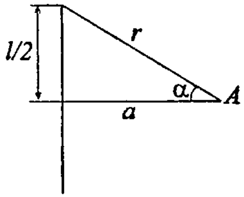
9.29. Показать, что электрическое поле, образованное заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

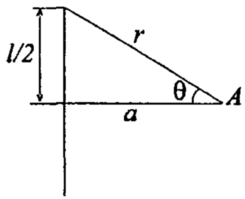
Решение:



Напряженность поля нити конечной длины $E = \dfrac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Из рисунка найдем $\sin\alpha = \dfrac{l/2}{\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $E = \dfrac{\tau \cdot l}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (3). а) Если $a \ll l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx \dfrac{l}{2}$. В этом случае формула (3) дает $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — напряженность поля бесконечно длинной нити. б) Если $a \gg l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx a$. Т. к. $\tau \cdot l = q$, то формула (3) дает $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$ — напряженность поля точечного заряда.

9.30. Длина заряженной нити $l = 25$ см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к середине нити электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 0{,}05$. Указание: допускаемая ошибка $\delta = \dfrac{(E_2 - E_1)}{E_2}$, где E_2 — напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, E_1 — напряженность поля нити конечной длины.

Решение:



Бесконечно длинная заряженная нить создает электрическое поле с напряженностью $E_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Напряженность поля нити конечной длины $E_2 = \dfrac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = 1 - \sin\theta$, откуда $\sin\theta = 1 - \delta$. Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{2} = r\sin\theta = r(1-\delta)$, где $r = \dfrac{a}{\cos\theta} = \dfrac{a}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{a}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. Тогда $\dfrac{l}{2} = \dfrac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$, откуда предельное расстояние $a = \dfrac{l\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{2(1-\delta)} = 4{,}11$ см.

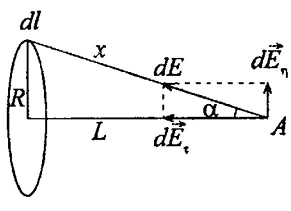
9.31. В точке A, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от бесконечно длинной заряженной нити, напряженность электрического поля $E = 150$ кВ/м. При какой предельной длине l нити найденное значение напряженности будет верным с точностью до 2%, если точка A расположена на нормали к середине нити? Какова напряженность E электрического поля в точке A, если длина нити $l = 20$ см? Линейную плотность заряда на нити конечной длины считать равной линейной плотности заряда на бесконечно длинной нити. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение:

Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче: $\dfrac{l}{2} = \dfrac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. По условию $\delta = 0{,}02$, тогда предельное значение $l = \dfrac{2a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 0{,}49$ м. Напряженность поля в точке A при $l = 0{,}2$ м найдем по формуле $E' = \dfrac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Линейную плотность заряда τ найдем из уравнения $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$, откуда $\tau = E 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a = 0{,}42$ мкКл/м. Значение $\sin\theta$ (см. рисунок к предыдущей задаче) найдем, вычислив $tg\theta = \dfrac{l}{2a}$, откуда $tg\theta = 2$, следовательно, $\theta \approx 63°$; $\sin\theta = 0{,}89$. Подставляя числовые данные в (1), найдем $E' = 134$ кВ/м.

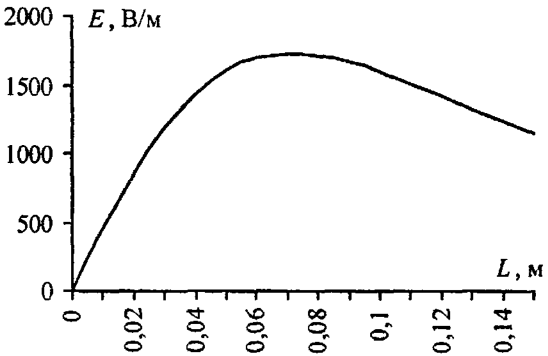
9.32. Кольцо из проволоки радиусом $R = 10$ см имеет отрицательный заряд $q = -5$ нКл. Найти напряженности E электрического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстояниях L, равных 0, 5, 8, 10 и 15см. Построить график $E = f(L)$. На каком расстоянии L от центра кольца напряженность E электрического поля будет иметь максимальное значение?

