9.85. Конденсатор предыдущей задачи заряжен до разности потенциалов $U = 300$ В. Найти поверхностную плотность заряда σ на его пластинах.

Решение:

Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. С другой стороны, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 1{,}77$ мкКл/м^2.

9.86. Требуется изготовить конденсатор емкостью $C = 250$ пФ. Для этого на парафинированную бумагу толщиной $d = 0{,}05$ мм наклеивают с обеих сторон кружки станиоля. Каким должен быть диаметр D кружков станиоля?

Решение:

Емкость конденсатора выражается формулой $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, где $S = \pi\frac{D^2}{4}$. Т. е. $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \pi D^2}{4d}$. Отсюда $D = \sqrt{\frac{4Cd}{\varepsilon\varepsilon_0\pi}}$. Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$. Подставив числовые данные, получим $D = 3$ см.

9.87. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам приложена разность потенциалов $U_1 = 300$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкости конденсатора C_1 и C_2 и поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 на пластинах до и после заполнения.

Решение:

Т. к. заполнение конденсатора эбонитом производ... ...сь после отключения от источника напряжения, то по з... ...на сохранения электрического заряда заряд на плас... ...ах $q = const$. Следовательно, и поверхностная плотность ... ...ряда на пластинах $\sigma = \frac{q}{S} = const$. Т. к. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{U}{d}$, то ... и после заполнения имеем $\sigma \cdot d = U_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1$ — (1) и $\sigma \cdot d = U_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2$ — (2). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), имеем $U_1 \varepsilon_1 = U_2 \varepsilon_2$, откуда $U_2 = \frac{U_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 115$ В. До и ...ле заполнения конденсатора имеем $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} = 17{,}7$ ...;

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d} = 46\ \text{пФ}; \quad \sigma = \frac{q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = 531\ \text{нКл/м}^2.$$

9.88. Решить предыдущую задачу для случая, когда заполнение пространства между пластинами изолятором производится при включенном источнике напряжения.

Решение:

В данной задаче рассматриваются два крайних состояния конденсатора: когда он не заполнен диэлектриком и когда заполнен. Сам процесс заполнения не учитывается. Если заполнение конденсатора эбонитом производить при включенном источнике напряжения, то $U = const$. Следовательно, и напряженность поля свободных зарядов на обкладках конденсатора $E = \frac{U}{d} = const$. С другой стороны, напряженность поля свободных зарядов $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, тогда до и после заполнения имеем $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$ и $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$, откуда

$\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 U}{d} = 531$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 U}{d} = 1{,}38$ мкКл/м^2. До и после заполнения эбонитом имеем (см. задачу 9.87) $C_1 = 17{,}7$ пФ, $C_2 = 46$ пФ, т. к. емкость конденсатора от напряжения не зависит.

9.89. Площадь пластин плоского конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 1$ см. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 300$ В. В пространстве между пластинами находятся плоскопараллельная пластинка стекла толщиной $d_1 = 0{,}5$ см и плоскопараллельная пластинка парафина толщиной $d_2 = 0{,}5$ см. Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля и падения потенциала U_1 и U_2 в каждом слое. Каковы будут при этом емкость C конденсатора и поверхностная плотность заряда σ на пластинах?

Решение:

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U = E_1 l_1 + E_2 l_2$ — (2), где $l_1 = d_1$ — толщина слоя стекла, $l_2 = d_2$ — толщина слоя парафина. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1 = D_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ — (3). Падение потенциала в каждом слое $U_1 = E_1 d_1$ и $U_2 = E_2 d_2$ — (4). Уравнение (2) можно записать в виде $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$ — (5). Из (5) и (3) имеем $E_1 = \dfrac{U\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2} = 15$ кВ/м, $E_2 = \dfrac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2} = 45$ кВ/м. Тогда из (4) $U_1 = 75$ В, $U_2 = 225$ В. Емкость C

найдем по формуле $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$, где $C_1=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}$, $C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d_2}$ — (4). Отсюда емкость $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d_1\varepsilon_2+d_2\varepsilon_1}=$ $= 26{,}6$ пФ. Заряд на одной из пластин $q=\sigma\cdot S=C_1U_1=$ $=C_2U_2=CU$; отсюда $\sigma=\frac{CU}{S}=0{,}8$ мкКл/м^2.

9.90. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d=1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U=100$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка кристаллического бромистого таллия ($\varepsilon=173$) толщиной $d_0=9{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения пластинку кристалла вынимают. Какова будет после этого разность потенциалов U между пластинами конденсатора?

