9.64. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 120$ В. Какую скорость v получит электрон под действием поля, пройдя по линии напряженности расстояние $\Delta r = 3$ мм?

Решение:

Для того чтобы сообщить электрону кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$, силы электрического поля должны совершить работу $A = e\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между точками, расстояние между которыми равно Δr. Напряженность поля $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$, откуда $\Delta\varphi = E\Delta r$. Тогда работа сил поля $A = eE\Delta r$ или, учитывая, что $E = \frac{U}{d}$, $A = \frac{eU\Delta r}{d}$. Поскольку $A = W_к$, то $\frac{eU\Delta r}{d} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU\Delta r}{md}} = 2{,}53 \cdot 10^6$ м/с.

9.65. Электрон в однородном электрическом поле получает ускорение $a = 10^{12}$ м/с^2. Найти напряженность E электрического поля, скорость v, которую получит электрон за время $t = 1$ мкс своего движения, работу A сил электрического поля за это время и разность потенциалов U, пройденную при этом электроном. Начальная скорость электрона $v_0 = 0$.

Решение:

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$ (силу тяжести не учитываем, поскольку для электрона $mg << eE$). Согласно второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$, откуда $E = \frac{ma}{e} = 5{,}7$ В/м. За время t

электрон приобретает скорость $v = at = 10^6$ м/с, т. е. силы электрического поля совершают работу A, равную приращению кинетической энергии электрона. $A = \frac{mv^2}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж. С другой стороны, работа сил поля $A = eU$, откуда $U = \frac{A}{e} = 2{,}8$ В.

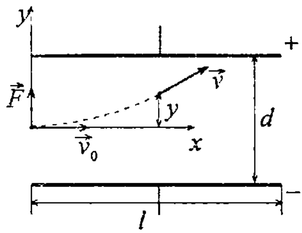
9.66. Электрон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинами $U = 3$ кВ; расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Найти силу F, действующую на электрон, ускорение a электрона, скорость v, с которой электрон приходит ко второй пластине, и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение:

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Напряженность поля $E = \frac{U}{d}$, тогда $F = \frac{eU}{d} = 9{,}6 \cdot 10^{-14}$ Н. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, откуда $a = \frac{F}{m} = 1{,}05 \cdot 10^{17}$ м/с^2. При перемещении электрона от одной пластины к другой силы поля совершают работу $A = eU$, в результате которой электрон приобретает кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$. Поскольку $A = W_к$, то $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$; $v = 3{,}24 \cdot 10^7$ м/с. Поверхностная плотность заряда $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = 5{,}3$ мКл/м^2.

9.67. Электрон с некоторой начальной скоростью v_0 влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 300$ В; расстояние между пластинами $d = 2$ см; длина конденсатора $l = 10$ см. Какова должна быть предельная начальная скорость v_0 электрона, чтобы электрон не вылетел из конденсатора? Решить эту же задачу для α-частицы.

Решение:

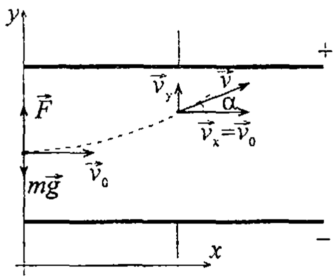


В плоском конденсаторе электрон будет двигаться по параболе подобно горизонтально брошенному телу в поле силы тяжести, на электрон в конденсаторе действует постоянная сила $\vec{F} = e\vec{E}$, под действием которой он получит ускорение $\bar{a} = \dfrac{e\vec{E}}{m}$. Пролетая длину l конденсатора за время $t = \dfrac{l}{v}$, электрон отклонится на расстояние $y = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{eEl^2}{2mv^2}$. Чтобы электрон не вылетел из конденсатора, должно выполняться условие $y \geq \dfrac{d}{2}$. Отсюда $v_0 \leq l\sqrt{\dfrac{eE}{md}}$. Подставляя числовые данные, получим для электрона $v_0 = 3{,}64 \cdot 10^7$ м/с и для α-частицы $v_0 = 6 \cdot 10^5$ м/с.

9.68. Электрон с некоторой скоростью влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/м; расстояние между пластинами $d = 4$ см.

Через какое время t после того, как электрон влетел в конденсатор, он попадет на одну из пластин? На каком расстоянии s от начала конденсатора электрон попадет на пластину, если он ускорен разностью потенциалов $U = 60$ В?