Решение:



Возьмем элемент кольца dl. Этот элемент имеет заряд dq. Напряженность электрического поля, созданная этим элементом в точке A, будет $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Вектор $d\vec{E}$ направлен по линии x, соединяющей точку A с элементом кольца dl. Для нахождения напряженности поля всего кольца надо векторно сложить $d\vec{E}$ от всех элементов. Вектор dE можно разложить на две составляющие dE_n и dE_τ. Составляющие dE_n

каждых двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $E = \int dE_\tau$. Но $dE_\tau = dE\cos\alpha = dE\frac{L}{x} = \frac{Ldq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$, что дает $E = \frac{L}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3} \times \int dq = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$. Учитывая, что $x = \sqrt{R^2 + L^2}$, имеем $E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$ — (1) — напряженность электрического поля на оси кольца. Если $L \gg R$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$, т. е. на больших расстояниях заряженное кольцо можно рассматривать как точечный заряд.



Выразим величины x и L через угол α. Имеем $R = x\sin\alpha$, $L = x\cos\alpha$; теперь формула (1) примет вид $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$. Для нахождения максимального значения напряженности E возьмем производную $\frac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее к нулю: $\frac{dE}{d\alpha} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\left(\cos^2\alpha \, 2\sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$ или $tg^2\alpha = 2$. Тогда напряженность электрического поля имеет максимальное значение в точке A, расположенной на расстоянии $L = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 7{,}1$ см от центра кольца. Подставляя в (1) числовые данные, составим таблицу и построим график.

L, м	0	0,05	0,08	0,1	0,15
E, В/м	0	1600	1710	1600	1150

9.33. Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии $0{,}5L$ от центра кольца, будет меньше максимального значения напряженности?

Решение:

Воспользуемся результатами задачи 9.32. Напряженность электрического поля на оси кольца $E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Максимальное значение напряженность поля имеет при $L_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Отсюда $E_{max} = \frac{Rq}{\sqrt{2} \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$. В точке, расположенной на расстоянии $0{,}5L_{max}$ от центра кольца, напряженность $E_{max} = \frac{Rq}{2\sqrt{2} \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

отсюда $\frac{E_{max}}{E} = 1{,}3$.

9.34. Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечной заряженной плоскости; б) точечного заряда.

Решение:

Напряженность электрического поля заряженного диска $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}\right)$. а) Если величина $a << R$, то $1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}} \approx 1$. В этом случае $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, т. е. для точек, находящихся на близком расстоянии от диска, диск можно уподобить бесконечно протяженной плоскости. б) Если $a >> R$, и $\sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2} = 1 - \frac{R^2}{2a^2}$. В этом случае $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \times \frac{R^2}{2a^2}$. Т. к. $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$, т. е. для точек, находящихся на большом расстоянии от диска, диск можно уподобить точечному заряду.

9.35. Диаметр заряженного диска $D = 25$ см. При каком предельном расстоянии a от диска по нормали к его центру электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно протяженной плоскости? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 0{,}05$. Указание: допускаемая ошибка $\delta = (E_2 - E_1)/E_2$, где E_1 — напряженность поля бесконечно протяженной плоскости, E_2 — напряженность поля диска.

Решение:

Напряженность поля диска $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right)$ — (1).

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2}$ — (3).

Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$ или

$\delta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}$. Откуда $\left(\dfrac{R}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{\delta^2} - 1$; $\dfrac{R}{a} = \dfrac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$.

$a = \dfrac{\delta R}{\sqrt{1-\delta^2}}$. Подставляя числовые данные, получим предельное расстояние $a = 1{,}2$ см.

