7.42. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом $r = 1$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Т. к. по условию $V_2 = 2V_1$, где $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$ — объемы пузыря до и после совершения работы, то $r_2^3 = 2r_1^3$ или $r_2 = \sqrt[3]{2}r_1$. Изменение площади поверхности пузыря до и после совершения работы — $\Delta S = S_2 - S_1 = 4\pi\left[r_2^2 - r_1^2\right] = 4\pi r_1^2\left[\sqrt[3]{4} - 1\right]$. Т. к. у оболочки пузыря две поверхности, наружная и внутренняя, то совершенная работа $A = 2\alpha\Delta S = 8\pi r_1^2\alpha\left[\sqrt[3]{4} - 1\right] = 63{,}4$ мкДж.

7.43. Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром $d = 4$ см? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Площадь поверхности мыльного пузыря $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$, тогда совершенная работа против сил поверхностного натяжения (см. задачу 7.42) $A = 2\alpha S = 2\pi d^2\alpha = 432$ мкДж.

7.44. Найти давление p воздуха в воздушном пузырьке диаметром $d = 0{,}01$ мм, находящемся на глубине $h = 20$ см под поверхностью воды. Атмосферное давление $p_0 = 101{,}7$ кПа.

Решение:

Давления воздуха в пузырьке $p = p_0 + p_1 + p_2$, где p_0 — атмосферное давление, $p_1 = \rho gh$ — гидростатическое давление воды, $p_2 = \frac{4\alpha}{d}$ — добавочное давление, вызванное кривизной поверхности. Таким образом,

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{4\alpha}{d} = 132{,}9\ \text{кПа}.$$

7.45. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 133{,}3$ Па больше атмосферного. Найти диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}043$ Н/м.

Решение:

Добавочное давление внутри мыльного пузыря, вызванное кривизной его поверхности, $\Delta p = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Т. к. пузырь сферический, то радиусы кривизны взаимно перпендикулярных поверхностей $R_1 = R_2 = \frac{d}{2}$, тогда $\Delta p = \frac{8\alpha}{d}$, откуда $d = \frac{8\alpha}{\Delta p} = 2{,}58$ мм.

7.46. На какой глубине h под водой находится пузырек воздуха если известно, что плотность воздуха в нем $\rho = 2$ кг/м^3? Диаметр пузырька $d = 15$ мкм, температура $t = 20°$ C, атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа.

Решение:

Давление воздуха в пузырьке сложится из атмосферного давления p_0, гидростатического давления воды $p_1 = \rho_1 g h$ и добавочного давления $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, вызванного кривизной поверхности, т.е. $p = p_0 + \rho_1 g h + \frac{4\alpha}{d}$. Из закона Бойля—Мариотта $p_0 V = p V_0$ следует, что $\frac{p_0}{p} = \frac{V_0}{V} = \frac{\rho_0}{\rho}$, тогда

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{p_0}{p_0+\rho_1 gh+4\alpha/d},\text{ откуда } p_0+\rho_1 gh+\frac{4\alpha}{d}=\frac{p_0\rho}{\rho_0}\text{ или}$$

$\rho_1 gh=\frac{p_0\rho}{\rho_0}-\frac{4\alpha}{d}-p_0$. Окончательно, глубина погружения:

$$h=\frac{p_0\rho d-4\alpha\rho_0-p_0\rho_0 d}{\rho_0+\rho_1 gd};\ h=\frac{p_0 d(\rho-\rho_0)-4\alpha\rho_0}{\rho_0+\rho_1 gd};\ h=4{,}72\text{ м.}$$

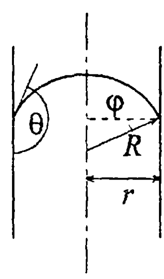
7.47. Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке, находящемся на глубине $h=5$ м под водой, больше плотности воздуха при атмосферном давлении $p_0=101{,}3$ кПа? Радиус пузырька $r=0{,}5$ мкм.

Решение:

Отношение плотностей воздуха в пузырьке и на поверхности (см. задачу 7.46) $\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{p_0}{p_0+\rho_1 gh+2\alpha/r}=4{,}4$.

7.48. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр, внутренний диаметр которого $d=3$ мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре $\Delta h=3{,}7$ мм. Найти радиус R кривизны мениска в капилляре.

