при испарении соответствует уравнению Ван-дер-Ваальса (см. задачу 6.18), имеем $\Delta W = \dfrac{\nu^2 a\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)}{V_{0ж}V_{0п}}$ — (3), где $a = 5{,}56 \cdot 10^2$ Па·м^6/моль^2. Поскольку $V_{0ж} << V_{0п}$, то из (1) — (3) получим $r_0 = \dfrac{a}{V_{0ж}} + p_н V_{0п} = \dfrac{a\rho}{\mu} + RT = 35$ кДж/моль. Следовательно, удельная теплота парообразования воды $r = \dfrac{r_0}{\mu} = 1{,}95$ МДж/кг. Из таблицы 9, для температуры $t = 200°$ С значение $r = 1{,}94$ МДж/кг.

7.13. Какая часть теплоты парообразования воды при температуре $t = 100°$ С идет на увеличение внутренней энергии системы?

Решение.

Согласно первому началу термодинамики $r_0 = \Delta W + A$, где $r_0 = r\mu$ — молярная теплота парообразования; ΔW — изменение внутренней энергии; $A = p_н(V_{0п} - V_{0ж})$ — работа, совершаемая против сил внешнего давления. Тогда $\frac{\Delta W}{r_0} = \frac{r_0 - A}{r_0} = \frac{r\mu - p_н(V_{0п} - V_{0ж})}{r\mu}$. Молярные объемы жидкости и пара соответственно равны $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho}$ и $V_{0п} = \frac{RT}{p_н}$, следовательно, $\frac{\Delta W}{r_0} = \frac{r\mu - p_н(RT/p_н - \mu/\rho)}{r\mu}$; $\frac{\Delta W}{r_0} = 1 - \frac{p_н}{r\mu}\left(\frac{RT}{p_н} - \frac{\mu}{\rho}\right)$; $\frac{\Delta W}{r_0} = 0{,}924 \cdot 100\% = 92{,}4\%$.

7.14. Удельная теплота парообразования бензола (C_6H_6) при температуре $t = 77°$ С равна $r = 398$ кДж/кг. Найти изменение внутренней энергии ΔW при испарении массы $\Delta m = 20$ г бензола.

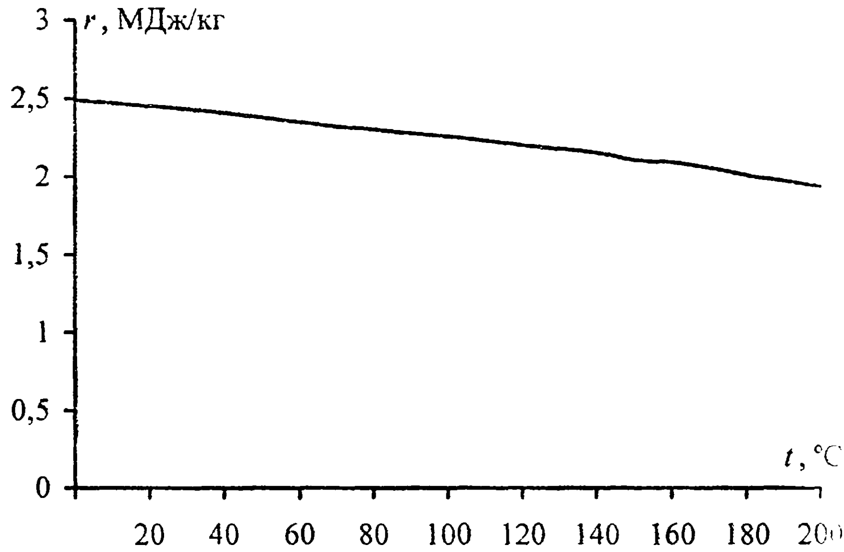
Решение:

Изменение внутренней энергии (см. задачу 7.13) $\Delta W = r_0 - A = \Delta m r - A$. Работа против сил внешнего давления $A = p\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, где $\mu = 0{,}078$ — молярная масса бензола. Тогда $\Delta W = \Delta m(r - RT/\mu) = 7{,}21$ кДж.

