§ 8. Твердые тела

При решении задач этого раздела используются данные таблиц 11, 12, 13 из приложения, кроме того, следует учесть указание к § 5.

8.1. Изменение энтропии при плавлении количества $\nu = 1$ кмоль льда $\Delta S = 22{,}2$ кДж/К. На сколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на $\Delta p = 100$ кПа?

Решение:
Согласно уравнению Клаузиуса — Клапейрона изменение температуры $\Delta T = \dfrac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). Изменение энтропии $\Delta S = \dfrac{m\lambda_0}{T} = \dfrac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления, m — масса. Из (2) $\dfrac{T}{q_0} = \dfrac{\nu}{\Delta S}$, подставляя это выражение в (1), получим $\Delta T = \Delta p(V_ж - V_т)\dfrac{\nu}{\Delta S} = 0{,}009$ К.

8.2. При давлении $p_1 = 100$ кПа температура плавления олова $t_1 = 231{,}9°$ С, а при давлении $p_2 = 10$ МПа она равна $t_2 = 232{,}2°$ С. Плотность жидкого олова $\rho = 7{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти изменение энтропии ΔS при плавлении количества $\nu = 1$ кмоль олова.

Решение:
Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры $\Delta T = \dfrac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). С другой сто-

роны, изменение энтропии $\Delta S = \frac{m\lambda_0}{T} = \frac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления. Из уравнений (1) и (2) имеем $\Delta S = \frac{\Delta p(V_ж - V_т)\nu}{\Delta T} = \frac{(p_2 - p_1)(V_ж - V_т)\nu}{T_2 - T_1}$. Поскольку молярные объемы твердого и жидкого олова соответственно равны $V_т = \frac{\mu}{\rho_т}$ и $V_ж = \frac{\mu}{\rho_ж}$, то, окончательно, получим $\Delta S = \frac{(p_2 - p_1)(\rho_т - \rho_ж)\mu\nu}{(T_2 - T_1)\rho_т\rho_ж} = 15{,}5$ кДж/К.

8.3. Температура плавления железа изменяется на $\Delta T = 0{,}012$ К при изменении давления на $\Delta p = 98$ кПа. На сколько меняется при плавлении объем количества $\nu = 1$ кмоль железа?

Решение:

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры плавления $\Delta T = \frac{\Delta pT(V_ж - V_т)}{q_0}$, отсюда $\Delta V_м = V_ж - V_т = \frac{q_0\Delta T}{T\Delta p}$ — изменение молярного объема, тогда $\Delta V = \nu\Delta V_м = \frac{q_0\nu\Delta T}{T\Delta p}$. Т. к. удельная и молярная теплота плавления связаны между собой как $q_0 = \mu\lambda_0$, тогда, окончательно, $\Delta V = \frac{\mu\lambda_0\nu\Delta T}{T\Delta p} = 1{,}03$ л.

8.4. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти удельную теплоемкость c: а) меди; б) железа; в) алюминия.

Решение:

При очень низких температурах для твердых тел имеет место закон Дюлонга и Пти, согласно которому молярная теплоемкость всех химически простых твердых тел равна приблизительно $3R = 25$ Дж/(моль·К). С другой стороны, удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением $c = \mu c$, тогда $3R = \mu c$, откуда $c = 3R/\mu$. а) Молярная масса меди $\mu = 63{,}55 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, отсюда $c = 393$ Дж/(моль·К). б) Молярная масса железа $\mu = 55{,}84 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 448$ Дж/(моль·К). в) Молярная масса алюминия $\mu = 26{,}98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 927$ Дж/(моль·К).

8.5. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, из какого материала сделан металлический шарик массой $m = 0{,}025$ кг, если известно, что для его нагревания от $t_1 = 10°$ С до $t_2 = 30°$ С потребовалось затратить количество теплоты $Q = 117$ Дж.

Решение:

Затраченное количество теплоты можно найти по формуле $Q = mc(T_2 - T_1)$. Согласно закону Дюлонга и Пти молярная теплоемкость $C \approx 3R$. Молярная и удельная теплоемкости связаны соотношением $C = \mu c$, откуда $c = \frac{C}{\mu} = \frac{3R}{\mu}$. Тогда $Q = m\frac{3R}{\mu}(T_2 - T_1)$, откуда $\mu = \frac{3mR(T_2 - T_1)}{Q}$. Подставив числовые данные, найдем $\mu = 0{,}107$ кг/моль, следовательно, шарик сделан из серебра.

8.6. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, во сколько раз удельная теплоемкость алюминия больше удельной теплоемкости платины.

Решение:

Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c = \frac{3R}{\mu}$, тогда $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 7{,}23$.