Решение:



Из рисунка видно, что $r=R\cos\varphi=R\cos\times(180°-\theta)=-R\cos\theta$, где θ — краевой угол. Добавочное давление, вызванное кривизной мениска, $\Delta p=-\frac{2\alpha\cos\theta}{r}$. Т.к. для ртути $\cos\theta<0$, то $\Delta p>0$, следовательно, уровень ртути в капилляре будет ниже, чем в сосуде. Разность уровней $\Delta h=-\frac{4\alpha\cos\theta}{\rho gd}$, отсюда

$-\cos\theta = \dfrac{\Delta h\rho g d}{4\alpha} = 0{,}74$. Следовательно, радиус кривизны мениска ртути $R = -\dfrac{r}{\cos\theta} = 2$ мм.

7.49. В сосуд с водой опущен открытый капилляр, внутренней диаметр которого $d = 1$ мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре $\Delta h = 2{,}8$ см. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Какова была бы разность уровней Δh в сосуде и в капилляре, если бы смачивание было полным?

Решение:

Высота поднятия жидкости в трубке $\Delta h = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{r\rho g}$ — (1). Радиус кривизны мениска $R = r\cos\varphi = r\cos\left(180^\circ - \theta\right) = \left|-r\cos\theta\right|$ — (2). Из (1) $\cos\theta = \dfrac{\Delta h r\rho g}{2\alpha}$, и т. к. $r = \dfrac{d}{2}$, то окончательно $R = \dfrac{d^2\Delta h\rho g}{8\alpha} = 0{,}46$ мм. Если бы смачивание было полным, то $\theta = 0^\circ$ и $\cos\theta = 1$, тогда из (1) $\Delta h = \dfrac{4\alpha}{d\rho g} = 2{,}98$ мм.

7.50. На какую высоту h поднимается бензол в капилляре, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм? Смачивание считать полным.

Решение:

Т. к. смачивание полное, то высота поднятия бензола в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \dfrac{4\alpha}{d\rho g} = 13{,}86$ мм.

7.51. Каким должен быть внутренний диаметр d капилляра, чтобы при полном смачивании вода в нем поднималась на

$\Delta h = 2$ см? Задачу решить, когда капилляр находится: а) на Земле, б) на Луне.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $\Delta h = \frac{4\alpha}{d\rho g}$, откуда $d = \frac{4\alpha}{\rho g \Delta h}$. а) На Земле $g = 9{,}8$ м/с^2, тогда $d = 1{,}48$ мм. б) На Луне $g = 1{,}65$ м/с^2, тогда $d = 8{,}83$ мм.

7.52. Найти разность уровней Δh ртути в двух сообщающихся капиллярах, внутренние диаметры которых равны $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 2$ мм. Несмачивание считать полным.

Решение:

Высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{r\rho g}$. Поскольку $r = \frac{d}{2}$, то $h = \frac{4\alpha \cos\theta}{\rho g d}$. При полном несмачивании $\theta = 180°$ и $\cos\theta = -1$, тогда высота поднятия жидкости в первом и втором капилляре соответственно равна $h_1 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_1}$ и $h_2 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_2}$. Тогда разность уровней $\Delta h = h_2 - h_1 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_2} - \left(-\frac{4\alpha}{\rho g d_1}\right) = \frac{4\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{4\alpha(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} = 7{,}5$ мм.

7.53. Каким должен быть наибольший диаметр d пор в фитиле керосинки, чтобы керосин поднимался от дна керосинки до горелки (высота $h = 10$ см)? Считать поры цилиндрическими трубками и смачивание полным.

Решение:

Т. к. по условию поры цилиндрические и смачивание полное, то наибольший диаметр капилляра (см. задачу 7.51) $d = \frac{4\alpha}{\rho g h} = 0{,}15$ мм.

7.54. Капилляр внутренним радиусом $r = 2$ мм опущен в жидкость. Найти поверхностное натяжение α жидкости, если известно, что в капилляр поднялась масса жидкости $m = 0{,}09$ г.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$ — (1). Масса поднятой жидкости $m = \rho V$, где $V = Sh$ и $S = 2\pi r^2$, т. к. у пленки две стороны, тогда $m = 2\rho\pi r^2 h$, отсюда $h = \frac{m}{2\rho\pi r^2}$ — (2)

Т. к. в формулах (1) и (2) левые части равны, то можно приравнять и правые части, тогда $\frac{2\alpha}{\rho g r} = \frac{m}{2\rho\pi r^2}$ или $\frac{2\alpha}{g} = \frac{m}{2\pi r}$, отсюда окончательно $\alpha = \frac{gm}{4\pi r} = 0{,}07$ Н/м.

7.55. В сосуд с водой опущен капилляр, внутренний радиус которого $r = 0{,}16$ мм. Каким должно быть давление p воздуха над жидкостью в капилляре, чтобы уровень воды в капилляре и в сосуде был одинаков? Атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа. Смачивание считать полным.