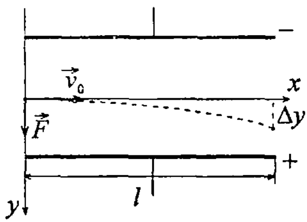
Решение:



Вдоль горизонтальной оси движение электрона будет равномерным со скоростью $v_x = v_0$, т. к. вдоль оси x на него не действуют силы. При равномерном движении координата x изменяется со временем $x = v_0 t$. Вдоль оси y на электрон действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила электростатического поля $\vec{F} = e\vec{E}$. Сила тяжести $mg = \left(9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8\right)$Н на тринадцать порядков меньше электростатической силы $F = \left(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{2}\right)$Н и ею можно пренебречь. Под действием электростатической силы движение электрона вдоль оси y будет равноускоренным, а координата y изменяется со временем по закону $y = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{m2} = \frac{eEt^2}{m2}$. Отсюда при $y = \frac{d}{2}$ имеем $t = \sqrt{\frac{dm}{eE}} \approx 48$ нс. Пройдя разность потенциалов U, электрон за счет работы A сил электростатического поля приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = eU = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Тогда через время $t = 48$ нс он упадет на пластину на расстоянии $S = v_0 t = t \times \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Подставив числовые данные, получим $S = 22$ см.

9.69. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $v_0 = 9 \times 10^6$ м/с. Разность потенциалов между пластинами $U = 100$ В; расстояние между пластинами $d = 1$ см. Найти полное a, нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения электрона через время $t = 10$ нс после начала его движения в конденсаторе.

Решение:

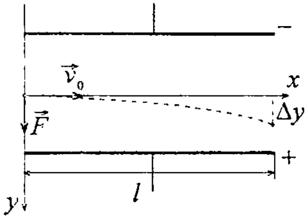


Движение электрона в электрическом поле конденсатора аналогично движению тела, брошенного горизонтально в поле силы тяжести. На электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$.

Отсюда полное ускорение электрона $a = \dfrac{eE}{m}$ или, с учетом $E = \dfrac{U}{d}$, $a = \dfrac{eU}{md} = 17{,}6 \cdot 10^{14}$ м/с^2. Через время t после начала движения его нормальное ускорение $a_n = \dfrac{av_0}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$, тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{a^2t}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$ (см. задачу 1.30). Подставляя числовые значения, получим $a_n = 8 \times 10^{14}$ м/с^2; $a_\tau = 15{,}7 \cdot 10^{14}$ м/с^2.

9.70. Протон и α-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы?

Решение:



Найдем отклонение Δy полем конденсатора для любой положительно заряженной частицы. По второму закону Ньютона кулоновская сила $\vec{F} = m\vec{a}$ или $q\vec{E} = m\vec{a}$. Пусть за время t частица пролетает по оси x расстояние l. Движение частицы по оси x — равномерное, со скоростью v_0, т. к. проекция силы $\vec{F}$ на ось x равна нулю, следовательно, $t = \frac{l}{v_0}$. Движение частицы вдоль оси y — равноускоренное под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль этой оси. Ускорение $a = \frac{qE}{m}$. Тогда $\Delta y = \frac{at^2}{2}$ или $\Delta y_2 = \frac{2eEl^2}{2m_2 v_0^2}$. Тогда $\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{m_\alpha}{2m_p} = 2$.

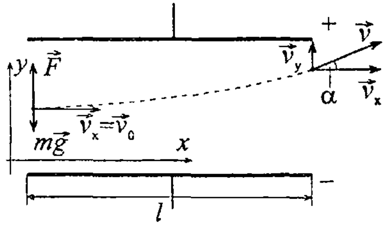
9.71. Протон и α-частица, ускоренные одной и той же разностью потенциалов, вылетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы?

Решение:
Если ускорения протона и α-частицы будут одинаковы, то и отклонение Δy у них будет одно и то же (см. задачу 9.70).

9.72. Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 10$ кВ/м; длина конденсатора $l = 5$ см. Найти модуль и направление скорости v электрона при вылете его из конденсатора.

Решение:

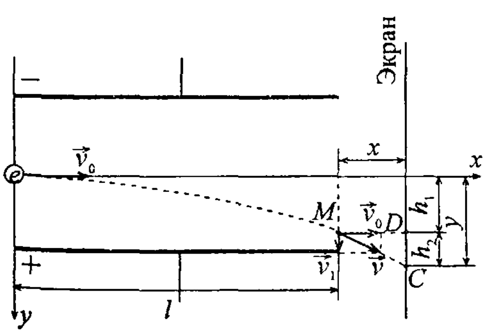
Полная скорость электрона в момент вылета из конденсатора $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, где $\vec{v}_x = \vec{v}_0$, $\vec{v}_y = \vec{a}t$. В скалярной форме $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.



Поскольку $a = \dfrac{eE}{m}$, $t = \dfrac{l}{v_0}$ (см. задачу 9.67), то $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\dfrac{eEl}{mv_0}\right)^2} = 1{,}33 \cdot 10^7$ м/с. Направление скорости v электрона определяется углом α. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_0 / v$; $\alpha \approx 41°$.