8.7. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, ударяется о стенку и входит в нее. Считая, что 10% кинетической энергии пули идет на ее нагревание, найти, на сколько градусов нагрелась пуля. Удельную теплоемкость свинца найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение:

Кинетическая энергия пули $W_к = \frac{mv^2}{2}$. Количество тепла, полученное пулей, $Q = cm\Delta T$. Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c = \frac{3R}{\mu}$, тогда $Q = \frac{3Rm\Delta T}{\mu}$. Согласно закону сохранения энергии $Q = \eta W_к$, тогда $\frac{3Rm\Delta T}{\mu} = \frac{\eta m v^2}{2}$, откуда изменение температуры $\Delta T = \frac{\eta \mu v^2}{6R} = 66$ К.

8.8. Пластинки из меди (толщиной $d_1 = 9$ мм) и железа (толщиной $d_2 = 3$ мм) сложены вместе. Внешняя поверхность медной пластинки поддерживается при температуре $t_1 = 50°$ C, внешняя поверхность железной — при температуре $t_2 = 0°$ C. Найти температуру t поверхности их соприкосновения. Площадь пластинок велика по сравнению с тóлщиной.

Решение:

Количество теплоты, прошедшее через сложенные вместе медную и железную пластинки, определяется формулой $Q = \lambda_1 \frac{t_1 - t}{d_1} S_\tau = \lambda_2 \frac{t - t_2}{d_2} S_\tau$, откуда температура поверхности соприкосновения $t = \frac{\lambda_1 t_1 d_2 + \lambda_2 t_2 d_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} = 34{,}5°\ \text{C}$.

8.9. Наружная поверхность стены имеет температуру $t_1 = -20°\ \text{C}$, внутренняя — температуру $t_2 = 20°\ \text{C}$. Толщина стены $d = 40$ см. Найти теплопроводность λ материала стены, если через единицу ее поверхности за время $\tau = 1$ ч проходит количество теплоты $Q = 460{,}5$ кДж/м^2.

Решение:

Количество теплоты Q, переносимое вследствие теплопроводности за время $\Delta\tau$, определяется формулой $Q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \Delta S \Delta \tau$, где $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ — градиент температуры в направлении, перпендикулярном площадке ΔS, λ — теплопроводность. В нашем случае $\Delta T = T_2 - T_1$, $\Delta x = d$, $\Delta S = 1$ м^2 и $\Delta\tau = \tau$, тогда $Q = \frac{(T_2 - T_1)\lambda\tau}{d}$. Отсюда теплопроводность $\lambda = \frac{Qd}{(T_2 - T_1)\tau} = 1{,}28$ Вт/(м·К).

8.10. Какое количество теплоты Q теряет за время $\tau = 1$ мин комната с площадью пола $S = 20$ м^2 и высотой $h = 3$ м через четыре кирпичные стены? Температура в комнате $t_1 = 15°\ \text{C}$, температура наружного воздуха $t_2 = -20°\ \text{C}$. Теплопроводность кирпича $\lambda = 0{,}84$ Вт/(м·К). Толщина стен $d = 50$ см. Потерями тепла через пол и потолок пренебречь.

Решение:

В первом приближении комнату можно считать квадратной, тогда площадь боковых стен $\Delta S = 4ah$, где $a = \sqrt{S}$, следовательно, $\Delta S = 4\sqrt{S}h$. Количество тепла, потерянное комнатой за время τ (см. задачу 8.9), равно $Q = \frac{(T_1 - T_2)\lambda \Delta S \tau}{d} = \frac{4(T_1 - T_2)\lambda\sqrt{S}h\tau}{d} = 190$ кДж.

8.11. Один конец железного стержня поддерживается при температуре $t_1 = 100°$ C, другой упирается в лед. Длина стержня $l = 14$ см, площадь поперечного сечения $S = 2$ см^2. Найти количество теплоты Q_τ, протекающее в единицу времени вдоль стержня. Какая масса m льда растает за время $\tau = 40$ мин? Потерями тепла через стенки пренебречь.

Решение:

Количество теплоты, протекающее в единицу времени вдоль стержня, $Q_\tau = \frac{Q}{\Delta\tau} = \frac{(T_1 - T_0)\lambda S}{l} = 8{,}38$ Дж/с. Т. к. по условию потерями тепла через стенки можно пренебречь, то по закону сохранения энергии $Q_\tau \tau = qm$, откуда $m = \frac{Q_\tau \tau}{q} = 60$ г.

8.12. Площадь поперечного сечения медного стержня $S = 10$ см^2, длина стержня $l = 50$ см. Разность температур на концах стержня $\Delta T = 15$ К. Какое количество теплоты Q_τ проходит в единицу времени через стержень? Потерями тепла пренебречь.

Решение:

Количество тепла, проходящее за единицу времени через стержень (см. задачу 8.11), $Q_\tau = \frac{\Delta T \lambda S}{l} = 11{,}7$ Дж/с.