7.15. Пользуясь уравнением Клаузиуса — Клапейрона и данными таблицы 8, найти удельную теплоту парообразования r

воды при температуре $t = 5°$ C. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение:



Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T(V_{0п} - V_{0ж})}$ – (1). Считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона, для $\nu = 1$ моль имеем $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Т. к. (см. таблицу 8) при $t = 5°$ C давление насыщенного пара $p_н = 870$ Па, то $V_{0п} = 2{,}65$ м^3/моль. Кроме того, $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho} \leq 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль. Таким образом, $V_{0ж} << V_{0п}$, и тогда уравнение (1) можно записать так $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Для небольшого интервала температур $T_2 - T_1$ молярную теплоту испарения r_0 можно считать постоянной, и тогда, интегрируя уравнение

(2), получим $\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=\frac{r_0}{R}\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^2}$; $\quad ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{r_0}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$;

$ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{r_0(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0=\frac{RT_1T_2\,ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{T_2-T1}$ — (4).

Здесь p_1 и p_2 — давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2. Для величин T_1 и T_2 можно взять значения $t_1=4°$ C $t_2=6°$ C. Тогда $p_1=811$ Па, $p_2=932$ Па (см. таблицу 8) и $\frac{p_2}{p_1}=1{,}15$. Подставляя в (4) числовые данные, получим $r_0=45$ кДж/моль. Отсюда удельная теплота парообразования $r=\frac{r_0}{\mu}=2{,}49$ МДж/кг. Построив по данным таблицы 9 график $r=f(t)$, найдем, что при $t=5°$ C имеем $r=2{,}48$ МДж/кг.

7.16. Давления насыщенного ртутного пара при температурах $t_1=100°$ C и $t_2=120°$ C равны $p_1=37{,}3$ Па и $p_2=101{,}3$ Па. Найти среднее значение удельной теплоты парообразования r ртути в указанном интервале температур.

Решение:

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона $\frac{dp}{dt}=\frac{r_0}{T(V_{0п}-V_{0ж})}$, где молярные объемы пара и жидкости соответственно равны $V_{0п}=\frac{RT}{p_н}$ и $V_{0ж}=\frac{\mu}{\rho}$, имеем $\frac{dp}{pt}=\frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p}=\frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$. Проинтегрировав полученное уравнение, получим $ln\frac{p_2}{p_1}=\frac{r_0(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$ или $r_0=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{T_2-T_1}$. Тогда $r=\frac{r_0}{\mu}=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2-T_1)}$; $r=0{,}304\cdot10^6$ Дж/кг.

7.17. Температура кипения бензола (C_6H_6) при давлении $p=0{,}1$ МПа равна $t_к=80{,}2°$ С. Найти давление $p_н$ насыщенного пара бензола при температуре $t=75{,}6°$ С. Среднее значение удельной теплоты парообразования бензола в данном интервале температур принять равным $r=0{,}4$ МДж/кг.

Решение:
Среднее значение удельной теплоты парообразования (см. задачу 7.16) $r=\frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2-T_1)}$. В нашем случае $p_2=p$ и $p_1=p_н$, тогда $ln\frac{p}{p_н}=\frac{r\mu(T_2-T_1)}{RT_1T_2}$. Возьмем от обоих частей данного уравнения экспоненту $\frac{p}{p_н}=exp\left(\frac{r\mu(T_2-T_1)}{RT_1T_2}\right)$, откуда $p_н=\frac{p}{exp(r\mu(T_2-T_1)/(RT_1T_2))}\approx87\cdot10^3$ Па.

7.18. Давления насыщенного пара этилового спирта (C_2H_5OH) при температурах $t_1=40°$ С и $t_2=60°$ С равны $p_1=17{,}7$ кПа и $p_2=67{,}9$ кПа. Найти изменение энтропии ΔS при испарении массы $\Delta m=1$ г этилового спирта, находящегося при температуре $t=50°$ С.