9.36. Требуется найти напряженность E электрического поля в точке A, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от заряженного диска по нормали к его центру. При каком предельном радиусе R диска поле в точке A не будет отличаться более чем на 2% от поля бесконечно протяженной плоскости? Какова напряженность E поля в точке A, если радиус диска $R = 10a$? Во сколько раз найденная напряженность в этой точке меньше напряженности поля бесконечно протяженной плоскости?

Решение:

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью, $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Напряженность поля заряженного диска радиусом R в точке A: $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$. По условию $\dfrac{E_1 - E_2}{E_1} = 0{,}02$. Подставив выражения E_1 и E_2, получим $\dfrac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = 0{,}02$. После несложных вычислений найдем $R = 2{,}5$ м. При $R = 10a$ напряженность поля в точке A $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{100a^2+a^2}}\right) = 0{,}9\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\dfrac{E_1}{E_2} = 1{,}1$*.

---

* По мнению авторов, в условии задачи не хватает данных для нахождения величины напряженности E поля в точке A при радиусе диска $R = 10a$.

9.37. Два параллельных разноименно заряженных диска с одинаковой поверхностной плотностью заряда на них расположены на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Какой предельный радиус R могут иметь диски, чтобы между центрами дисков поле отличалось от поля плоского конденсатора не более чем на 5%? Какую ошибку δ мы допускаем, принимая для этих точек напряженность поля равной напряженности поля плоского конденсатора при $\frac{R}{d} = 10$?

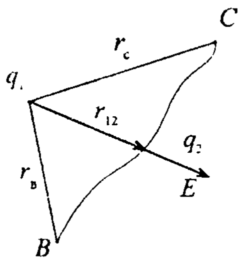
Решение:

Напряженность поля между центрами двух разноименно заряженных дисков $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$ — (1), где d — расстояние между дисками. Напряженность плоского конденсатора $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). По условию отношение $\frac{E_2 - E_1}{E_2} = 0{,}05$ — (3). Подставляя уравнения (1) и (2) в (3), получим $\frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} = 0{,}05$. Отсюда $R = 0{,}2$ м. Теперь определим ошибку δ при $\frac{R}{d} = 10$. Т. к. $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}$, то при $R = 10d$ — $\delta = 0{,}1$ или $\delta = 10\,\%$.

9.38. Шарик массой $m = 40$ мг, имеющий положительный заряд $q = 1$ нКл, движется со скоростью $v = 10$ см/с. На какое расстояние r может приблизиться шарик к положительному точечному заряду $q_0 = 1{,}33$ нКл?

Решение:

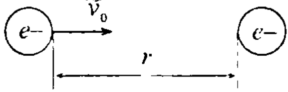
Если в поле неподвижного заряда q_1 происходит медленное перемещение заряда q_2 из точки B в точку C, то работа сил поля $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right)$.



Если $r_B \to \infty$, то $r_C = r_{12}$ и $A = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$ (т. е. появился знак «минус»). Работа консервативных сил электрического поля равна убыли потенциальной энергии системы заряженных тел, т. е. $A = -(U_{12} - U_\infty)$. Поэтому полагая энергию взаимодействия бесконечно удаленных зарядов равной нулю, получим для потенциальной энергии взаимодействия системы двух зарядов $U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}$. Во время движения шарика его кинетическая энергия $W_{к1} = \frac{mv^2}{2}$, при приближении к заряду q_2 на предельное расстояние r_{12} кинетическая энергия $W_{к2} = 0$. Работа $A_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$; $A = W_{к1} - W_{к2} = -\frac{mv^2}{2}$. Таким образом, $\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $r_{12} = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}$; $r_{12} = r = 6$ см.

9.39. До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v_0 = 10^6$ м/с?

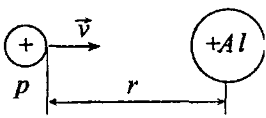
Решение:



Т. к. v_0 — относительная скорость движения электронов, то один электрон можно считать неподвижным, а другой — движущимся относительно первого со скоростью v_0. По формуле потенциала поля точечного заряда потенциал поля, создаваемого электроном, который мы считаем неподвижным, на расстоянии r от него $\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = mv_0^2/2$ тратится на работу против кулоновской силы отталкивания $A = e\varphi = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии $W_к = A$ или $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2} =$ $= 5 \cdot 10^{-10}$ м.