8.13. На плите стоит алюминиевая кастрюля диаметром $D = 15$ см, наполненная водой. Вода кипит, и при этом за время $\tau = 1$ мин образуется масса $m = 300$ г водяного пара. Найти температуру t внешней поверхности дна кастрюли, если толщина его $d = 2$ мм. Потерями тепла пренебречь.

Решение:

Количество тепла, которое поучает кастрюля за время τ, $Q = \frac{(T - T_к)\lambda S\tau}{d}$. Т. к. по условию потерями тепла можно пренебречь, то $Q = rm$, тогда по закону сохранения энергии $\frac{(t - t_к)\lambda S\tau}{d} = rm$. Отсюда, с учетом того, что площадь дна кастрюли $S = \frac{\pi D^2}{4}$, температура внешней поверхности дна кастрюли $t = \frac{4drm}{\lambda\pi D^2\tau} + t_к = 106°$ С.

8.14. Металлический цилиндрический сосуд радиусом $R = 9$ см наполнен льдом при температуре $t_1 = 0°$ С. Сосуд теплоизолирован слоем пробки толщиной $d = 1$ см. Через какое время τ весь лед, находящийся в сосуде, растает, если температура наружного воздуха $t_2 = 25°$ С? Считать, что обмен тепла происходит только через боковую поверхность сосуда средним радиусом $R_0 = 9{,}5$ см.

Решение:

Объем сосуда $V = \pi R^2 h$, где h — высота сосуда, тогда масса льда в сосуде $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$. Количество тепла, необходимое для расплавления всего льда в сосуде $Q = qm = q\rho\pi R^2 h$. Т. к. по условию теплообмен идет только через боковую поверхность, то ее площадь $\Delta S = 2\pi R_0 h$, тогда количество тепла, проходящее через боковую поверхность за время τ : $Q=\frac{(t_2-t_1)\lambda 2\pi R_0 h\tau}{d}$. По закону сохранения энергии $q\rho R^2=\frac{2(t_2-t_1)\lambda R_0\tau}{d}$, откуда $\tau=\frac{q\rho R^2 d}{2(t_2-t_1)\lambda R_0}=28{,}6$ часов.

8.15. Какую силу F надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S=10$ см^2, чтобы не дать ему расшириться при нагревании от $t_0=0°$ С до $t=30°$ С?

Решение:
Чтобы стержень не удлинялся при нагревании, его нужно сжимать с силой $F=\frac{\Delta l ES}{l_0}$ — (1), где E — модуль Юнга, $\Delta l=l-l_0=l_0 at$ — (2) — изменение длины стержня при нагревании. Подставляя (2) в (1), найдем $F=ESat=71$ кН.

8.16. К стальной проволоке радиусом $r=1$ мм подвешен груз. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение, как при нагревании на $\Delta t=20°$ С. Найти массу m груза.

Решение:
При повышении температуры длина твердых тел возрастает, в первом приближении, линейно с температурой: $l=l_0(1+at)$, где l и l_0 — длина стержня соответственно при температуре t и t_0. Тогда относительное удлинение $\frac{l-l_0}{l}=\frac{\Delta l}{l}=a\Delta t$, откуда $\Delta l=la\Delta t$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. С другой стороны, по закону Гука $\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{E}=\frac{mg}{SE}$, где $S=\pi R^2$ — площадь поверхностного сечения прово-

локи, E — модуль Юнга, тогда $\Delta l = \dfrac{lmg}{\pi R^2 E}$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получим $a\Delta t = \dfrac{mg}{\pi r^2 E}$, откуда масса стержня $m = \dfrac{\pi r^2 E a \Delta t}{g} = 15$ кг.

8.17. Медная проволока натянута горячей при температуре $t_1 = 150°$ С между двумя прочными неподвижными стенками. При какой температуре t_2, остывая, разорвется проволока? Считать, что закон Гука справедлив вплоть до разрыва проволоки.

Решение:

Длина проволоки при температуре t_1 и t_2 соответственно равна $l_1 = l_0(1 + at_1)$ и $l_2 = l_0(1 + at_2)$. При остывании проволока укоротится на $\Delta l = l_1 - l_2 = l_0 a(t_1 - t_2)$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. Проволока разорвется, если $\dfrac{\Delta l}{l_0} \geq \dfrac{p_{max}}{E}$ — (2), где E — модуль Юнга, p_{max} — предел прочности меди. В предельном случае из (1) и (2) имеем $a(t_1 - t_2) = \dfrac{p_{max}}{E}$, откуда $t_2 = t_1 - \dfrac{p_{max}}{aE} = 20°$ С.

8.18. При нагревании некоторого металла от $t_0 = 0°$ С до $t = 500°$ С его плотность уменьшается в 1,027 раза. Найти для этого металла коэффициент линейного расширения a, считая его постоянным в данном интервале температур.