Решение:

Если конденсатор отключен от источника напряжения, то $q=const$. Когда пластинка кристалла находится внутри конденсатора, напряженность в воздушном слое $E=\frac{U_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0+\varepsilon_2(d-d_0)}$ — (1) (см. задачу 9.89). После того как пластинку вынули, разность потенциалов между пластинами стала $U_2=Ed$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $U_2=\frac{dU_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0+\varepsilon_2(d-d_0)}=1{,}8$ кВ.

9.91. Коаксиальный электрический кабель состоит из центральной жилы и концентрической цилиндрической оболочки, между которыми находится диэлектрик ($\varepsilon=3{,}2$). Найти емкость C_l единицы длины такого кабеля, если радиус жилы $r_1=1{,}3$ см, радиус оболочки $r_2=3{,}0$ см.

Решение:
Емкость коаксиального кабеля конечной длины L можно найти по формуле $C=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{ln(R/r)}$. Отсюда для единицы длины кабеля имеем $C_l=\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{ln(R/r)}$; $C_l=214$ пФ/м.

9.92. Радиус центральной жилы коаксиального кабеля $r=1{,}5$ см, радиус оболочки $R=3{,}5$ см. Между центральной жилой и оболочкой приложена разность потенциалов $U=2{,}3$ кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии $x=2$ см от оси кабеля.

Решение:
Поле внутри кабеля неоднородно, и напряженность убывает с увеличением расстояния от оси системы. Поскольку вся система обладает осевой симметрией, напряженность поля может быть найдена с помощью обобщенной теоремы Гаусса: $\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S}=\sum Q$. Если выбрать вспомогательную поверхность в виде коаксиального цилиндра, получим $D=\frac{\tau}{2\pi r}$ — (1), где τ — линейная плотность заряда на центральной жиле. При этом вектор $\vec{D}$ нормален к границе раздела и выражение (1) справедливо в любой точке конденсатора. Учитывая, что $D=\varepsilon\varepsilon_0 E$, получим выражение для напряженности поля в указанной точке, т. е. при $r=x$: $E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$. Найдем линейную плотность заряда. Емкость кабеля $C=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{ln(R/r)}=\frac{q}{U}=\frac{\tau L}{U}$, откуда $\tau=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{ln(R/r)}$. Тогда напряженность поля $E=\frac{U}{x\,ln(R/r)}=$ $=136$ кВ/м.

9.93. Вакуумный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра $r = 1{,}5$ см и радиус внешнего цилиндра $R = 3{,}5$ см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов $U = 2{,}3$ кВ. Какую скорость v получит электрон под действием поля этого конденсатора, двигаясь с расстояния $l_1 = 2{,}5$ см до расстояния $l_2 = 2$ см от оси цилиндра?

Решение:

За счет работы сил электрического поля электрон приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $dA = qdU = -qEdx$. Т. к. $E = \frac{U}{x\ln(R/r)}$, то работа

$$A = -\int_{l_1}^{l_2} \frac{qUdx}{x\ln(R/r)} = \frac{qU\ln(l_1/l_2)}{\ln(R/r)} = \frac{mv^2}{2}, \text{ следовательно,}$$

$$v = \sqrt{\frac{2qU\ln(l_1/l_2)}{m\ln(R/r)}} = 1{,}46 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

9.94. Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндра радиусом $r = 3$ мм, двух слоев диэлектрика и внешнего цилиндра радиусом $R = 1$ см. Первый слой диэлектрика толщиной $d_1 = 3$ мм примыкает к внутреннему цилиндру. Найти отношение падений потенциала $\frac{U_1}{U_2}$ в этих слоях.

Решение:

Напряженность электрического поля внутри цилиндрического конденсатора $E = \frac{U}{x\ln(R/r)}$ (см. задачу 9.92).

Падение потенциала в первом слое $U_1 = -\int_{r+d_1}^{r} Edx =$

$$\int_{r+d_1}^{r} \frac{U_0}{x\,ln(R/r)}dx = \frac{U_0\,ln[(r+d_1)/r]}{ln(R/r)}$$. Аналогично падение потенциала во втором слое $U_2 = \frac{U_0\,ln[R/(r+d_1)]}{ln(R/r)}$. Отсюда

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{ln[(r+d_1)/r]}{ln[R/(r+d_1)]} = 1{,}35.$$

9.95. При изучении фотоэлектрических явлений используется сферический конденсатор, состоящий из металлического шарика диаметром $d = 1{,}5$ см (катода) и внутренней поверхности посеребренной изнутри сферической колбы диаметром $D = 11$ см (анода). Воздух из колбы откачивается. Найти емкость C такого конденсатора.