Решение:
Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT}=\frac{r_0}{T(V_{0п}-V_{0ж})}$ – (1), считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению

Менделеева — Клапейрона, имеем для одного моля $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Кроме того, $V_{0ж} << V_{0п}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Интегрируя уравнение (2), получим $ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0 = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2 / p_1)}{T_2 - T_1}$ — (4). Изменение энтропии $\Delta S = \frac{\nu r_0}{T}$, где $\nu = \frac{\Delta m}{\mu}$ и с учетом (4) $\Delta S = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2 / p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T} = 2{,}92$ Дж/К.

7.19. Изменение энтропии при испарении количества $\Delta\nu = 1$ моль некоторой жидкости, находящейся при температуре $t_1 = 50°$ С, равно $\Delta S = 133$ Дж/К. Давление насыщенного пара при температуре $t_1 = 50°$ С равно $p_1 = 12.33$ кПа. На сколько меняется давление насыщенного пара жидкости при изменении температуры от $t_1 = 50°$ С до $t_1 = 51°$ С?

Решение:

Изменение энтропии (см. задачу 7.18) равно $\Delta S = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2 / p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T_1}$. Преобразуя это выражение, получим: $\Delta S = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2 / p_1)\Delta\nu}{(T_2 - T_1)T_1}$; $\Delta S = \frac{RT_2\,ln(p_2 / p_1)\Delta\nu}{T_2 - T_1}$, откуда $ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}$. Возьмем от обеих частей экспоненту и найдем отношение $\frac{p_2}{p_1} = exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}\right)$, откуда $p_2 = p_1 \exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2 \Delta v}\right)$. Тогда изменение давления насыщенного пара $\Delta p = p_2 - p_1 = p_1\left(\exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2 \Delta v}\right) - 1\right)$.

$$\Delta p = 12{,}33 \cdot 10^3\left(\exp\left(\frac{(324 - 323)\cdot 133}{8{,}31 \cdot 324 \cdot 1}\right) - 1\right) = 624\ \text{Па}.$$

7.20. До какого предельного давления p можно откачать сосуд при помощи ртутно-диффузионного насоса, работающего без ртутной ловушки, если температура водяной рубашки насоса $t = 15°$ С? Давление насыщенного ртутного пара при температуре $t_0 = 0°$ С равно $p_0 = 0{,}021$ Па, среднее значение удельной теплоты парообразования ртути в данном интервале температур принять равным $r = 10{,}08$ МДж/кг.

Решение:

До давления $p = 93$ мПа, т. е. до давления насыщенного ртутного пара при $t = 15°$ С.

7.21. При температуре $t_0 = 0°$ С плотность ртути $\rho_0 = 13{,}6 \times 10^3$ кг/м^3. Найти ее плотность ρ при температуре $t = 300°$ С. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}85 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Решение:

Имеем $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$ и $\rho = \frac{m}{V}$, где $V = V_0(1 + \beta t)$. Тогда $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} = 12{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.22. При температуре $t_1 = 100°$ С плотность ртути $\rho_1 = 13{,}4 \times 10^3$ кг/м^3. При какой температуре t_2 плотность ртути

$\rho_2 = 13{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Решение:

Относительное изменение объема при нагревании $\frac{\Delta V}{V} = \beta(t_1 - t_2)$. По определению, плотность $\rho = \frac{M}{V}$, тогда $\rho_1 = \frac{m}{V}$ — (1), а $\rho_2 = \frac{m}{V - \Delta V}$ — (2). Разделим (2) на (1) $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V}{V - \Delta V} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{1 - \beta(t_1 - t_2)}$, откуда $\beta(t_1 - t_2) = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Тогда изменение температуры $t_1 - t_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta}$ и, окончательно, $t_2 = t_1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta} = 227{,}2°$ С.