Решение:

Плотность металла при температуре t равна $\rho = m/V$, тогда его плотность при температуре t_0 равна $\rho_0 = m/V_0$. Относительное изменение объема металла при нагревании

$$\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{\frac{m}{\rho}-\frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho_0}}=\frac{\rho_0-\rho}{\rho}, \text{ или } \frac{\Delta V}{V_0}=\frac{\rho_0}{\rho}-1 \text{ — (1).}$$

С другой стороны, $\frac{\Delta V}{V_0}=b\Delta T$, где b — температурный коэффициент объемного расширения. Т. к. металл изотропный, то температурный коэффициент линейного расширения $a=\frac{b}{3}$, тогда $\frac{\Delta V}{V_0}=3a(t-t_0)$ — (2). Приравнивая в выражениях (1) и (2) правые части, имеем $\frac{\rho_0}{\rho}-1=3a(t-t_0)$, откуда температурный коэффициент линейного расширения $a=\frac{\rho_0/\rho-1}{3(t-t_0)}=1{,}8\cdot10^{-5}\text{ К}^{-1}$.

8.19. Какую длину l_0 должны иметь при температуре $t_0=0°$ С стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре стальной стержень был длиннее медного на $\Delta l=5$ см?

Решение:

Для любой температуры длина стального стержня равна $l_1=l_{01}(1+a_1t)=l_{01}+l_{01}a_1t$ — (1), медного стержня — $l_2=l_{02}(1+a_2t)=l_{02}+l_{02}a_2t$ — (2). По условию $l_1-l_2=\Delta l$, $l_{01}-l_{02}=\Delta l$ — (3). Решая совместно (1) — (3), получим $a_1l_{01}=a_2l_{02}$ — (4). Из уравнений (3) и (4) найдем длины обоих стержней при $t_0=0°$ С: $l_{02}=\frac{\Delta l a_1}{a_2-a_1}=11$ см, $l_{01}=l_{02}+\Delta l=16$ см.

8.20. На нагревание медной болванки массой $m=1$ кг, находящейся при температуре $t_0=0°$ С, затрачено количество теплоты $Q = 138{,}2$ кДж. Во сколько раз при этом увеличился ее объем? Удельную теплоемкость меди найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение:

Относительное изменение объема металла при нагревании от температуры t_0 до температуры t (см. задачу 8.18) $\frac{\Delta V}{V_0} = 3a(t - t_0)$, откуда $\frac{V}{V_0} = 3a(t - t_0) + 1$ — (1). Количество тепла, израсходованное на нагревание болванки $Q = cm(t - t_0)$, где c — удельная теплоемкость меди, которая по закону Дюлонга и Пти равна $c = \frac{3R}{\mu}$, где μ — молярная масса меди. Тогда $Q = \frac{3Rm}{\mu}(t - t_0)$, откуда разность температур $t - t_0 = \frac{Q\mu}{3Rm}$. После подстановки последнего выражения в уравнение (1) окончательно имеем $\frac{V}{V_0} = \frac{aQ\mu}{Rm} + 1 = 1{,}02$.

8.21. При растяжении медной проволоки, поперечное сечение которой $S = 1{,}5\ \text{мм}^2$, начало остаточной деформации наблюдалось при нагрузке $F = 44{,}1$ Н. Каков предел упругости p материала проволоки?

Решение:

Пределом упругости называется минимальное давление, при котором тело, после снятия нагрузки, уже не способно вернуться из деформированного состояния в первоначальное. По определению давления найдем $p_{\text{п}} = \frac{F}{S} = 29{,}4$ МПа.

8.22. Каким должен быть предельный диаметр d стального троса, чтобы он выдержал нагрузку $F = 9{,}8$ кН?

Решение:

Чтобы трос выдержал данную нагрузку, необходимо выполнение условия: $\frac{F}{S} \le P_{max}$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения троса, $p_{max} = 785$ МПа — предел прочности стали. В предельном случае $\frac{4F}{\pi d^2} = P_{max}$, откуда $d^2 = \frac{4F}{\pi p_{max}}$ или $d = \sqrt{\frac{F}{\pi p_{max}}} = 4$ мм.

8.23. Найти длину l медной проволоки, которая, будучи подвешена вертикально, начинает рваться под действием собственной силы тяжести.

Решение:

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \ge p_{max}$, где $m = \rho V = \rho Sl$ — масса проволоки, $p_{max} = 245$ МПа — предел прочности меди. В предельном случае $\rho gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 2{,}9$ км.

8.24. Решить предыдущую задачу для свинцовой проволоки.

Решение:

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \ge p_{max}$, где $m = \rho V = \rho Sl$ — масса проволоки, $p_{max} = 20$ МПа — предел прочности свинца. В предельном случае $\rho gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 180$ м.

8.25. Для измерения глубины моря с парохода спустили гирю на стальном тросе. Какую наибольшую глубину l можно измерить таким способом? Плотность морской воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Массой гири по сравнению с массой троса пренебречь.

Решение.