Решение:

Потенциал внутреннего шарика равен $\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 d}$. Потенциал внешней сферы равен $\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 D}$. Отсюда разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$. Емкость конденсатора $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 dD}{D-d}$. Подставляя числовые данные, получим $C = 0{,}96$ пФ.

9.96. Каким будет потенциал φ шара радиусом $r = 3$ см, если: а) сообщить ему заряд $q = 1$ нКл, б) окружить его концентрическим шаром радиусом $R = 4$ см, соединенным с землей?

Решение:

а) Потенциал шара $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 300$ В. б) На заземленной сфере в результате взаимодействия электрического поля заряженного шара индуцируется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара, т. е. $q = -4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi$, потенциал шара станет равным $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ или $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{-4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi}{R} = \varphi\left(1 - \frac{r}{R}\right)$; $\varphi = 7{,}5$ В.

9.97. Найти емкость C сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер с радиусами $r = 10$ см и $R = 10{,}5$ см. Пространство между сферами заполнено маслом. Какой радиус R_0 должен иметь шар, помещенный в масло, чтобы иметь такую же емкость?

Решение:

Емкость сферического конденсатора $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rR}{R - r}$. Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Подставляя числовые данные, получим $C = 1{,}17 \cdot 10^{-9}$ Ф. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_0$, отсюда $R_0 = \frac{C}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = 2{,}1$ м.

9.98. Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнего шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии $x = 3$ см от центра шаров.

Решение:

Напряженность в заданной точке создается только внутренним шаром и равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Заряд q найдем из соотношения $C = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rR}{R-r} = \frac{q}{U}$, откуда $q = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 RU}{R-r}$.

Тогда $E = \frac{rRU}{(R-r)x^2} = 44{,}5$ кВ/м.

9.99. Радиус внутреннего шара вакуумного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнего шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какую скорость v получит электрон, приблизившись к центру шаров с расстояния $x_1 = 3$ см до расстояния $x_2 = 2$ см?

Решение:

За счет работы A сил электрического поля электрон приобрел кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $A = edU = -eEdx$. Т. к. $E = \frac{rRU}{(R-r)x^2}$ (см. задачу 9.98), то

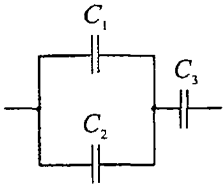
$$A = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{erRU}{(R-r)x^2}dx = -\frac{erRU}{R-r}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}; \qquad A = \frac{erRU}{R-r}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{eUrR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1x_2}.$$ Тогда $\frac{mv^2}{2} = \frac{eErR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1x_2}$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eUrR(x_1 - x_2)}{m(R-r)x_1x_2}} = 1{,}54 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

9.100. Найти емкость C системы конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C_i = 0{,}5$ мкФ

Решение:



Емкость параллельного участка $C_{12} = C_1 + C_2$. Емкость всей системы конденсаторов найдем из соотношения $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$ или $\frac{1}{C} = \frac{C_3 + C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)C_3}$. Отсюда $C = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$. Поскольку $C_1 = C_2 = C_3 = C_i$, то $C = \frac{2}{3}C_i = 0{,}33$ мкФ.

9.101. При помощи электрометра сравнивали между собой емкости двух конденсаторов. Для этого заряжали их до разностей потенциалов $U_1 = 300$ В и $U_2 = 100$ В и соединяли оба конденсатора параллельно. Измеренная при этом электрометром разность потенциалов между обкладками конденсатора оказалась равной $U = 250$ В. Найти отношение емкостей $\frac{C_1}{C_2}$.

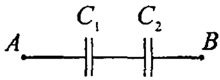
Решение:

Заряд на обкладках первого конденсатора $q_1 = C_1U_1$. Заряд на обкладках второго конденсатора $q_2 = C_2U_2$. После соединения конденсаторов $q_1 + q_2 = CU$, где $C = C_1 + C_2$. Отсюда $(C_1 + C_2)U = C_1U_1 + C_2U_2$. После несложных преобразований получим $\frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U} = 3$.

9.102. Разность потенциалов между точками A и B $U = 6$ В. Емкость первого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ и емкость второго конденсатора $C_2 = 4$ мкФ. Найти заряды q_1 и q_2 и разности потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора.