9.73. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, при прохождении через незаряженный плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на флуоресцирующем экране, расположенном на расстоянии $x = 12$ см от конца конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние $y = 3$ см. Расстояние между пластинами $d = 1{,}4$ см; длина конденсатора $l = 6$ см. Найти разность потенциалов U, приложенную к пластинам конденсатора.

Решение:



Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений: 1) по инерции вдоль оси x с постоянной скоростью v_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора; 2) равноускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью v, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора. Из рисунка видно, что $y = h_1 - h_2$, где h_1 — расстояние, на которое сместится электрон в вертикальном положении во время движения в конденсаторе; h_2 — расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости v_0, и точкой C, в которую электрон попадет в действительности. Выразим отдельно h_1 и h_2. По формуле длины пути равноускоренного движения найдем $h_1 = at^2/2$, где a — ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t — время полета электрона внутри конденсатора. По второму закону Ньютона $a = F/m_e$, где $F = eE = \dfrac{eU}{d}$ — сила, с которой поле действует на электрон. Из формулы пути равномерного движения $t = \dfrac{l}{v_0}$. Выражение скорости v_0 найдем из условия равенства работы, совершенной полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии: $\dfrac{m_e v_0^2}{2} = eU_0$. Отсюда $v_0^2 = \dfrac{2eU_0}{m_e}$ — (2).

Подставляя в формулу (1) значения a, F, t и v_0^2, получим $h_1 = \dfrac{Ul^2}{4dU_0}$. Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного: $h_2 = \frac{v_1 x}{v}$, где v_1 — скорость электрона в вертикальном положении в точке M. Скорость v_1 найдем по формуле $v_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид $v_1 = \frac{eUl}{dm_e v_0}$. Подставив выражение v_1 в формулу (3), получим $h_2 = \frac{eUlx}{dm_e v_0^2}$, или, заменив v_0^2 по формуле (3), найдем $h_2 = \frac{Ulx}{2dU_0}$. Тогда

$$y = h_1 + h_2 = \frac{Ul^2}{4DU_0} + \frac{Ulx}{2dU_0} = \frac{Ul}{2dU_0}\left(\frac{l}{2} + x\right),$$ откуда

$$U = \frac{2ydU_0}{l + (l/2 + x)};\ U = 28\ \text{В}.$$

9.74. Электрон движется в плоском горизонтально расположенном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью $v = 3{,}6 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3{,}7$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 20$ см. На какое расстояние y сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе?

Решение:

Имеем $y = \frac{eEl^2}{2m_e v^2}$ (см. задачу 9.70). $y = 0{,}01$ м.

9.75. Протон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 10$ см. Во сколько раз скорость протона v при вылете из конденсатора будет больше его начальной скорости v_0?

Решение:

Скорость протона в момент вылета равна $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, где $v_x=v_0$, $v_y=at=\dfrac{q_pEl}{m_pv_0}$ (см. задачу 9.70). Отсюда скорость

$$v=\sqrt{v_0^2+\left(\frac{q_pEl}{m_pv_0}\right)^2}=2{,}69\cdot10^5\ \text{м/с}.$$ Тогда отношение скоростей $\dfrac{v}{v_0}=2{,}24$.

9.76. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d_1=5$ мм друг от друга, приложена разность потенциалов $U=150$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка фарфора толщиной $d_2=3$ мм. Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля в воздухе и фарфоре.

Решение:

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U=\int_1^2\vec{E}d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U=E_1l_1+E_2l_2$, где $l_1=d_1-d_2$ — толщина слоя воздуха, $l_2=d_2$ — толщина слоя фарфора. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1=D_2$ и $\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2$. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1=1$, диэлектрическая пронищаемость фарфора $\varepsilon_2 = 6$. Решая систему уравнений $\begin{cases} U = E_1(d_1 - d_2) + E_2 d_2, \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \end{cases}$ получим $E_1 = \dfrac{U}{(d_1 - d_2) + \varepsilon_1 d_2 / \varepsilon_1}$; $E_1 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 60$ кВ/м и $E_2 = \dfrac{U}{\varepsilon_2 (d_1 - d_2)/\varepsilon_1 + d_2}$; $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 10$ кВ/м.

9.77. Найти емкость C земного шара. Считать радиус земного шара $R = 6400$ км. На сколько изменится ..отенциал земного шара, если ему сообщить заряд $q = 1$ Кл?

Решение:

Имеем $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Подставляя числовые данные, получим $C = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6400 \cdot 10^3 = 711$ мкФ. Если земному шару сообщить заряд $q = 1$ Кл, его потенциал увеличится на величину $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C} = 1406$ В.

9.78. Шарик радиусом $R = 2$ см заряжается отрицательно до потенциала $\varphi = 2$ кВ. Найти массу m всех электронов, составляющих заряд, сообщенный шарику.