На трос действует сила тяжести, направленная вниз, и сила Архимеда, направленная вверх, поэтому (см. задачу 8.22) $\frac{mg - F_A}{S} \le p_{max}$. Масса троса $m = \rho_ж V = \rho_ж lS$, а сила Архимеда равна весу воды, вытесненной тросом, т.е. $F_A = \rho_т gV = \rho_т glS$. Тогда в предельном случае имеем $(\rho_ж - \rho_т)gl = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{(\rho_ж - \rho_т)g} = 11{,}9$ км.

8.26. С крыши дома свешивается стальная проволока длиной $l = 40$ м и диаметром $d = 2$ мм. Какую нагрузку F может выдержать эта проволока? На сколько удлинится эта проволока, если на ней повиснет человек массой $m = 70$ кг? Будет ли наблюдаться остаточная деформация, когда человек отпустит проволоку? Предел упругости стали $p = 294$ МПа.

Решение:

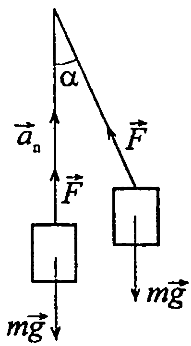
Чтобы проволока выдержала нагрузку, т.е. не разорвалась, необходимо выполнение условия: $\frac{m_0 g + F}{S} \le p_{max}$, где $m_0 = \rho V = \rho lS$ — масса проволоки, $p_{max} = 785$ МПа — предел прочности стали. Площадь поперечного сечения проволоки $S = \frac{\pi d^2}{4}$, тогда в предельном случае имеем $\frac{\rho l \pi d^2 g + 4F}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда максимальная нагрузка, которую выдерживает проволока: $F = \frac{(p_{max} - \rho l g)\pi d^2}{4} = 2{,}45$ кН.

Если на проволоке повиснет человек, то по закону Гука

$\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{E}$, где $E = 216$ ГПа — модуль Юнга стали, $p=\frac{(m_0+m)g}{S}=\frac{(\rho l\pi d+4m)g}{\pi d^2}=221\,\text{МПа}$ — суммарное давление человека и собственного веса проволоки. Тогда удлинение проволоки $\Delta l=\frac{pl}{E}=4\,\text{см}$. Поскольку $p<p_н$, где $p_н=294\,\text{МПа}$ — предел прочности стали, то остаточная деформация наблюдаться не будет.

8.27. К стальной проволоке радиусом $r = 1$ мм подвешен груз массой $m = 100$ кг. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия?

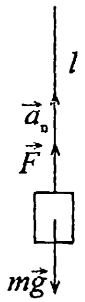
Решение:



На проволоку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}$. По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия $F - mg = ma_n$, где a_n — нормальное ускорение. В стартовом положении, при отклонении на угол α, нормальное ускорение $a_n = 0$, тогда $F\cos\alpha - mg = 0$, откуда $F=\frac{mg}{\cos\alpha}$. Проволока разорвется, если $\frac{F}{S}\ge p_{max}$, где $S=\pi r^2$ — площадь поперечного сечения проволоки, p_{max} — предел прочности стали. Следовательно, в предельном случае имеем $\frac{mg}{\pi r^2\cos\alpha}=p_{max}$, откуда $\cos\alpha=\frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}$, следовательно, наибольший угол $\alpha=\arccos\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}\right)=75{,}5°$.

8.28. К железной проволоке длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 1$ мм привязана гиря массой $m = 1$ кг. С какой частотой n можно равномерно вращать в вертикальной плоскости такую проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась?

Решение:



Проволока будет максимально удлиняться в крайнем нижнем положении, т.е. сила тяжести в любой точке всегда направлена вертикально вниз. Следовательно, для крайнего нижнего положения по второму закону Ньютона имеем $F - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \frac{v^2}{l}$ — нормальное ускорение. Линейная скорость вращения гири $v = \frac{2\pi l}{T} = 2l\pi n$, где T и n соответственно период и частота вращения гири, тогда нормальное ускорение $a_n = 4l\pi^2 n^2$ — (2). Из уравнений (1) и (2) сила упругости проволоки $F = m\left(g + 4l\pi^2 n^2\right)$. Чтобы проволока не разорвалась, необходимо, чтобы $\frac{F}{S} \le p_{max}$, или, в предельном случае, $\frac{4m\left(g + 4\pi^2 n^2 l\right)}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда частота вращения гири $n = \sqrt{\frac{p_{max}\pi d^2 - 4mg}{16\pi^2 lm}} = 3{,}4$ Гц.

8.29. Однородный медный стержень длиной $l = 1$ м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. При какой частоте вращения стержень разорвется?

Решение:

На стержень действует центробежная сила $F = \int_0^l r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm, до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Тогда $F = \omega^2 \rho S \int_0^l r dr$ или, после интегрирования, $F = \dfrac{\rho S \omega^2 l^2}{2}$. Поскольку $\omega = 2\pi n$, то предельная частота вращения $n = \dfrac{1}{\pi l}\sqrt{\dfrac{F}{2\rho S}} = 38$ об/с.