Решение:

При последовательном соединении на всех пластинах конденсатора будет одинаковый по модулю заряд, т. е. $q_1 = q_2$. При этом $q_1 = C_1U_1$, а $q_2 = C_2U_2$. Отсюда $C_1U_1 = C_2U_2$. Падение напряжения на участке AB равно $U = U_1 + U_2$, отсюда $U_1 = U - U_2$. Тогда $C_1(U - U_2) = C_2U_2$, откуда $U_2 = \dfrac{C_1U}{C_2 + C_1} = 2\,\text{В}$; $U_1 = U - U_2 = 4\,\text{В}$; $q_1 = q_2 = C_1U_1 = 8\,\text{мкКл}$.



9.103. В каких пределах может меняться емкость C системы, состоящей из двух конденсаторов, если емкость одного из конденсаторов постоянна и равна $C_1 = 3{,}33\,\text{нФ}$, а емкость C_2 другого изменяется от 22,2 до 555,5 пФ?

Решение:

При параллельном соединении конденсаторов емкость системы равна $C = C_1 + C_2$ и изменяется от $C = 3{,}33 \times 10^{-9} + 22{,}2 \cdot 10^{-12} = 3{,}35 \cdot 10^{-9}\,\Phi$ до $C = 3{,}33 \cdot 10^{-9} + 555{,}5 \times 10^{-12} = 3{,}89 \cdot 10^{-9}\,\Phi$. При последовательном соединении конденсаторов емкость системы $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ и изменяется

от $C = \dfrac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 22{,}2 \cdot 10^{-12}}{3{,}35 \cdot 10^{-9}} = 22 \cdot 10^{-12}\,\Phi$ до

$$C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 555{,}5 \cdot 10^{-12}}{3{,}89 \cdot 10^{-9}} = 475{,}5 \cdot 10^{-12}\,\Phi.$$

9.104. В каких пределах может изменяться емкость C системы, состоящей из двух конденсаторов переменной емкости, если емкость C_i каждого из них изменяется от 10 до 450 пФ?

Решение:
При последовательном соединении емкость системы конденсаторов равна $C = \frac{C_{i1}C_{i2}}{C_{i1} + C_{i2}}$. Подставляя граничные значения, получим, что емкость C системы меняется в пределах от $20\,пФ$ до $900\,пФ$. При параллельном соединении емкость системы $C = C_1 + C_2$. Подставляя граничные значения, найдем, что емкость C системы меняется от 5пФ до 225пФ.

9.105. Конденсатор емкостью $C = 20\,мкФ$ заряжен до разности потенциалов $U = 100\,В$. Найти энергию W этого конденсатора.

Решение:
Энергия заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$; $W = 0.1$ Дж.

9.106. Шар радиусом $R_1 = 1\,м$ заряжен до потенциала $\varphi = 30\,кВ$. Найти энергию W заряженного шара.

Решение:
Энергия заряженного шара $W = \frac{CU^2}{2}$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $W = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2}{2} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2$;
$W = 0.05$ Дж.

9.107. Шар, погруженный в керосин, имеет потенциал $\varphi = 4.5\,кВ$ и поверхностную плотность заряда $\sigma = 11{,}3\,мкКл/м^2$. Найти радиус R, заряд q, емкость C и энергию W шара.

Решение:
Будем считать, что весь заряд шара равномерно распределен по поверхности и задана поверхностная плотность его-

бодных зарядов. Потенциал шара φ и его заряд q связаны соотношением $q = C\varphi$ — (1), где $q = \sigma S$ — (2); $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ — (3). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $\sigma R = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 7$ мм. Из (2) $q = 4\pi R^2\sigma = 7$ нКл. Из (1) $C = \frac{q}{\varphi} = 1{,}55$ пФ. Энергия заряженного шара $W = \frac{q^2}{2C} =$ $= 15{,}8$ мкДж.

9.108. Шар 1 радиусом $R_1 = 10$ см, заряженный до потенциала $\varphi = 3$ кВ, после отключения от источника напряжения соединяется проволочкой (емкостью которой можно пренебречь) сначала с удаленным незаряженным шаром 2, а затем после отсоединения от шара 2 с удаленным незаряженным шаром 3. Шары 2 и 3 имеют радиусы $R_2 = R_3 = 10$ см. Найти: а) первоначальную энергию W_1 шара 1; б) энергии W_1' и W_2' шаров 1 и 2 после соединения и работу A разряда при соединении; в) энергии W_1'' и W_3' шаров 1 и 3 после соединения и работу A разряда при соединении.