Решение:

Емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. После зарядки до потенциала $q = \varphi C = \varphi 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Количество электронов, составляющих этот заряд, $N = \dfrac{q}{e}$ или $N = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi}{e}$. Масса всех электронов $m = N m_e = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi m_e}{e}$; $m = 2{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

9.79. Восемь заряженных водяных капель радиусом $r = 1$ см и зарядом $q = 0{,}1$ нКл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найти потенциал φ большой капли.

Решение:
Потенциал на поверхности большой шарообразной капли $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (1), где Q — заряд капли, R — ее радиус.

Потенциал на поверхности малой капли $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где q — заряд капли, r — ее радиус. Если n одинаковых капель сливаются в одну, ее заряд равен $Q = nq$. С учетом этого, разделив (1) на (2), получим $\frac{\varphi}{\varphi_0} = n\frac{r}{R}$ — (3). Объем большой капли равен сумме объемов маленьких капель: $\frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3$, откуда $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\varphi_0 = \frac{n}{\sqrt[3]{n}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 3{,}6$ кВ.

9.80. Два шарика одинаковых радиуса $R = 1$ см и массы $m = 40$ мг подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Когда шарики зарядили, нити разошлись на некоторый угол и сила натяжения нитей стала равной $T = 490$ мкН. Найти потенциал φ заряженных шариков, если известно, что расстояние от центра каждого шарика до точки подвеса $l = 10$ см.

Решение:
Задача аналогична 9.15. Шарикам сообщили заряд $q = 8l\sqrt{\pi T\varepsilon\varepsilon_0\left(1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^{\frac{3}{2}}\right)} = 21{,}7 \cdot 10^{-9}$ Кл. Потенциал шариков $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$; $\varphi = 19{,}5$ кВ.

9.81. Шарик, заряженный до потенциала $\varphi = 792$ В, имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 333$ нКл/м^2. Найти радиус r шарика.

Решение:
Потенциал шарика и его заряд связаны соотношением $q = C\varphi$, где заряд $q = \sigma \cdot 4\pi r^2$, емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$.

Иначе, $\sigma r = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $r = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 0{,}021$ м.

9.82. Найти соотношение между радиусом шара R и максимальным потенциалом φ, до которого он может быть заряжен в воздухе, если при нормальном давлении разряд в воздухе наступает при напряженности электрического поля $E_0 = 3$ МВ/м. Каким будет максимальный потенциал φ шара диаметром $D = 1$ м?

Решение:
Напряженность поля у поверхности заряженного шара равна $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$. Заряд q и потенциал φ шара связаны соотношением $q = C\varphi$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Отсюда $E = \dfrac{\varphi}{R}$. Поскольку максимального значения потенциал достигает при $E = E_0$, то $\varphi_{max} = E_0 R$ или $\varphi_{max} = 3 \cdot 10^6 R$. При диаметре шара $D = 1$ м имеем $\varphi_{max} = 1{,}5$ МВ.

9.83. Два шарика одинаковых радиуса $R = 1$ см и массы $m = 0{,}15$ кг заряжены до одинакового потенциала $\varphi = 3$ кВ и находятся на некотором расстоянии r_1 друг от друга. При этом их энергия гравитационного взаимодействия $W_{гр} = 10^{-11}$ Дж. Шарики сближаются до расстояния r_2. Работа, необходимая для сближения шариков. $A = 2\cdot10^{-6}$ Дж. Найти энергию [illegible] электростатического взаимодействия шариков после их сближения.

Решение:

До сближения шарики обладали энергией гравитационного взаимодействия $W_{гр} = Gm^2/r_1$ — (1) и энергией электрического взаимодействия $W_{эл} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$ — (2). Заряд шарика $q = C\varphi = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi$ — (3). Поскольку радиусы и потенциал шариков одинаковы, то $q_1 = q_2 = q$ и уравнение (2) с учетом (3), можно переписать $W_{эл} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2}{r_1}$. Из (1) найдем $r_1 = \dfrac{Gm^2}{W_{гр}}$. Тогда $W_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$ — (4). Для сближения шариков необходимо совершить работу A против сил поля, которая равна приращению энергии электростатического взаимодействия. $A = W'_{эл} - W_{эл}$, где $W'_{эл}$ — искомая энергия электростатического взаимодействия шариков после их сближения. Отсюда $W'_{эл} = A + W_{эл}$ или, с учетом (4), $W'_{эл} = A + \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$.

Подставляя числовые данные, получим $W'_{эл} = 2{,}67$ мкДж.

9.84. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 1\,м^2$, расстояние между ними $d = 1{,}5$ мм. Найти емкость этого конденсатора.

Решение:

Емкость плоского конденсатора определяется соотношением $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Для воздуха $\varepsilon = 1$. Подставив числовые значения, получим $C = 5{,}9$ нФ.