9.40. Протон (ядро атома водорода) движется со скоростью $v = 7{,}7 \cdot 10^6$ м/с. На какое наименьшее расстояние r может приблизиться протон к ядру атома алюминия? Заряд ядра атома алюминия $q = Ze$, где Z — порядковый номер атома в таблице Менделеева и e — заряд протона, равный по модулю заряду электрона. Массу протона считать равной массе атома водорода. Протон и ядро атома алюминия считать точечными зарядами. Влиянием электронной оболочки атома алюминия пренебречь.

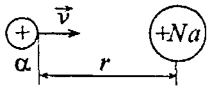
Решение:



Ядро атома алюминия считаем неподвижным. Т. к. по условию ядро алюминия — точечный заряд, то потенциал поля ядра алюминия $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2} = 6{,}1 \cdot 10^{-14}$ м.

9.41. При бомбардировке неподвижного ядра натрия α-частицей сила отталкивания между ними достигла значения $F = 140$ Н. На какое наименьшее расстояние r приблизилась α-частица к ядру атома натрия? Какую скорость v имела α-частица? Влиянием электронной оболочки атома натрия пренебречь.

Решение:



Потенциал поля ядра натрия (см. задачу 9.40) $\varphi = \dfrac{Z_1 e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. По закону Кулона сила отталкивания между ядром натрия и α-частицей $F = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где $Z_2 = 2$, т. к. α-частица представляет собой ядро атома гелия. Отсюда минимальное расстояние сближения ядра и α-частицы $r = \dfrac{e}{2}\sqrt{\dfrac{Z_1 Z_2}{\pi\varepsilon_0 F}} = 6{,}01 \cdot 10^{-15}$ м. По закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{Z_1 e^2}{4\pi e_0 r}$, откуда скорость α-частицы $v = \sqrt{\dfrac{e^2 Z_1}{2\pi\varepsilon_0 r m}} = 1{,}59 \cdot 10^7$ м/с.

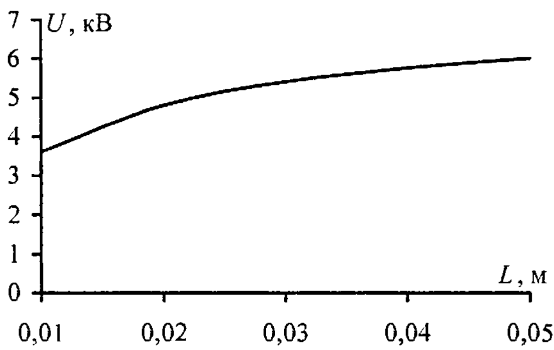
9.42. Два шарика с зарядами $q_1 = 6{,}66$ нКл и $q_2 = 13{,}33$ нКл находятся на расстоянии $r_1 = 40$ см. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$ см?

Решение:

Энергия электростатического взаимодействия шариков $W = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Для сближения шариков нужно совершить работу $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Поскольку $W_1 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$, а $W_2 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}$, то $A = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) = 1{,}2$ мкДж.

9.43. Шар радиусом $R = 1$ см, имеющий заряд $q = 40$ нКл, помещен в масло. Построить график зависимости $U = f(L)$ для точек поля, расположенных от поверхности шара на расстояниях L, равных 1, 2, 3, 4 и 5см.

Решение:



Будем считать, что заряд q равномерно распределен по поверхности шара. Разность потенциалов $U = \varphi_0 - \varphi_1$, где φ_0 — потенциал шара на его поверхности, φ_1 — потенциал поля в точке, находящейся на расстоянии L от поверхности шара; $\varphi_0 = \int\limits_R^\infty E_r dr = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$. Аналогично $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+L)}$, отсюда $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+L}\right)$.

Характер зависимости $U(L)$ дан на графике.