Решение:

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$. Чтобы уровень воды в сосуде и капилляре был одинаковым, необходимо, чтобы давление было равно $p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g \frac{2\alpha}{\rho g r} = p_0 + \frac{2\alpha}{r} = 102{,}2$ кПа.

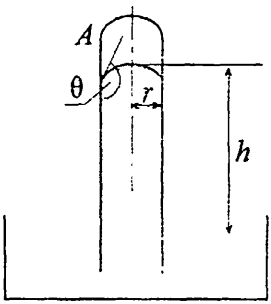
7.56. Капиллярная трубка опущена вертикально в сосуд с водой. Верхний конец трубки запаян. Для того чтобы уровень воды в трубке и в широком сосуде был одинаков, трубку пришлось погрузить в воду на 15% ее длины. Найти внутренней радиус r трубки. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Смачивание считать полным.

Решение:

По закону Бойля — Мариотта $p_0 V_0 = pV$, где p_0 и p — давления воздуха в капилляре до и после погружения его в воду, V_0 и V — объемы воздуха в капилляре до и после погружения. $p = p_0 + \frac{2\alpha}{r}$, $V_0 = Sh_0$, где S — площадь сечения капилляра и h_0 — его длина, $V = Sh$, где h — длина непогруженной части капилляра. С учетом этого $p_0 h_0 = \left(p_0 + \frac{2\alpha}{r}\right)h$, откуда $r = \frac{2\alpha h}{p_0(h_0 - h)}$ — (1). По условию $\frac{(h_0 - h)}{h_0} = 0\,015$, или $\frac{h}{(h_0 - h)} = 65{,}7$. Подставляя числовые данные в (1), получим $r = 0{,}1$ мм.

7.57. Барометрическая трубка A, заполненная ртутью, имеет внутренний диаметр d, равный: а) 5мм; б) 1,5см. Можно ли определить атмосферное давление непосредственно по высоте ртутного столба? Найти высоту ртутного столба в каждом из этих случаев. Атмосферное давление $p_0 = 758$ мм рт. ст. Несмачивание считать полным.

Решение:



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r}$, где θ — краевой угол, α — поверхностное натяжение. При полном несмачивании $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$, тогда $h = \left| -\frac{2\alpha}{\rho g r} \right| = \frac{4\alpha}{\rho g d}$ — (1) — высота, создающая дополнительное давление за счет кривизны поверхности мениска. а) Если $d = 5$ мм, то из (1) найдем $h = 3$ мм, тогда $p = p_0 - h = 755$ мм рт. ст. б) Если $d = 1{,}5$ см, то $h = 1$ мм, тогда $p = p_0 - h = 757$ мм рт. ст. Таким образом, если трубка узкая, то атмосферное давление не может быть непосредственно определено по высоте ртутного столба h, т. к. к давлению столба прибавляется еще давление выпуклого мениска в трубке.

7.58. Внутренний диаметр барометрической трубки $d = 0{,}75$ см. Какую поправку надо ввести, измеряя атмосферное давление по высоте ртутного столба? Несмачивание считать полным.

Решение:

Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \frac{4\alpha}{\rho g d} = 2$ мм.

7.59. Какую относительную ошибку мы допускаем, вычисляя атмосферное давление $p_0 = 101{,}3$ кПа по высоте ртутного столба, если внутренний диаметр барометрической трубки d равен: а) 5мм; б) 10мм? Несмачивание считать полным.

Решение:

Из закона Паскаля $p_0 = \rho g h_0$. Тогда высота ртутного столба $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$ мм. рт. ст. Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \frac{4\alpha}{\rho g d}$. Тогда относительная ошибка $x = \frac{h}{h_0} = \frac{4\alpha}{\rho g d}\frac{\rho g}{p_0} = \frac{4\alpha}{dp_0}$. а) Если $d_1 = 5$ мм, то $x_1 = 0.39\%$. б) Если $d = 10$ мм, то $x_2 = 0{,}19\%$.

7.60. На поверхность воды положили жирную (полностью несмачиваемую водой) стальную иголку. Каков наибольший диаметр d иголки, при котором она еще может держаться на воде?

Решение:

Для того чтобы иголка не тонула, необходимо, чтобы давление, оказываемое иголкой на площадь ее опоры, было не больше давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под иголкой. Давление иголки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho\pi d g}{4}$, где l — длина иголки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. В нашем случае поверхность жидкости цилиндрическая, т.е. $R_1 = \infty$ и $R_2 = r$ — радиус иголки. Тогда $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho\pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d \le \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho\pi g}} = 1{,}6$ мм.