8.30. Однородный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Стержень разрывается, когда скорость конца стержня достигает $v = 380$ м/с. Найти предел прочности p материала стержня. Плотность материала стержня $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:

Центробежная сила, действующая на стержень, в данном случае $F = \int_0^{\frac{l}{2}} r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Произведя интегрирование, получим $F = \dfrac{\rho S \omega^2 l^2}{8}$. Угловая и линейная скорости вращения связаны соотношением $v = \omega \dfrac{l}{2}$, тогда $F = \dfrac{\rho S v^2}{2}$. Стержень разорвется, если $\dfrac{F}{S} \geq p_{max}$, тогда предел прочности материала стержня $p_{max} = \dfrac{\rho v^2}{2} = 570$ МПа.

8.31. К стальной проволоке длиной $l = 1$ м и радиусом $r = 1$ мм подвесили груз массой $m = 100$ кг. Найти работу A растяжения проволоки.

Решение:

Согласно закону Гука относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$, откуда $F = \frac{SE}{l}\Delta l$ — (1). Для сил упругости имеем $F = k\Delta l$. Тогда коэффициент упругости $k = \frac{SE}{l}$. Отсюда работа $A = k\frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{SE(\Delta l)^2}{2l}$ — (2). Поскольку растягивающая сила $F = mg$, то из (1) $\Delta l = \frac{mgl}{SE}$, где $S = \pi r^2$. Тогда из (2) $A = \frac{m^2 g^2 l}{2\pi r^2 E}$. Подставляя числовые данные, получим $A = 0{,}706$ Дж.

8.32. Из резинового шнура длиной $l = 42$ см и радиусом $r = 3$ мм сделана рогатка. Мальчик, стреляя из рогатки, растянул резиновый шнур на $\Delta l = 20$ см. Найти модуль Юнга для этой резины, если известно, что камень массой $m = 0{,}02$ кг, пущенный из рогатки, полетел со скоростью $v = 20$ м/с. Изменением сечения шнура при растяжении пренебречь.

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия упругого взаимодействия переходит в кинетическую энергию камня, т.е. $W_п = W_к$. Потенциальная энергия упругого взаимодействия $W_п = \frac{\beta(\Delta l)^2}{2}$, а кинетическая энергия камня $W_к = \frac{mv^2}{2}$, тогда $\frac{\beta(\Delta l)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда коэффициент жесткости резины $\beta = \frac{mv^2}{(\Delta l)^2}$, тогда по закону

Гука сила упругости резины $F=\beta\Delta l=\dfrac{mv^2}{\Delta l}$. Предел упругости $p_н=\dfrac{F}{S}=\dfrac{mv^2}{\pi r^2\Delta l}$ — (1). С другой стороны, из закона Гука $\dfrac{\Delta l}{l}=\dfrac{p_н}{E}$, предел упругости резины $p_н=\dfrac{E\Delta l}{l}$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2), тогда $\dfrac{mv^2}{\pi r^2\Delta l}=\dfrac{E\Delta l}{l}$, откуда модуль Юнга резины равен $E=\dfrac{mv^2 l}{\pi r^2(\Delta l)^2}=2{,}97$ МПа.

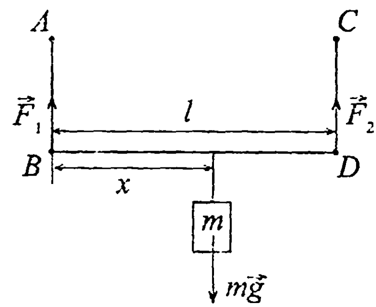
8.33. Имеется резиновый шланг длиной $l=50$ см и внутренним диаметром $d_1=1$ см. Шланг натянули так, что его длина стала на $\Delta l=10$ см больше. Найти внутренний диаметр d_2 натянутого шланга, если коэффициент Пуассона для резины $\sigma=0{,}5$.

Решение:

При растяжении внутренний диаметр шланга уменьшится на $\Delta d=\beta d_1\dfrac{F}{S}$. Согласно закону Гука $\dfrac{\Delta l}{l}=\alpha p_н=\alpha\dfrac{F}{S}$, откуда $\dfrac{F}{S}=\dfrac{\Delta l}{\alpha l}$. Тогда $\Delta d=\beta d_1\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\Delta l}{l}=\dfrac{\sigma d_1\Delta l}{l}$. Поскольку $d_2=d_1-\Delta d$, следовательно, $d_2=d_1\left(1-\dfrac{\sigma\Delta l}{l}\right)=9\cdot10^{-3}$ м.

8.34. На рис. AB — железная проволока, CD — медная проволока такой же длины и с таким же поперечным сечением, BD — стержень длиной $l=80$ см. На стержень подвесили груз массой $m=2$ кг. На каком расстоянии x от точки B надо его подвесить, чтобы стержень остался горизонтальным?