L, м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
U, кВ	3,6	4,8	5,4	5,76	6

9.44. Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $r = 10$ см от центра заряженного шара радиусом $R = 1$ см. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность заряда на шаре $\sigma = 0,1$ мкКл/м^2; б) задан потенциал шара $\varphi = 300$ В.

Решение:

Имеем $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ (см. задачу 9.43). а) Поскольку $q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$, то $\varphi = \dfrac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 11,3$ В. б) Потенциал шара $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$, откуда $q = 4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $\varphi = \dfrac{4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{\varphi_0 R}{r}$; $\varphi = 30$ В.

9.45. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда $q = 20$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности шара радиусом $R = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$ мкКл/м^2?

Решение:

Работа по перемещению точечного заряда q из бесконечности в некоторую точку M есть потенциал точки M, следовательно, $A = \varphi_M = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R+r)}$. Поскольку $q_0 = \sigma 4\pi R^2$, то $A = \dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R+r)}$; $A = 113$ мкДж.

9.46. Шарик с массой $m = 1$ г и зарядом $q = 10$ нКл перемещается из точки 1, потенциал которой $\varphi_1 = 600$ В, в точку 2, потенциал которой $\varphi_2 = 0$. Найти его скорость v_1 в точке 1, если в точке 2 она стала равной $v_2 = 20$ см/с.

Решение:

Работа по перемещению шарика из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. С другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии: $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Следовательно, $q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$. Отсюда $v_1 = \sqrt{v_2^2 - \frac{2q(\varphi_1 - \varphi_2)}{m}}$; $v_1 = 16,7$ см/с.

9.47. Найти скорость v электрона, прошедшего разность потенциалов U, равную: 1, 5, 10, 100, 1000 В.

Решение:

Работа по перемещению электрона из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{U}{q}$, с другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Если $v_1 = 0$, то $A = \frac{mv_2^2}{2}$. Тогда $U = \frac{mv_2^2}{2e}$, где e — заряд электрона, m — его масса (см. таблицу 3), откуда $v_2 = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$. Составим таблицу искомых значений.

U, В	1	5	10	100	1000
v, 10^6 м/с	0,59	1,33	1,88	5,93	18,75

9.48. При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает α-частица со скоростью $v = 1{,}6 \cdot 10^7$ м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ α-частицы и разность потенциалов U поля, в котором можно разогнать покоящуюся α-частицу до такой же скорости.

Решение:

Кинетическая энергия α-частицы $W_к = \frac{m_\alpha v^2}{2}$. Учитывая, что $m_\alpha = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг, получим $W_к = 8{,}5 \times$ $\times 10^{-13}$ Дж. Искомая разность потенциалов $U = \frac{W_к}{q}$ (см. задачу 9.47). Поскольку заряд α-частицы $q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} =$ $= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$, то, подставляя числовые значения, получим $U = 2{,}66$ МВ.

9.49. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $q = 0{,}66$ нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния $r_2 = 2$ см; при этом совершается работа $A = 50$ эрг. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение:

Работа по перемещению заряда $dA = qdU$, где $dU =$ $= -Edr = \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Отсюда $A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{r_1}{r_2}$, откуда $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1 / r_2)}$ — (1). Подставляя числовые данные, получим $\tau = 0{,}6$ мкКл/м.

9.50. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 1$ см от нити, до точки $r_2 = 4$ см, α-частица изменила свою скорость от $v_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $v_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение:

Имеем $\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1 / r_2)}$ — (1) (см. задачу 9.49). Здесь работа сил поля A равна приращению кинетической энергии α-частицы, т. е. $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = 29{,}57 \cdot 10^{-15}$ Дж. Подставляя числовые данные в (1), найдем $\tau = 3{,}7$ мкКл/м.

9.51. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 0{,}2$ мКл/м. Какую скорость v получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния $r_1 = 1$ см до расстояния $r_2 = 0{,}5$ см?

Решение:

Если скорость электрона в точке 1 была равна нулю, то работа сил поля по перемещению электрона в точку 2: $A = \dfrac{mv^2}{2}$ — (1). Из задачи 9.49 имеем $\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1 / r_2)}$ — (2).