7.61. Будет ли плавать на поверхности воды жирная (полностью несмачиваемая водой) платиновая проволока диаметром $d = 1$ мм?

Решение:

Чтобы проволока могла держаться на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое проволокой на площадь ее опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под проволокой и направленного вверх (силой Архимеда пренебрегаем). Давление проволоки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho \pi d g}{4}$, где l — длина проволоки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho \pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d_{max} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho \pi g}}$. Для платины $\rho = 21{,}4 \times$ $\times 10^3$ кг/м^3, для воды $\alpha = 0{,}073$ Н/м, тогда $\alpha_{max} = 0{,}09$ мм, а по условию $d = 1$ мм, значит, проволока плавать не будет.

7.62. В дне сосуда с ртутью имеется отверстие. Каким может быть наибольший диаметр d отверстия, чтобы ртуть из сосуда не выливалась при высоте столба ртути $h = 3$ см?

Решение:

Чтобы ртуть не выливалась из сосуда, давление ртутного столба высотой h должно быть равно добавочному давлению, вызванному кривизной поверхности жидкости, т.е. $p = \Delta p$. По закону Паскаля $p = \rho g h$, а по формуле Лапласа $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $\rho g h = \frac{4\alpha}{\rho g h}$, откуда $d_{max} = \frac{4\alpha}{\rho g h} =$ $= 0{,}5$ мм.

7.63. В дне стеклянного сосуда площадью $S = 30\ см^2$ имеется круглое отверстие диаметром $d = 0.5$ мм. В сосуд налита ртуть. Какая масса ртути останется в сосуде?

Решение:

Давление ртути на дно сосуда $p = \frac{mg}{S}$. Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$. Чтобы ртуть осталась в сосуде, необходимо, чтобы $p = \Delta p$ или $\frac{mg}{S} = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $m = \frac{4\alpha S}{gd} = 1{,}22$ кг.

7.64. Водомерка бегает по поверхности воды. Найти массу водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере радиусом $r = 0{,}1$ мм.

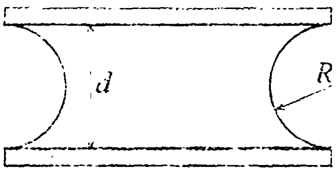
Решение:

Для того чтобы водомерка держалась на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое ею на площадь опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублениях под ее лапками. Давление одной лапки на воду $p_1 = \frac{mg}{6 \cdot 2\pi r^2}$. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $p_2 = \frac{\alpha}{r}$ (см. задачу 7.60).

Приравнивая p_1 и p_2, получим $\frac{\alpha}{r} = \frac{mg}{12\pi r^2}$, отсюда $m = \frac{12\pi r\alpha}{g}$; $m = 28$ мг.

7.65. Какую силу F надо приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером $S = 9 \times 12\ см^2$? Толщина водяной прослойки между пластинками $d = 0{,}05$ мм. Смачивание считать полным.

Решение:



Поверхность жидкости между пластинками имеет радиус кривизны $R = \frac{d}{2}$ (Рис.). Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}$. Величина p — избыток внешнего давления, действующего на площадь пластинок S. Следовательно, сила, которую надо приложить, чтобы оторвать пластинки друг от друга, $F = pS = \frac{2\alpha}{d}S = 31{,}5$ Н.

7.66. Между двумя вертикальными плоскопараллельными стеклянными пластинками, находящимися на расстоянии $d = 0{,}25$ мм друг от друга, налита жидкость. Найти плотность ρ жидкости, если известно, что высота поднятия жидкости между пластинками $h = 3{,}1$ см. Поверхностное натяжение жидкости $\alpha = 0{,}03$ Н/м. Смачивание считать полным.

Решение:

Поверхность смачивающей жидкости между пластинками имеет цилиндрическую форму с радиусом кривизны $R = \frac{d}{2}$. Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}$. С другой стороны, по закону Паскаля $p = \rho g h$. Тогда $\frac{2\alpha}{d} = \rho g h$, отсюда $\rho = \frac{2\alpha}{dgh} = 0{,}79 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.67. Между двумя горизонтальными плоскопараллельными стеклянными пластинками помещена масса $m = 5$ г ртути. Когда на верхнюю пластинку положили груз массой $M = 5$ кг, расстояние между пластинками стало равным $d = 0{,}087$ мм. Пренебрегая массой пластинки по сравнению с массой груза, найти поверхностное натяжение α ртути. Несмачивание считать полным.