Решение:

Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Первоначальная энергия шара 1 $W_1 = \frac{q_1^2}{2C}$ — (1). Заряд шара q и его емкость C связаны соотношением $C = \frac{q}{\varphi}$ — (2), где φ — потенциал шара. Из (2) $q_1 = C\varphi$, подставляя это выражение в (1), получим $W_1 = \frac{C\varphi_1^2}{2}$. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, тогда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \times$

$\times R\varphi_1^2$; $W_1 = 50$ мкДж. После соединения шаров 1 и 2 проволокой перетекание заряда происходит до тех пор, пока потенциалы шаров не станут равны, т. е. $\varphi_2' = \varphi_2'$ — (3). По закону сохранения зарядов для изолированной системы имеем: $q_1 = q_1' + q_2'$ — (4), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соединения. Т. к. по условию шары находятся на большом расстоянии друг от друга, потенциал каждого из шаров определяется только зарядом самого шара, влиянием поля второго шара можно пренебречь. $\varphi_1' = \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $\varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (5), отсюда следует, что $q_1' = q_2'$. Поскольку емкость и потенциал шаров 1 и 2 после соединения одинаковы, то $W_1' = W_2'$. Из уравнений (3) — (5) следует, что $\varphi_1' = \dfrac{\varphi_1}{2}$. Тогда $W_1' = W_2' = \; = \dfrac{C\varphi_1^2}{8} = \dfrac{W_1}{4}$; $W_1' = W_2' = 12,5$ мкДж. Работа разряда A равна разности энергий $A = W_1 - \left(W_1' + W_2'\right) = \dfrac{W_1}{2}$; $A = 25$ мкДж. Если теперь соединить шар 1 и шар 3, то аналогично $W_1'' = W_3' = \dfrac{W_1'}{4} = 3,125$ мкДж; $A = \dfrac{W_1'}{2} = 6,25$ мкДж.

9.109. Два металлических шарика, первый с зарядом $q_1 = 10$ нКл и радиусом $R_1 = 3$ см и второй с потенциалом $\varphi = 9$ кВ и радиусом $R_2 = 2$ см, соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. Найти: а) потенциал φ_1 первого шарика до разряда; б) заряд q_2 второго шарика до разряда; в) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до разряда; г) заряд q_1' и потенциал φ_1' первого шарика после разряда; д) заряд q_2' и потенциал φ_2' второго шарика после разряда; е) энергию W соединенных проводником шариков; ж) работу A разряда.

Решение:

Потенциал первого шарика до разряда $\varphi_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = 3$ кВ. Заряд второго шарика до разряда $q_2 = C_2\varphi_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2$; $q_2 = 20$ нКл. Энергия первого шарика до разряда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi_1^2 = 15$ мкДж. Энергия второго шарика до разряда $W_2 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2^2 = 90$ мкДж (см. задачу 9.108). После соединения шариков $\varphi_1' = \varphi_2'$. По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ — (1). Имеем $\varphi_1' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $\varphi_2' = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$. Т. к. $\varphi_1' = \varphi_2'$, то $\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$ или с учетом (1) получим $\frac{q_1'}{R_1} = \frac{q_1 + q_2 - q_1'}{R_2}$, откуда $q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + R_2 / R_1} = 18$ нКл. Тогда $q_2' = q_1 + q_2 - q_1' = 12$ нКл. Потенциалы шариков после разряда $\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = 5{,}4$ кВ. Энергия W соединенных шариков равна сумме энергий каждого шарика в отдельности после разряда. Т. е. $W = W_1' + W_2'$, где $W_1' = \frac{(q_1')^2}{8C_1} = \frac{(q_1')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $W_2' = \frac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$.

Следовательно, $W = \frac{1}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{(q_1')^2}{R_1} + \frac{(q_2')^2}{R_2}\right)$; $W = 81$ мкДж.

Работа разряда A равна разности энергий до и после разряда, т. е. $A = (W_1 + W_2) - W = 24$ мкДж.

9.110. Заряженный шар 1 радиусом $R_1 = 2$ см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром 2, радиус которого

$R_2 = 3$ см. После того как шары разъединили, энергия шара 2 оказалась равной $W_2 = 0{,}4$ Дж. Какой заряд q_1 был на шаре 1 до соприкосновения с шаром 2?