Подставляя (1) в (2), получим $\tau = \dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}{q\, ln(r_1 / r_2)}$, откуда

$v = \sqrt{\dfrac{\tau q\, ln(r_1 / r_2)}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 m}}$; $v = 2{,}96 \cdot 10^7$ м/с.

9.52. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд $q = 0{,}66$ нКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние $\Delta r = 2$ см; при этом совершается работа $A = 50$ эрг. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

Решение:

Переведем единицы измерения работы A в систему СИ: $A = 50\text{ эрг} = 50 \cdot 10^{-7}$ Дж. Напряженность поля бесконечно заряженной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). Кроме того, напряженность и потенциал однородного поля связаны соотношением $E = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (3). Работа сил поля $A = \dfrac{q\sigma\Delta r}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \dfrac{2A\varepsilon\varepsilon_0}{q\Delta r} = 6{,}7$ мкКл/м^2.

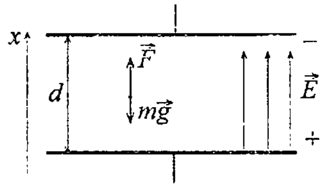
9.53. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 90$ В. Площадь каждой пластины $S = 60$ см^2, ее заряд $q = 1$ нКл. На каком расстоянии d друг от друга находятся пластины?

Решение:

Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). С другой стороны, $E = \dfrac{U}{d}$ — (2). Приравняв (1) и (2), с учетом $\sigma = \dfrac{q}{S}$, получим $\dfrac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{U}{d}$, откуда $d = \dfrac{US\varepsilon\varepsilon_0}{q} = 4{,}78$ мм.

9.54. Плоский конденсатор можно применить в качестве чувствительных микровесов. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 3{,}84$ мм, находится заряженная частица с зарядом $q = 1{,}44 \cdot 10^{-9}$ $СГС_q$. Для того чтобы частица находилась в равновесии, между пластинами конденсатора, нужно было приложить разность потенциалов $U = 40$ В. Найти массу m частицы.

Решение:



Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$. Тогда $\dfrac{Uq}{d} = mg$, откуда $m = \dfrac{Uq}{dg} =$ $= 5{,}1 \cdot 10^{-16}$ кг.

9.55. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 1$ см, находится заряженная капелька массой $m = 5 \cdot 10^{-11}$ г. В отсутствие электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 600$ В, то капелька падает вдвое медленнее. Найти заряд q капельки.

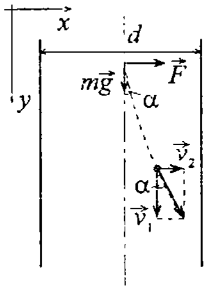
Решение:

В отсутствие электрического поля сила тяжести, действующая на капельку, уравновешивается силой сопротивления воздуха $mg = 6\pi\eta r v_1$ — (1), а при наличии поля $mg - Eq = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из (1) и (2) получим $mg - Eq =$

$= \frac{v_2}{v_1} mg$, откуда $q = \frac{mg}{E}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{mgd}{U}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = 4{,}1 \times$ $\times 10^{-18}$ Кл.

9.56. Между двумя вертикальными пластинами на одинаковом расстоянии от них падает пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка падает с постоянной скоростью $v_1 = 2$ см/с. Через какое время t после подачи на пластины разности потенциалов $U = 3$ кВ пылинка достигнет одной из пластин? Какое расстояние l по вертикали пылинка пролетит до попадания на пластину? Расстояние между пластинами $d = 2$ см, масса пылинки $m = 2 \cdot 10^{-9}$ г, ее заряд $q = 6{,}5 \cdot 10^{-17}$ Кл.