Решение:

Поверхность ртути между пластинками имеет цилиндрическую форму и радиус кривизны $R = \dfrac{d}{2}$. Силу добавочного отрицательного давления можно определить по формуле $F = \dfrac{2\alpha}{d}S$ из задачи 7.65, но в данном случае поверхность будет выпуклая, т. к. имеет место полное несмачивание. Груз давит на ртуть с силой $P = Mg$ — (2). Поскольку силы уравновешены, то $\vec{F} + \vec{P} = 0$ или $F = P$. Подставляя (1) и (2), получим $\dfrac{2\alpha}{d}S = Mg$ — (3). Масса ртути $m = \rho V = \rho S d$, откуда $S = \dfrac{m}{\rho d}$. Подставим это выражение в (3): $\dfrac{2\alpha m}{d^2 \rho} = Mg$, откуда $\alpha = \dfrac{Mg\rho d^2}{2m}$; $\alpha = 0{,}5$ Н/м.

7.68. В открытом капилляре, внутренний диаметр которого $d = 1$ мм, находится капля воды. При вертикальном положении капилляра капля образует столбик высотой h, равной: а) 2см, б) 4см, в) 2,98см. Найти радиусы кривизны R_1 и R_2 верхнего и нижнего менисков в каждом из этих случаев. Смачивание считать полным.

Решение:

Верхний мениск будет вогнут, давление p_1, вызванное кривизной этого мениска, направлено вверх и равно

$p_1 = \dfrac{2\alpha}{R_1}$, где R_1 — радиус кривизны верхнего мениска.

При полном смачивании $p_1 = \dfrac{2\alpha}{r}$, где r — радиус капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости p_2 направлено вниз; $p_2 = \rho g h$. Если $p_1 > p_2$, то результирующее давление, направленное вверх, заставляет нижний мениск быть вогнутым. При этом давление p_3, вызванное кривизной нижнего мениска, направлено вниз и равно $p_3 = \dfrac{2\alpha}{R_2}$, где R_2 — радиус кривизны нижнего мениска. В равновесии $p_1 = p_2 + p_3$. Если $p_1 < p_2$, то результирующее давление направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \dfrac{2\alpha}{R_2}$ будет направлено уже вверх. В этом случае $p_1 + p_3 = p_2$. Если $p_1 = p_2$, то нижний мениск будет плоским и $p_3 = 0$. Подставив числовые данные, получим: а) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = -1{,}52$ мм; б) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = 1{,}46$ мм; в) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = \infty$.

7.69. Горизонтальный капилляр, внутренний диаметр которого $d = 2$ мм, наполнен водой так, что в нем образовался столбик длиной $h = 10$ см. Какая масса m воды вытечет из капилляра, если его поставить вертикально? Смачивание считать полным. Указание: учесть, что предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать радиусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра.

Решение:

При вертикальном положении капилляра верхний мениск вогнут и давление, вызванное кривизной этого мениска, всегда направлено вверх и равно $p_1 = \frac{2\alpha}{r} = \frac{4\alpha}{d}$, где d — диаметр капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости всегда направлено вниз и равно $p_2 = \rho g h$. Предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать радиусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра, поэтому $p_1 < p_2$, результирующее давление будет направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \frac{4\alpha}{d}$ будет направлено уже вверх и $p_1 + p_3 = p_2$ или $\frac{8\alpha}{d} = \rho g h_1$, откуда $h_1 = \frac{8\alpha}{\rho g d}$ — высота столбика жидкости, оставшейся в капилляре $m_1 = \rho S h_1$, а ее первоначальная масса $m_2 = \rho S h_0$, тогда масса жидкости, которая выльется $m = m_0 - m_1 = \rho S(h_0 - h_1)$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения капилляра, поэтому окончательно $m = \frac{\rho \pi d^2}{4}\left(h_0 - \frac{8\alpha}{\rho g d}\right) = 0{,}22$ г.

7.70. В открытом вертикальном капилляре, внутренний радиус которого $r = 0{,}6$ мм, находится столбик спирта. Нижний мениск этого столбика нависает на нижний конец капилляра. Найти высоту h столбика спирта, при которой радиус кривизны R нижнего мениска равен: а) $3r$; б) $2r$; в) r. Смачивание считать полным.

Решение:

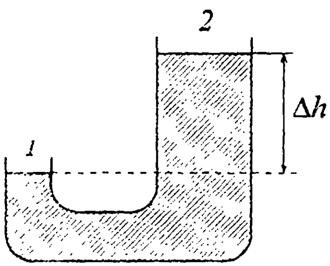
По условию, нижний мениск выпуклый, тогда результирующее давление направлено вниз, следовательно (см.