7.23. Найти плотность ρ морской воды на глубине $h = 5$ км, если плотность ее на поверхности $\rho_0 = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сжимаемость воды $k = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$. Указание: при вычислении гидростатического давления морской воды ее плотность приближенно полагать равной плотности воды на поверхности.

Решение:

Относительное изменение объема при сжатии $\frac{\Delta V}{V_0} = -k\Delta p$, где k [Па$^{-1}$] — сжимаемость, величина, показывающая, на какую часть уменьшился объем жидкости при увеличении давления на 1 Па. Изменение давления Δp равно давлению водяного столба высотой h, которое по закону Паскаля $\Delta p = \rho_0 g h$, т.к. по условию плотность приблизительно равна плотности на поверхности. Плотность у поверхности воды $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$, а на глубине h — $\rho = \frac{m}{V_0 + \Delta V}$, тогда отношение плотностей $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \frac{\Delta V}{V_0} = 1 - k\rho_0 gh$. Отсюда плотность морской воды на глубине h равна $\rho = \frac{\rho_0}{1 - k\rho_0 gh} = 1{,}055$ кг/м^3.

7.24. При нормальных условиях сжимаемость бензола $k = 9\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, коэффициент объемного расширения $\beta = 1{,}24\times$ $\times 10^{-3}$ К$^{-1}$. На сколько необходимо увеличить внешнее давление, чтобы при нагревании на $\Delta t = 1$ К объем бензола не изменился?

Решение:

Относительное изменение объема жидкости при нагревании и сжатии соответственно $\frac{\Delta V}{V} = \beta\Delta T$ и $\frac{\Delta V}{V} = k\Delta p$. По условию объем бензола не меняется, поэтому $\beta\Delta T = k\Delta p$, откуда $\Delta p = \frac{\beta\Delta T}{k} = 1{,}38\cdot 10^6$ Па.

7.25. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82\times$ $\times 10^{-4}$ К$^{-1}$. Чтобы при нагревании ртути на $\Delta t = 1$ К ее объем не изменился, необходимо увеличить внешнее давление на $\Delta p = 4{,}7$ МПа. Найти сжимаемость k ртути.

Решение:

Чтобы объем не изменился (см. задачу 7.24), необходимо, чтобы $\beta\Delta T = k\Delta p$. Отсюда сжимаемость ртути $k = \frac{\beta\Delta T}{\Delta p} =$ $= 3{,}87\cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$.

7.26. Найти разность уровней Δh ртути в двух одинаковых сообщающихся стеклянных трубках, если левое колено поддерживается при температуре $t_0 = 0°$ C, а правое нагрето до температуры $t = 100°$ C. Высота левого колена $h_0 = 90$ см. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Относительное изменение объема жидкости при нагревании $\dfrac{\Delta V}{V_0} = \beta\Delta T$. Т. к. площадь поперечного сечения трубок одинакова и равна S, то объем в холодном колене $V_0 = Sh_0$, а в подогретом колене $V_0 + \Delta V = S(h_0 + \Delta h)$, тогда $\dfrac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \dfrac{\Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \dfrac{h_0 + \Delta h}{h_0}$. Отсюда разность уровней $\Delta h = h_0(1 + \beta\Delta T) - h_0 = h_0\beta\Delta T = 16{,}4$ см.

7.27. Ртуть налита в стеклянный сосуд высотой $L = 10$ см. При температуре $t = 20°$ C уровень ртути на $h = 1$ мм ниже верхнего края сосуда. На сколько можно нагреть ртуть, чтобы она не вылилась из сосуда? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Начальный объем ртути $V_0 = S(L - h)$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, а ее конечный объем $V_0 + \Delta V = SL$. Тогда $\dfrac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \dfrac{L}{L - h}$, откуда после преобразования получаем $\Delta T = \dfrac{h}{(L - h)\beta} = 55{,}5$ К.