Решение:

По закону сохранения заряда $q_1 = q_1' + q_2'$ — (1), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соприкосновения. Кроме того, потенциалы шаров будут равны, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$, откуда $q_1' R_2 = q_2' R_1$ — (2). По условию $W_2 = \frac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2} = 0{,}4$ Дж, откуда $q_2' = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2 W_2} = 1{,}64\cdot10^{-6}$ Кл. Подставляя полученное значение в (2), найдем $q_1' = \frac{q_2' R_1}{R_2} = 1{,}1\cdot10^{-6}$ Кл. Тогда из (1) получим $q_1 = (1{,}6 + 1{,}1)\cdot10^{-6} = 2{,}7\cdot10^{-6}$ Кл.

9.111. Пластины плоского конденсатора площадью $S = 0{,}01\text{ м}^2$ каждая притягиваются друг к другу с силой $F = 30$ мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти заряды q, находящиеся на пластинах, напряженность E поля между пластинами и объемную плотность энергии W_0 поля.

Решение:

Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 6$. Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}$, откуда $E = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0\varepsilon S}} = 336$ кВ/м. Силу F можно выразить иначе: $F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, где $\sigma = \frac{q}{S}$. Т. е. $F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$.

откуда $q = \sqrt{2F\varepsilon\varepsilon_0 S} = 178$ нКл. Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 3$ Дж/м^2.

9.112. Между пластинами плоского конденсатора вложена тонкая слюдяная пластинка. Какое давление p испытывает эта пластинка при напряженности электрического поля $E = 1$ МВ/м?

Решение:

Пластинка испытывает давление $p = \dfrac{F}{S}$, где F — сила притяжения между пластинами конденсатора, $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$. Отсюда $p = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 26{,}5$ Па.

9.113. Абсолютный электрометр представляет собой плоский конденсатор, нижняя пластина которого неподвижна, а верхняя подвешена к коромыслу весов. При незаряженном конденсаторе расстояние между пластинами $d = 1$ см. Какую разность потенциалов U приложили между пластинами, если для сохранения того же расстояния $d = 1$ см на другую чашку весов пришлось положить груз массой $m = 5{,}1$ г? Площадь пластин конденсатора $S = 50$ см^2.

Решение:

На верхнюю пластину электрометра действуют две силы: сила притяжения между пластинами $\vec{F}$, направленная вниз, и сила натяжения $\vec{T}$ нити коромысла весов, направленная вверх, равная по абсолютной величине весу груза $\vec{P}$, где $\vec{P} = m\vec{g}$. Запишем условие равновесия: $\vec{F} = \vec{T}$ или $F = mg$. Силу притяжения между пластинами можно выразить следующим образом: $F=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}$. Тогда $\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}=mg$, откуда $U=\sqrt{\dfrac{2d^2mg}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}=15$ кВ.

9.114. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U=280$ В. Площадь пластин конденсатора $S=0{,}01$ м^2; поверхностная плотность заряда на пластинах $\sigma=495$ нКл/м^2. Найти: а) напряженность E поля внутри конденсатора; б) расстояние d между пластинами; в) скорость v, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; г) энергию W конденсатора; д) емкость C конденсатора; е) силу притяжения F пластин конденсатора.

Решение:

Напряженность поля конденсатора $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}=56$ кВ/м. С другой стороны, $E=\dfrac{U}{d}$, отсюда $d=\dfrac{U}{E}=5$ мм. За счет работы сил электрического поля электрону будет сообщена кинетическая энергия $W_к=A$, т. е. $\dfrac{mv^2}{2}=eU$, откуда найдем $v=\sqrt{\dfrac{2eU}{m}}=10^7$ м/с. Энергия плоского конденсатора $W=\dfrac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0}=692$ нДж. Емкость плоского конденсатора $C=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}=1{,}77$ пФ. Сила притяжения пластин конденсатора $F=138$ мкН.

9.115. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S=0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d=5$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора если известно, что при разряде конденсатора выделилось $Q = 4{,}19$ мДж тепла?

Решение:

Заряженный конденсатор обладает энергией $W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}$.

При разрядке конденсатора эта энергия выделяется в виде тепла. Следовательно, $Q = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}$, откуда $U = \sqrt{\dfrac{2dQ}{\varepsilon\varepsilon_0 S}} =$ $= 21{,}7$ кВ.

9.116. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\,\text{м}^2$, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ см? Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин.