Решение:

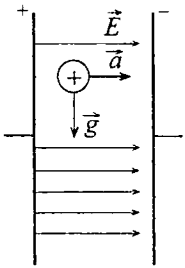


В отсутствие электрического поля $mg = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля на пылинку действует горизонтальная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, которая сообщает пылинке ускорение, но из-за сопротивления воздуха в горизонтальном направлении также установится движение с некоторой постоянной скоростью v_2, причем $qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из рисунка видно, что $tg\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{qE}{mg}$. Кроме того, отношение $\frac{v_2}{v_1} = 0{,}5\frac{d}{l}$, откуда $l = 0.5 v_1 \frac{d}{v_2} = 0.5 mg \frac{d}{qE} = 2$ см. Тогда $v_2 = \frac{v_1 d}{2l} = 1$ см/с.

Искомое время найдем по формуле $t = \frac{l}{v_1}$. Подставляя числовые данные, получим $t = 1$ с.

9.57. Решить предыдущую задачу в отсутствие силы сопротивления воздуха (вакуумный конденсатор).

Решение:



В отсутствие электрического поля и силы сопротивления воздуха пылинка движется вертикально вниз со скоростью $v_1 = gt$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. После включения электрического поля за счет подачи на пластины конденсатора разности потенциалов U на пылинку будет действовать кулоновская сила F, направленная горизонтально, $F = qE$. Т. к. напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$, то сила $F = \frac{qU}{d}$ — (1). По второму закону Ньютона $F = ma$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2): $\frac{qU}{d} = ma$, отсюда горизонтальное ускорение частицы $a = \frac{qU}{dm}$ — (3), а ее скорость $v_2 = at = \frac{qUt}{dm}$. Перемещение частицы в горизонтальном направлении $\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}$ или $d = at^2$ — (4). Решая совместно уравнения (3) и (4), найдем время движения частицы $t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{d^2 m}{qU}} = 64$ мс. Расстояние, пройденное частицей по вертикали, $l = \frac{gt^2}{2} = 2$ см.

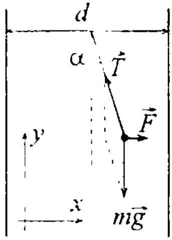
9.58. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого $d = 1$ см, находится заряженная капелька масла. В отсутствие электрического поля капелька падает с постоянной скоростью $v_1 = 0{,}11$ мм/с. Если на пластины подать разность потенциалов $U = 150$ В, то капелька падает со скоростью $v_2 = 0{,}43$ мм/с. Найти радиус r капельки и ее заряд q. Динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ Па·с; плотность масла больше плотности газа, в котором падает капелька, на $\Delta\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение:

В отсутствие электрического поля на каплю действует сила тяжести, сила Архимеда и сила внутреннего трения Стокса. Т. к. скорость капли постоянна, то $mg - F_А = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля к указанным силам добавится кулоновская сила, тогда $mg - F_А + qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). В первом приближении каплю можно считать шаром, поэтому ее объем $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а следовательно, масса $m = \rho_м V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_м$. По закону Архимеда $F_А = \rho_в V g = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_в$. Тогда уравнения (1) и (2) можно переписать следующим образом: $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho = 6\pi\eta r v_1$ — (3); $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho + \frac{qU}{d} = 6\pi\eta \times$ $\times r v_2$ — (4). Из уравнения (3) найдем радиус капли $r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2g\Delta\rho}} = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ м. Разделив (4) на (3), имеем $1 + \frac{3qU}{4\pi r^3 g\Delta\rho} = \frac{v_2}{v_1}$, отсюда заряд капли $q = \frac{4\pi r^3 g\Delta\rho}{3U} \times$ $\times \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) = 7{,}26 \cdot 10^{-18}$ Кл.

9.59. Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, на нити висит заряженный бузиновый шарик массой $m = 0{,}1$ г. После подачи на пластины разности потенциалов $U = 1$ кВ нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 10°$. Найти заряд q шарика.

Решение:



На шарик действует сила электрического поля $\vec{F} = q\vec{E}_1$ — (1), сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия: $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{T} = 0$. В проекциях на оси x и y соответственно $F - T\sin\alpha = 0$ — (2) и $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Из (3) $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, тогда из (2) $F = mg \cdot tg\alpha$ или, с учетом (1), $qE = mg \cdot tg\alpha$ — (4). Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получим $\dfrac{qU}{d} = mg \cdot tg\alpha$, откуда $q = \dfrac{dmg \cdot tg\alpha}{U} = 1{,}73$ нКл.