задачу 7.69), $p_1 + p_3 = p_2$, где $p_1 = \frac{2\alpha}{r}$, $p_2 = \rho g h$ и $p_3 = \frac{2\alpha}{R}$. Тогда $\frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha}{R} = \rho g h$, откуда $h = \frac{2\alpha(R + r)}{\rho g r R}$.

а) Если $R = 3r$, то $h = \frac{8\alpha}{3\rho g r} = 11{,}5$ мм. б) Если $R = 2r$, то $h = \frac{3\alpha}{\rho g r} = 12{,}9$ мм. в) Если $R = r$, то $h = \frac{4\alpha}{\rho g r} = 17{,}2$ мм.

7.71. Трубка, изображенная на рисунке, открыта с обоих концов и наполнена керосином. Внутренние радиусы трубок 1 и 2 равны $r_1 = 0{,}5$ мм и $r_2 = 0{,}9$ мм. При какой разности уровней Δh мениск на конце трубки 1 будет: а) вогнутым с радиусом кривизны $R = r_1$; б) плоским; в) выпуклым с радиусом кривизны $R = r_2$; г) выпуклым с радиусом кривизны $R = r_1$? Смачивание считать полным.

Решение:



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r}$. Тогда для каждой трубки $h_1 = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g R}$ и $h_2 = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r_2}$. Т. к. по условию смачивание полное, то во второй трубке всегда $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$. Тогда перепад высот в трубках $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{\cos\theta}{R} - \frac{1}{r_2}\right)$. а) Мениск на конце трубки 1 будет вогнутым, с $R = r_1$, если $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$ —

полное смачивание $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=6{,}8$ мм. б) Мениск на конце трубки 1 будет плоским, если $\theta=\frac{\pi}{2}$, отсюда $\cos\theta=0$; $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g r_2}=8{,}5$ мм. в) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R=r_2$, если $\theta=\pi$, отсюда $\cos\theta=-1$ $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\frac{2}{r_2}=17$ мм. г) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R=r_1$, если $\theta=\pi$, отсюда $\cos\theta=-1$ — полное несмачивание $\Delta h=\frac{2\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=23{,}8$ мм.

7.72. В широкий сосуд с водой опущен капилляр так, что верхний его конец находится выше уровня воды в сосуде на $h=2$ см. Внутренний радиус капилляра $r=0{,}5$ мм. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Смачивание считать полным.

Решение:

Если бы капилляр был достаточно длинным, то вода поднялась бы в нем на высоту $h'=\frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r}=2{,}98$ см. Но высота капилляра над водой $h<h'$. К мениску приложены давление $p_0=\frac{2\alpha}{R}$, вызванное кривизной мениска и направленное вверх, и гидростатическое давление $p=\rho g h$. Для любой высоты h будем иметь $\rho g h=\frac{2\alpha}{R}$, откуда $R=\frac{2\alpha}{\rho g h}=0{,}75$ мм.

7.73. Ареометр плавает в воде, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 9$ мм. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если на поверхность воды налить несколько капель спирта?

Решение:

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх, сила тяжести $\vec{P}$, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $\vec{F}$, направленная вниз, т. к. смачивание является полным. Условие равновесия имеет вид: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_A = 0$ или в скалярном виде $P + F = F_A$. Имеем $P = mg$; $F = 2\pi r\alpha = \pi d\alpha$; $F_A = \rho g \times$ $\times (V + Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда для воды $mg + \pi d\alpha_1 = \rho g(V + Sh_1)$; для спирта $mg + \pi d\alpha_2 = \rho g(V + Sh_2)$ (считаем, что плотность воды не изменилась). Решая совместно эти два уравнения, найдем $\Delta h = \dfrac{4(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho g d} = 2{,}4$ мм.

7.74. Ареометр плавает в жидкости, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра $d = 9$ мм. Плотность жидкости $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, поверхностное натяжение жидкости $\alpha = 0{,}03$ Н/м. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если вследствие замасливания ареометр стал полностью несмачиваемым этой жидкостью?

Решение:

На ареометр, плавающий в жидкости, действуют: сила тяжести P, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $F = \pi d\alpha$, направленная при полном смачивании вниз, а при полном несмачивании вверх и сила Архимеда $F_A = \rho g(V + Sh)$, направленная вверх, где V — объем цилиндрической части ареометра, S — площадь поперечного сечения трубки ареометра и h — длина цилиндрической трубки, находящейся в жидкости. Условие равновесия при полном смачивании $P + F = F_{A1}$, а при полном несмачивании $P = F + F_{A2}$, следовательно, $F_{A1} - F = F + F_{A2}$ или $\rho gV + \rho gSh_1 - \pi d\alpha = \pi d\alpha + \rho gV + \rho gSh_2$. Отсюда $\rho gS(h_1 - h_2) = \rho gS\Delta h = 2\pi d\alpha$ и, окончательно, $\Delta h = \frac{2\pi d\alpha}{\rho gS} = \frac{2\pi d\alpha}{\rho g\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{8\alpha}{\rho gd} = 3{,}4$ мм.