Решение:

Поскольку конденсатор постоянно подключен к источнику, то напряжение на нем не изменяется. Напряженность поля конденсатора при раздвинутых пластинах $E = \dfrac{U}{d_2}$; $E = 60$ кВ/м. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1). При увеличении расстояния между пластинами емкость уменьшается. Из формулы $W = \dfrac{CU^2}{2}$ — (2), выражающей энергию W конденсатора через его емкость и напряжение, следует, что энергия конденсатора также уменьшится. Из (1) и (2) следует, что энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 8$ мкДж.

9.117. Решить предыдущую задачу при условии, что сначала конденсатор отключается от источника напряжения, а затем раздвигаются пластины конденсатора.

Решение:

Поскольку конденсатор отключили от источника напряжения, то заряд на его пластинах, а также плотность заряда σ останутся неизменными. Напряженность поля конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Как видно из формулы, напряженность при $\sigma = const$ не зависит от расстояния между пластинами, следовательно, после раздвижения пластин напряженность не изменится и ее можно найти по формуле $E = \dfrac{U}{d_1}$, т. е. $E_1 = E_2 = 150$ кВ/м. Энергия заряженного конденсатора выражается через заряд и емкость формулой $W = \dfrac{q^2}{2C}$. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. Заряд конденсатора равен $q = C_1U$. Тогда энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{C_1U^2}{2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}$; $W_1 = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \dfrac{C_1^2U^2}{2C_2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 50$ мкДж.

9.118. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01\ \text{м}^2$, расстояние между ними $d_1 = 1$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 0{,}1$ кВ. Пластины раздвигаются до расстояния $d_2 = 25$ мм. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение:

а) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_2} = 17{,}8$ мкДж (см. задачу 9.116). б) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{C_1 U^2}{2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}$; $W_1 = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \dfrac{C_1^2 U^2}{2C_2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 11{,}1$ мкДж (см. задачу 9.117).

9.119. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом $W = 20$ мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, $A = 70$ мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Решение:

Энергия конденсатора, заполненного диэлектриком, $W_1 = \dfrac{C_1 U_1^2}{2}$. После удаления диэлектрика емкость конденсатора уменьшилась в ε раз и стала равной $C_2 = \dfrac{C_1}{\varepsilon}$. Т. к. заряд конденсатора остался прежним, то разность потенциалов в силу связи $q = CU$ увеличилась в ε раз: $U_2 = \varepsilon U_1$. Энергия конденсатора после удаления диэлектрика $W_2 = \frac{C_1 U_1^2 \varepsilon^2}{2\varepsilon} = W_1 \varepsilon$. Работа, совершенная против сил кулоновского притяжения, равна $A = W_2 - W_1 = W_1(\varepsilon - 1)$, отсюда $\varepsilon = \frac{A}{W_1} + 1$; $\varepsilon = 4{,}5$.

9.120. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 12{,}5\ \text{см}^2$, расстояние между ними $d_1 = 5$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 6$ кВ. Пластины конденсатора раздвигаются до расстояния $d_2 = 1$ см. Найти изменение емкости конденсатора ΔC, потока напряженности ΔN_E сквозь площадь электродов и объемной плотности энергии ΔW_0 электрического поля, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение:

а) Если источник напряжения отключается, то разность потенциалов между пластинами конденсатора остается постоянной. Емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, отсюда изменение емкости $\Delta C = \varepsilon\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$; $\Delta C = 1{,}1$ Пф. По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность $N_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum q_i$, в нашем случае $N_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$, а изменение потока напряженности $\Delta N_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(q_1 - q_2)$. Поскольку $q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_1}$, а

$q_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_2}$, то $\Delta N_E = SU\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right)$; $\Delta N_E = 750\,\text{В}\cdot\text{м}$.

Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$, где $E = \dfrac{U}{d}$. Отсюда $\Delta W_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2}\left(\dfrac{1}{d_1^2} - \dfrac{1}{d_2^2}\right)$; $\Delta W_0 = 48\,\text{МДж/м}^3$.

б) Если конденсатор перед раздвижением отключается от источника напряжения, то заряд на пластинах конденсатора остается постоянным. Емкость, как и в случае «а», уменьшится на величину $\Delta C = 1{,}1\,\text{пФ}$. Поток напряженности не изменится, т. к. $q_1 = q_2$, т. е. $\Delta N_E = 0$. При $q = const$ напряженность $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = const$, т. е. объемная плотность энергии тоже не изменится, $\Delta W_0 = 0$.