7.28. Стеклянный сосуд, наполненный до краев ртутью, при температуре $t = 0°$ C имеет массу $M = 1$ кг. Масса пустого сосуда $M_0 = 0{,}1$ кг. Найти массу m ртути, которая может поместиться в сосуде при температуре $t = 100°$ С. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Масса ртути, находящаяся в сосуде при температуре t_0, равна $m_0 = M - M_0$, тогда плотность ртути при данной температуре $\rho = \frac{m}{V}$. Отношение плотностей (см. задачу 7.22) $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m}{m_0}$, тогда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{1 - \beta(t - t_0)}$, откуда $m_0 = m(1 - \beta(t - t_0)) = (M - M_0)(1 - \beta(t - t_0)) = 884$ г.

7.29. Решить предыдущую задачу, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta' = 3 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение:

При нагревании объем сосуда стал $V = V_0(1 + \beta' t)$, соответственно плотность ртути $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \beta' t)}$ — (1). С другой стороны, $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t} = \frac{m_0}{V_0(1 + \beta t)}$ — (2). Приравнивая уравнения (1) и (2), получим $m = \frac{m_0(1 + \beta' t)}{1 + \beta t} = 887$ г.

7.30. Стеклянный сосуд наполнен до краев жидким маслом при температуре $t_0 = 0°$ С. При нагревании сосуда с маслом до температуры $t = 100°$ С вытекло 6% налитого масла. Найти коэффициент объемного расширения масла, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta = 3 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение:

При нагревании объем сосуда увеличился и стал равным $V_1 = V_0(1+\beta t)$, и объем масла также увеличился и стал равным $V_2 = V_0(1+\beta' t)$. Количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_1 = V_0[(1+\beta' t)-(1+\beta t)] = V_0 t(\beta' - \beta)$.

По условию $\dfrac{\Delta V}{V_0} = 0{,}06$, тогда $(\beta' - \beta)t = 0.06$, откуда

$\beta' = \dfrac{0{,}06}{t} + \beta = 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$.

7.31. Какую относительную ошибку мы допустим при нахождении коэффициента объемного расширения масла в условиях предыдущей задачи, если пренебрежем расширением стекла?

Решение:

Коэффициент объемного расширения масла с учетом расширения стекла (см. задачу 7.30) $\beta' = 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Если не учитывать расширения стекла, то количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_0 = V_0[(1+\beta_0 t)-1] = V_0 \beta_0 t$, где β_0 – коэффициент объемного расширения масла без учета расширения стекла. Тогда $\Delta V / V = \beta_0 t = 0.06$, тогда $\beta_0 = \dfrac{0{,}06}{t} = 6 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Отсюда относительная ошибка

$x = \dfrac{\beta' - \beta_0}{\beta} = 0{,}05 \cdot 100\% = 5\%$.

7.32. Температура помещения $t = 37°$ С, атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Какое давление p покажет ртутный барометр, находящийся в этом помещении? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}\ \text{К}^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение:

Т. к. температура в помещении постоянна, то по закону Бойля — Мариотта $pV_0 = p_0V$, где $V = V_0(1+\beta t)$ — фактический объем ртути в барометре. Тогда $pV_0 = p_0V_0 \times$ $\times(1+\beta t)$, откуда $p = p_0(1+\beta t) = 102$ кПа.

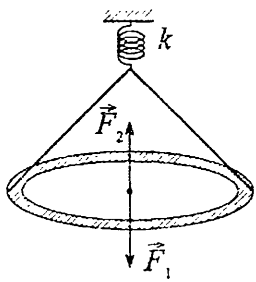
7.33. Какую силу F нужно приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой $h = 10$ мм, внутренним диаметром $d_1 = 50$ мм и внешним диаметром $d_2 = 52$ мм, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть найденной силы составляет сила поверхностного натяжения?