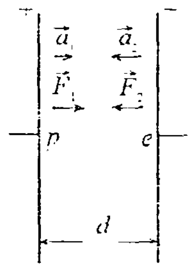
9.60. Мыльный пузырь с зарядом $q = 222$ нКл находится в равновесии в поле плоского горизонтально расположенного конденсатора. Найти разность потенциалов U между пластинами конденсатора, если масса пузыря $m = 0{,}01$ г и расстояние между пластинами $d = 5$ см.

Решение:

Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$. Тогда $\dfrac{Uq}{d} = mg$, откуда $U = \dfrac{mgd}{q} = 22$ кВ.

9.61. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см. Электрон начинает двигаться от отрицательной пластины в тот момент, когда от положительной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии l от положительной пластины встретятся электрон и протон?

Решение:

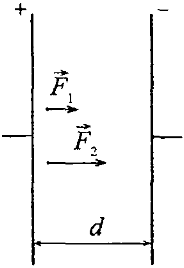


В поле плоского конденсатора на протон и электрон соответственно действуют кулоновские силы $\vec{F}_1 = e\vec{E}$ и $\vec{F}_2 = -e\vec{E}$ (силой тяжести ввиду ее малости можно пренебречь). Здесь e — элементарный заряд. Отсюда следует, что $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ или $F_1 = F_2$. В результате действия постоянной силы протон и электрон получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_e\vec{a}_2$. Поскольку $F_1 = F_2$, то $m_p a_1 = m_e a_2$. Если протон и электрон встретились через время t на расстоянии l от положительной пластины, то $a_1 = \frac{2l}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2(d-l)}{t^2}$. Тогда $\frac{m_p 2l}{t^2} = \frac{m_e 2(d-l)}{t^2}$; $m_p l = m_e(d-l)$, откуда $l = \frac{d}{m_p/m_e + 1} = 22$ мкм.

9.62. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 1$ см. От одной из пластин одновременно начинают двигаться протон и α-частица. Какое расстояние l пройдет α-частица за то время, в течение которого протон пройдет весь путь от одной пластины до другой?

Решение:

В поле плоского конденсатора на протон действует кулоновская сила $\vec{F}_1 = e\vec{E}$, на α-частицу действует кулоновская сила $\vec{F}_2 = 2e\vec{E}$, т. к. заряд α-частицы равен двум элементарным зарядам. Здесь e — элементарный за-



ряд. Отсюда следует, что $F_2 = 2F_1$ — (1). В результате действия постоянной силы протон и α-частица получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_\alpha\vec{a}_2$. С учетом (1) можно записать $m_\alpha a_2 = 2m_p a_1$. Если за время t протон прошел расстояние d, а α-частица прошла расстояние l, то $a_1 = \frac{2d}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2l}{t^2}$. Тогда $\frac{2m_\alpha d}{t^2} = \frac{4m_p l}{t^2}$, откуда $l = \frac{2m_p d}{m_\alpha} = 5$ мм.

9.63. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 5{,}3$ мм. Найти разность потенциалов U между пластинами, напряженность E электрического поля внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение:

Пройдя путь от одной пластины конденсатора до другой, электрон приобрел кинетическую энергию равную $\frac{mv^2}{2}$. Эту энергию он приобрел за счет работы сил электрического поля, которая выражается формулой $A = e \times (\varphi_2 - \varphi_1) = eU$. Тогда можно записать, что $mv^2 / 2 = eU$, откуда $U = \frac{mv^2}{2e} = 2{,}8$ В. Напряженность поля конденсатора $E = U / d = 530$ В/м. Кроме того, напряженность выражается соотношением $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = E\varepsilon\varepsilon_0 = 4{,}7$ нКл/м^2.