Решение:



Чтобы стержень остался горизонтальным, необходимо, чтобы моменты сил упругости F_1 и F_2 относительно точки подвеса груза были равны по величине, т.е. $F_1 x = F_2(l - x)$ — (1). Из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_н}{E}$. При равных длинах и деформациях железной и медной проволоки имеем $\frac{p_{н1}}{E_1} = \frac{p_{\cdot 2}}{E_2}$, где E_1 и E_2 — модули Юнга соответственно железа и меди. Т. к. площади поперечных сечений железной и медной проволоки равны, то $\frac{p_{\cdot 1}}{p_{\cdot 2}} = \frac{F_1}{F_2}$ или $\frac{F_1}{E_1} = \frac{F_2}{E_2}$ — (1). Из уравнений (1) и (2) имеем $\frac{l - x}{x} = \frac{E_1}{E_2}$, откуда расстояние

$$x = \frac{E_2 l}{E_1 + E_2} = 0{,}3 \text{ м}.$$

8.35. Найти момент пары сил M, необходимый для закручивания проволоки длиной $l = 10$ см и радиусом $r = 0{,}1$ мм на угол $\varphi = 10'$. Модуль сдвига материала проволоки $N = 4{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

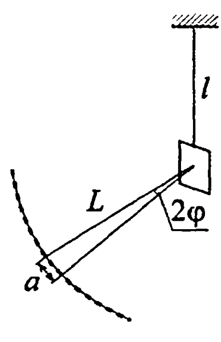
Решение:

Для закручивания проволоки на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил, называемый закручивающим моментом $M = \frac{\pi N r^4}{2l}\varphi$, где l — длина проволоки, r — радиус ее сечения, φ — угол поворота, измеряемый в радианах. Для перевода угла φ в радианную меру решим две пропорции: если $\begin{cases} 1^o - 60', \\ x^o - 10', \end{cases}$ то $x = 0{,}167°$; если $\begin{cases} 180° - \pi \\ 0{,}167° - x \end{cases}$ (в радианах), то $x = 0{,}003$ рад. Произведя вычисления, получим $M = 2{,}26 \cdot 10^{-7}$ Н·м.

8.36. Зеркальце гальванометра подвешено на проволоке длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 0{,}01$ мм. Найти закручивающий момент M, соответствующий отклонению зайчика на величину $a = 1$ мм по шкале, удаленной на расстояние $L = 1$ м от зеркальца. Модуль сдвига материала проволоки $N = 4 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение:

Имеем $M = \dfrac{\pi N d^4}{2l \cdot 16}\varphi$. При повороте зеркальца гальванометра на угол φ отраженный луч повернется на угол 2φ, при этом $tg 2\varphi = \dfrac{a}{L}$. Поскольку угол φ мал, то $tg\varphi \approx \varphi$, следовательно, $\varphi = \dfrac{a}{2L}$.



Тогда $M = \dfrac{\pi N d^4 a}{64 \cdot lL} = 1{,}96 \cdot 10^{-13}$ Н·м.

8.37. Найти потенциальную энергию W проволоки длиной $l = 5$ см и диаметром $d = 0{,}04$ мм, закрученной на угол $\varphi = 10'$. Модуль сдвига материала проволоки $N = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение:

При повороте проволоки на угол $d\varphi$ совершается работа $dA = Md\varphi$, где M — закручивающий момент. За счет этой работы закрученная проволока приобретает потенциальную энергию W. Поскольку закручивающий момент $M = \frac{\pi N r^4 \varphi}{2l}$, то $W = A = \frac{\pi N r^4}{2l}\int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{\pi N r^4 \varphi^2}{4l}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}25 \cdot 10^{-12}$ Дж.

8.38. При протекании электрического тока через обмотку гальванометра на его рамку с укрепленным на ней зеркальцем действует закручивающий момент $M = 2 \cdot 10^{-13}$ Н·м. Рамка при этом поворачивается на малый угол φ. На это закручивание идет работа $A = 8{,}7 \cdot 10^{-16}$ Дж. На какое расстояние a переместится зайчик от зеркальца по шкале, удаленной на расстояние $L = 1$ м от гальванометра?

Решение:

При повороте рамки на угол $d\varphi$ совершается работа пары сил $2dA = Md\varphi$, где M — закручивающий момент. Тогда полная работа $2A = \int_0^{\varphi} Md\varphi = M\varphi$, откуда $\varphi = \frac{2A}{M}$ — (1). Перемещение зайчика по шкале равно длине дуги окружности радиусом $R = l$, соответствующей углу φ, тогда $a = L \cdot tg 2\varphi \approx L \cdot 2\varphi$, т. к. по условию угол φ — малый. Тогда, с учетом (1), $a = \frac{4LA}{M} = 17{,}4$ мм.