Решение:

Будем считать, что кольцо касается воды только своей нижней поверхностью, не погружаясь. Сила, необходимая для отрыва кольца от поверхности воды $F = F_1 + F_2$, где F_1 — сила тяжести, F_2 — сила поверхностного натяжения. $F_1 = \rho h \frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right) g = 40$ мН. При отрыве кольца водяная пленка разрывается по внутренней — d_2 и внешней — d_1 сторонам кольца. $F_2 = \pi\alpha(d_1 + d_2) = 23{,}5$ мН. Отсюда $F = 63{,}5$ мН и $\frac{F_2}{F} = 37\%$.

7.34. Кольцо внутренним диаметром $d_1 = 25$ мм и внешним диаметром $d_2 = 26$ мм подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости. Жесткость пружины $k = 9{,}8 \cdot 10^{-1}$ Н/м. При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на $\Delta l = 5{,}3$ мм. Найти поверхностное натяжение α жидкости.

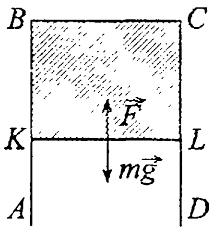
Решение:



Сила поверхностного натяжения $\vec{F}_1$ жидкости уравновешивается силой упругости пружины $\vec{F}_2$. Чтобы система находилась в равновесии, необходимо чтобы $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ или $F_1 = F_2$. По закону Гука $F_2 = k\Delta l$. При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внешней и внутренней поверхности кольца. Поэтому сила поверхностного натяжения будет складываться из двух $F_1 = F_{11} + F_{12}$, где $F_{11} = \alpha L_1$ и $F_2 = \alpha L_2$. Т.к. $L_1 = \pi d_1$ и $L_2 = \pi d_2$, то $F_1 = \pi\alpha(d_1 + d_2)$; $k\Delta l = \pi\alpha(d_1 + d_2)$, отсюда $\alpha = \dfrac{k\Delta l}{\pi(d_1 + d_2)} = 0{,}032$ Н/м.

7.35. Рамка $ABCD$ с подвижной медной перекладиной KL затянута мыльной пленкой. Каков должен быть диаметр d перекладины KL, чтобы она находилась в равновесии? Найти длину l перекладины, если известно, что при перемещении перекладины на $\Delta h = 1$ см совершается изотермическая работа $A = 45$ мкДж. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}045$ Н/м.

Решение:



Сила тяжести уравновешивается силой поверхностного натяжения. Чтобы перекладина находилась в равновесии, необходимо, чтобы $m\vec{g} + \vec{F} = 0$ или $F = mg$. Т.к. $m = \rho V$ и $V = \dfrac{\pi d^2}{4} l$, то $F = \dfrac{\pi d^2 l \rho g}{4}$. С другой стороны, $F = 2\alpha l$ (т. к. у пленки две стороны). Отсюда $2\alpha l = \dfrac{\pi d^2 l \rho g}{4}$; $d^2 = \dfrac{8 l \alpha}{\pi l \rho g} = \dfrac{8\alpha}{\pi \rho g}$;

$d = \sqrt{\dfrac{8\alpha}{\pi\rho g}} = 1.2$ мм. Работа по перемещению перекладины $A = 2\alpha S$ (т.к. у пленки две стороны). Т.к. $S = l\Delta h$, то $A = 2\alpha l\Delta h$; $l = \dfrac{A}{2\alpha\Delta h} = 5$ см.

7.36. Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 2$ мм. Капли отрываются через время $\Delta\tau = 1$ с одна после другой. Через какое время τ вытечет масса $m = 10$ г спирта? Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:

Чтобы капля оторвалась от поверхности, необходимо разорвать поверхностную пенку длиной $l = 2\pi r$, где r — радиус шейки капли, силой тяжести $P = 2\pi r\alpha = \pi d\alpha$. В массе спирта содержится N капель, причем $N = \dfrac{mg}{P} = \dfrac{mg}{\pi d\alpha} = 780$ капель. Т.к. по условию капли отрываются с промежутком в $\Delta\tau = 1$ с, значит, общее время $\tau = N\Delta\tau = 780$ с=13мин.