7.75. При растворении массы $m = 10$ г сахара $(C_{12}H_{22}O_{11})$ в объеме $V = 0{,}5$ л воды осмотическое давление раствора $p = 152$ кПа. При какой температуре T находится раствор? Диссоциация молекул сахара отсутствует.

Решение:

Осмотическое давление раствора связано с термодинамической температурой формулой Вант-Гоффа $p = CRT$. Молярная концентрация раствора $C = \frac{m}{\mu V}$, где $\mu = 0{,}342$ кг/моль, тогда $p = \frac{mRT}{\mu V}$, откуда $T = \frac{\mu Vp}{mR}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, получим: $T = \frac{0{,}342 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 152 \cdot 10^{3}}{10^{-2} \cdot 8{,}31} = 313$ К.

7.76. Осмотическое давление раствора, находящегося при температуре $t = 87°$ С, $p = 165$ кПа. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества в этом растворе? Диссоциация молекул вещества отсутствует.

Решение:

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p = CRT$. Т. к. по условию диссоциация молекул в растворе отсутствует, то молярная концентрация $C = \frac{N_1}{N_A}$, тогда $p = \frac{N_1 RT}{N_A} = N_1 kT$, откуда $N_1 = \frac{\nu N_A}{V}$, где $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V}{\mu}$, тогда $N_2 = \frac{\rho N_A}{\mu}$. Следовательно, $N = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho N_A}{\mu}\frac{kT}{p} = \frac{\rho RT}{\mu p} = 1007$ молекул.

7.77. Масса $m = 2$ г поваренной соли растворена в объеме $V = 0{,}5$ л воды. Степень диссоциации молекул поваренной соли $\alpha = 0{,}75$. Найти осмотическое давление p раствора при температуре $t = 17°$ С.

Решение:

Если масса всей растворенной в воде поваренной соли равна m, а степень диссоциации α, то масса диссоциированной соли равна αm, а масса недиссоциированной — $(1-\alpha)m$. Тогда молярная концентрация раствора $C = \frac{((1-\alpha)m)/\mu + \alpha m/(2\mu_1) + \alpha m/(2\mu_2)}{V}$;

$C = \frac{m(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)}{2\mu\mu_1\mu_2 V} = 124{,}5$ моль/м^3. Следовательно, осмотическое давление $p = CRT = 300$ кПа.

7.78. Степень диссоциации молекул поваренной соли при растворении ее в воде $\alpha = 0{,}4$. При этом осмотическое давление раствора, находящегося при температуре $t = 27°$ С, $p = 118{,}6$ кПа. Какая масса m поваренной соли растворена в объеме $V = 1$ л воды?

Решение:

Молярная концентрация частично диссоциированного раствора поваренной соли (см. задачу 7.78) $C = \frac{m\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$. С другой стороны, из формулы Вант-Гоффа $C = \frac{p}{RT}$, тогда $\frac{p}{RT} = \frac{m\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$, откуда $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)} = 1{,}93$ г.

7.79. Масса $m = 2{,}5$ г поваренной соли растворена в объеме $V = 1$ л воды. Температура раствора $t = 18°$ С. Осмотическое давление раствора $p = 160$ кПа. Какова степень диссоциации молекул поваренной соли в этом случае? Сколько частиц растворенного вещества находится в единице объема раствора?

Решение:

Масса растворенной в воде частично диссоциированной соли (см. задачу 7.78) равна: $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}$, откуда получим $2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2 = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{mRT}$ или $\alpha\mu^2 - 2\alpha\mu_1\mu_2 = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT}$. Из последнего выражения, после преобразований, найдем степень диссоциации $\alpha = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT\left(\mu^2 - 2\mu_1\mu_2\right)} = 0{,}52$. Число частиц в единице объема (см. задачу 7.76) $n = \frac{p}{kT} = 3{,}98 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

7.80. Масса $m = 40$ г сахара $(C_{12}H_{22}O_{11})$ растворена в объеме $V = 0,5$ л воды. Температура раствора $t = 50°$ С. Найти давление p насыщенного водяного пара над раствором.