8.39. Найти коэффициент Пуассона σ, при котором объем проволоки при растяжении не меняется.

Решение:

Первоначальный объем проволоки $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. После растяжения ее объем стал $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2 (l + \Delta l)$. Поскольку объем при растяжении не изменился, то $\pi r^2 l = \pi (r - \Delta r)^2 (l + \Delta l)$; $\pi r^2 l = \pi (r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2)(l + \Delta l)$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, тогда, раскрывая скобки, получим $r^2 l = r^2 l - 2r\Delta r l + r^2 \Delta l - 2r\Delta r \Delta l$. Отсюда, пренебрегая величиной $2r\Delta r\Delta l$, получим $\frac{\Delta r l}{r\Delta l} = \frac{1}{2}$. Коэффициент Пуассона $\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta r l}{r\Delta l}$, следовательно, $\sigma = 0.5$.

8.40. Найти относительное изменение плотности цилиндрического медного стержня при сжатии его давлением $p_н = 9.8 \cdot 10^7$ Па. Коэффициент Пуассона для меди $\sigma = 0,34$.

Решение:

Плотность несжатого стержня $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$, где первоначальный объем $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. Плотность сжатого стержня $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$, где $V_2 = \pi (r + \Delta r)^2 (l - \Delta l)$. Тогда изменение плотности $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; $\Delta\rho = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$.

Т. к. изменение объема очень мало, то можно принять приближенно $V_2 V_1 = V_1^2$. Тогда $\Delta\rho = \frac{m\Delta V}{V_1^2}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1}$.

Изменение объема равно $\Delta V = \pi r^2 l - \pi (r + \Delta r)^2 (l - \Delta l)$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V = \pi r^2 l - $ $- \pi\left[(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2)(l - \Delta l)\right]$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V = \pi r^2 l - \pi \times$

$\times\left(r^2l+2r\Delta rl-r^2\Delta l-2r\Delta r\Delta l\right)$; $\Delta V=\pi r^2l-\pi r^2l\times$ $\times\left(1+\frac{2\Delta r}{r}-\frac{\Delta l}{l}-\frac{2\Delta r\Delta l}{rl}\right)$. Величина $\frac{2\Delta r\Delta l}{rl}$ очень мала, ею также можно пренебречь, тогда $\Delta V=\pi r^2l\left(\frac{\Delta l}{l}-\frac{2\Delta r}{r}\right)$; $\Delta V=\pi r^2l\frac{\Delta l}{l}\left(1-\frac{2\Delta rl}{r\Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2l=V_1$, а $\frac{\Delta rl}{r\Delta l}=\sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V=V_1\frac{\Delta l}{l}(1-2\sigma)$. Отсюда отношение $\frac{\Delta\rho}{\rho_1}=\frac{\Delta V}{V_1}=$ $=\frac{\Delta l}{l}(1-2\sigma)$. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l}=\frac{p}{E}$, где E — модуль Юнга, для меди $E=118$ ГПа. Тогда $\frac{\Delta\rho}{\rho_1}=\frac{p}{E}(1-2\sigma)$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{\Delta\rho}{\rho_1}=0{,}027\,\%$.

8.41. Железная проволока длиной $l=5$ м висит вертикально. На сколько изменится объем проволоки, если к ней привязать гирю массой $m=10$ кг? Коэффициент Пуассона для железа $\sigma=0{,}3$.

Решение:

Первоначальный объем проволоки $V_1=Sl=\pi r^2l$. После того как к ней привязали гирю, проволока вытянулась и ее объем стал $V_2=\pi(r-\Delta r)^2(l+\Delta l)$. Изменение объема $\Delta V=\pi(r-\Delta r)^2(l+\Delta l)-\pi r^2l$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V=\pi\left[\left(r^2-2r\Delta r+\Delta r^2\right)(l+\Delta l)\right]-\pi r^2l$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V=\pi\left(r^2l-2r\Delta rl+r^2\Delta l+2r\Delta r\Delta l\right)-\pi r^2l$;

$\Delta V = \pi r^2 l\left(1 - \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta r \Delta l}{rl}\right) - \pi r^2 l$. Величина $\frac{2\Delta r \Delta l}{rl}$ очень мала, ею также можно пренебречь, следовательно, $\Delta V = \pi r^2 l\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{2\Delta r}{r}\right)$ или $\Delta V = \pi r l \frac{\Delta l}{l}\left(1 - \frac{2\Delta r l}{r \Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2 l = V_1$, а $\frac{\Delta r l}{r \Delta l} = \sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V = V_1 \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{P_t}{E}$, где E — модуль Юнга, для железа $E = 196$ ГПа. Нормальное напряжение равно $P_t = \frac{F}{S}$, где растягивающая сила $F = mg$. Тогда $\Delta V = Sl\frac{mg}{SE}(1 - 2\sigma) = \frac{lmg}{E}(1 - 2\sigma)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta V = 1$ мм^3.