7.37. Вода по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 3$ мм. При остывании воды от $t_1 = 100°$ С до $t_2 = 20°$ С масса каждой капли изменилась на $\Delta m = 13{,}5$ мг. Зная поверхностное натяжение α_2 воды при $t_2 = 20°$ С, найти поверхностное натяжение α_1 воды при $t_1 = 100°$ С. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:

Сила тяжести, действующая на каплю, в момент ее отрыва должна разорвать поверхностную пленку по длине $l = 2\pi r = \pi d$, т.к. по условию диаметр шейки капли равен внутреннему диаметру трубки. Тогда начальная сила тяжести $p_0 = \pi d\alpha_2$. При остывании капли сила тяжести изменится на $\Delta p = \Delta mg$ и станет равной $p = p_0 - p = \pi d\alpha_2 - \Delta mg$. С другой стороны, $p = \pi d\alpha_1$, тогда $\pi d\alpha_1 = \pi d\alpha_1 - \Delta mg$, откуда $\alpha_1 = \dfrac{\pi d\alpha_2 - \Delta mg}{\pi d} = 0{,}059$ Н/м.

7.38. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром $d = 1$ мм образовалось $N = 20$ капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Поверхностное натяжение жидкого свинца $\alpha = 0{,}47$ Н/м. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки.

Решение:

Капля отрывается от проволоки, когда сила тяжести равна силе поверхностного натяжения, т. е. $mg = F$. Масса капли $m = \rho V_K$. Сила поверхностного натяжения $F = \alpha l$, где $l = \pi d$, откуда $F = \pi\alpha d$. Отсюда объем капли $V_K = \dfrac{\pi\alpha d}{\rho}$. Полный объем расплавленного свинца $V = NV_K = \dfrac{\pi N\alpha d}{\rho}$. С другой стороны, $V = \dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l$. Тогда $\dfrac{\pi d^2}{4}\Delta l = \dfrac{\pi N\alpha d}{\rho}$, отсюда $\Delta l = \dfrac{4N\alpha}{\rho g d} = 34$ см.

7.39. Вода по каплям вытекает из вертикальной трубки внутренним радиусом $r = 1$ мм. Найти радиус R капли в момент отрыва. Каплю считать сферической. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение:

Сила тяжести, необходимая для отрыва капли (см. задачу 7.37) $p = 2\pi r\alpha$. С другой стороны, сила тяжести $p = mg$, где $m = \rho V$ — масса оторвавшейся капли. Т.к. по условию капля сферическая, то $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $2\pi r\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$, откуда $R^3 = \frac{3r\alpha}{2\rho g}$ или $R = \sqrt[3]{\frac{3r\alpha}{2\rho g}} = 2{,}2$ мм.

7.40. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом $r = 1$ мм каждая?

Решение:

При слиянии двух капель ртути выделяется энергия $\Delta W = \alpha\Delta S$, где изменение площади поверхности $\Delta S = 4\pi r^2 \cdot 2 - 4\pi R^2$. Радиус большой капли R найдем, приравняв объем большой капли сумме объемов слившихся капель, т.е. $2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$, откуда $R = r\sqrt[3]{2}$. Тогда $\Delta S = 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ и $\Delta W = \alpha \cdot 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ — (1). За счет выделенной энергии произойдет нагревание ртутной капли, тогда $\Delta W = cm\Delta T = c\rho\frac{4}{3}\pi R^3\Delta T = c\rho\frac{8}{3}\pi r^3\Delta T$ — (2). Приравнивая (1) и (2), найдем $\Delta T = \frac{3\alpha\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)}{c\rho 2r} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}$ К.

7.41. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиусом $R = 3$ мм на две одинаковые капли?

Решение:

Т. к. капля разрывается на две одинаковые, то площадь ΔS, по которой произойдет разрыв, будет равна площади круга, проходящего через центр капли, т. е. $\Delta S = \pi R^2$. Тогда работа против сил поверхностного натяжения $A = \alpha\Delta S = \alpha\pi R^2 = 14{,}7$ мкДж.