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором меньше, чем над чистым растворителем (водой). При достаточно малой концентрации раствора относительное уменьшение давления насыщенного пара над раствором определяется законом Рауля $\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\nu'}{\nu + \nu'}$, где p_0 — давление насыщенного пара над чистым растворителем, p — давление насыщенного пара над раствором, ν — количество жидкости. Отсюда $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$. По таблице 8 находим для $t = 50°$ С давление насыщенного водяного пара $p_0 = 12302$ Па. Количество сахара $\nu' = \frac{m}{\mu}$, где $\mu = 0.342$ кг/моль, количество воды $\nu = \frac{\rho V}{\mu_1}$, где $\mu = 0.018$ кг/моль.

Тогда $p = p_0\left(1 - \frac{m\mu_1}{\rho V\mu + m\mu_1}\right) = 12,3$ кПа.

7.81. Давление насыщенного пара над раствором при температуре $t = 30°$ С равно $p_1 = 4,2$ кПа. Найти давление p_2 насыщенного водяного пара над этим раствором при температуре $t_2 = 60°$ С.

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$. Т. к. количество растворенного вещества ν' и растворителя ν не зависит от температуры, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0(t_1)}{p_0(t_2)}$, тогда $p_2 = \frac{p_1 p_0(t_2)}{p_0(t_1)}$. По таблице 8 находим $p_0(t_1) = 4229$ Па, $p_0(t_2) = 19817$ Па, тогда $p = 19.68$ кПа.

7.82. Давление p насыщенного пара над раствором в 1,02 раза меньше давления p_0 насыщенного пара чистой воды. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества?

Решение:

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu - \nu'}\right)$, отсюда $\frac{p_0}{p} = \frac{\nu - \nu'}{\nu - 2\nu'} = \frac{\nu/\nu' - 1}{\nu/\nu' - 2}$ — (1). Число молекул растворенного вещества и растворителя (см. задачу 7.76) соответственно равно $N = \frac{\nu N_A}{V}$ и $N' = \frac{\nu' N_A}{V}$, тогда $\frac{N}{N'} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (2). Из (1) имеем $p_0\left(\frac{\nu}{\nu'} - 2\right) = p\left(\frac{\nu}{\nu'} - 1\right)$ или $\frac{\nu}{\nu'}(p_0 - p) = 2p_0 - p$, откуда $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{2p_0 - p}{p_0 - p} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$ или с учетом (2) $\frac{N}{N'} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$.

Отсюда окончательно $N = \frac{N'(2p_0/p - 1)}{p_0/p - 1} = 52$ молекулы.

7.83. Масса $m = 100$ г нелетучего вещества растворена в объеме $V = 1$ л воды. Температура раствора $t = 90°$ С. Давление насыщенного пара над раствором $p = 68{,}8$ кПа. Найти молярную массу μ растворенного вещества.

Решение:

Закон Рауля можно применить для определения молярной массы вещества. Действительно, закон Рауля можно записать так: $\frac{p_0}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'} + 1$, или $\frac{p_0}{p_0 - p} - 1 = \frac{p}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (1).

Замечая, что $\nu = \frac{m}{\mu}$ и $\nu' = \frac{m'}{\mu'}$, нетрудно из (1) получить $\mu' = \mu \frac{m'}{m} \frac{p}{p_0 - p}$ — (2), где m — масса растворителя, μ — молярная масса растворителя и μ' — молярная масса растворенного вещества. Подставляя числовые данные, получим $\mu' = 0{,}092$ кг/моль.

7.84. Нелетучее вещество с молярной массой $\mu = 0{,}060$ кг/моль растворено в воде. Температура раствора $t = 80°$ С. Давление насыщенного пара над раствором $p = 47{,}1$ кПа. Найти осмотическое давление $p_{ос}$ раствора.

Решение:

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p_{ос} = \frac{mRT}{\mu V}$.

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$, отсюда $\nu' = \frac{(p_0 - p)\nu}{p}$. Число молей воды $\nu = \frac{m}{\mu_1} = \frac{\rho V}{\mu_1}$, тогда $\nu' = \frac{(p_0 - p)\rho V}{p\mu_1}$. С другой стороны, $\nu' = \frac{m}{\mu}$, тогда $m = \nu'\mu = \frac{(p_0 - p)\rho V \mu}{p\mu_1}$. Для $t = 80°$ C давление насыщенного пара над чистой водой $p_0 = 47215$ Па, следовательно, осмотическое давление

$$p_{ос} = \frac{RT}{\mu V}\frac{(p_0 - p)\rho V \mu}{p\mu_1} = \frac{(p_0 - p)\rho RT}{p\mu_1};$$

$$p_{ос} = \frac{(47215 - 47100)\cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 353}{47{,}1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}018} = 398 \text{ кПа}^*.$$

---

* Ответ в данной задаче не совпадает с ответом первоисточника: $p_{ос} = 925$ кПа.