9.121. Найти объемную плотность энергии W_0 электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии $x = 2\,\text{см}$ от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1\,\text{см}$, б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости, в) на расстоянии $x = 2\,\text{см}$ от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскости $\sigma = 16{,}7\,\text{мкКл/м}^2$, линейная плотность заряда на нити $\tau = 167\,\text{нКл/м}$. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2$.

Решение:

Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$. а) Напряженность поля на расстоянии x от поверхности заряженного шара $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}$, где $q = \sigma \cdot 4\pi R^2$. Тогда $W_0 = \dfrac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^4}$; $W_0 = 97\,\text{МДж/м}^3$. б) Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, тогда $W_0 = \dfrac{\sigma^2}{8\varepsilon\varepsilon_0}$; $W_0 = 1{,}97$ Дж/м^3. в) Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$, тогда $W_0 = \dfrac{\tau^2}{8\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$; $W_0 = 50$ МДж/м^3.

9.122. На пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми $d = 3$ см, подана разность потенциалов $U = 1$ кВ. Пространство между пластинами заполняется диэлектриком ($\varepsilon = 7$). Найти поверхностную плотность связанных (поляризационных) зарядов $\sigma_{св}$. Насколько изменяется поверхностная плотность заряда на пластинах при заполнении конденсатора диэлектриком? Задачу решить, если заполнение конденсатора диэлектриком производится: а) до отключения конденсатора от источника напряжения; б) после отключения конденсатора от источника напряжения.

Решение:

Введем обозначения: σ_0 — поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора в отсутствие диэлектрика, $\sigma_д$ — поверхностная плотность заряда на пластинах в присутствии диэлектрика, $\sigma_{св}$ — поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов на диэлектрике. Совместное действие зарядов $\sigma_д$ и $\sigma_{св}$ таково, как будто бы на границе раздела проводника и диэлектрика имеется заряд, распределенный с плотностью $\sigma = \sigma_д - \sigma_{св}$ — (1). Таким образом, σ — поверхностная плотность «эффективных» зарядов, т. е. зарядов, определяющих суммарное результирующее поле в диэлектрике. Очевидно, величины σ_0, $\sigma_д$ и σ связаны с соответствующими напряженностями поля следующими соотношениями: в отсутствие диэлектрика $E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{U_1}{d}$ — (2); в присутствии диэлектрика $E_2 = \frac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{U_2}{d}$ — (3). Из (1) имеем $\sigma_{св} = \sigma_д - \sigma$ или, на основании (3), $\sigma_{св} = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 - \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U_2}{d}$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 17{,}7$ мкКл/м^2. Изменение поверхностной плотности заряда при заполнении конденсатора диэлектриком $\sigma_д - \sigma_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = \sigma_{св} = 17{,}7$ мкКл/м^2. Таким образом, благодаря источнику напряжения на пластинах конденсатора появятся добавочные заряды, компенсирующие уменьшение заряда, вызванное поляризацией диэлектрика. б) После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}$ (см. решение 9.87) и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\frac{U_2}{d}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2 d} = 2{,}53$ мкКл/м^2. Т. к. $q = const$, то $\sigma_{св} = \sigma_0$, т. е. поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора не изменяется.

9.123. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая восприимчивость которого $\varkappa = 0{,}08$. Расстояние между пластинами $d = 5$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 4$ кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и поверхностную плотность заряда $\sigma_д$ на пластинах конденсатора.

Решение:

Поляризованность P, численно равная поверхностной плотности связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике, пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т.е. $P = \sigma_{св} = \aleph' E$. В системе СИ диэлектрическая восприимчивость $\aleph'$ имеет размерность фарад на метр. Можно показать, что $\aleph' = 4\pi\varepsilon_0\aleph$, где $\aleph$ — безразмерная величина (табличное значение диэлектрической восприимчивости). Тогда поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = 4\pi\varepsilon_0\aleph\dfrac{U}{d} = 7{,}1\ мкКл/м^2$. Найдем диэлектрическую проницаемость диэлектрика. Т.к. $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$ (см. задачу 9.122), то $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$, откуда $\varepsilon - 1 = 4\pi\aleph$, или $\varepsilon = 1 + 4\pi\aleph = 1 + 4\pi \cdot 0{,}8 = 2$. Тогда $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Отсюда поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д = \dfrac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 14\ мкКл/м^2$.

9.124. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние между пластинами $d =$ [illegible] мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 1{,}2$ кВ. Найти: а) напряженность E поля в стекле; б) поверхностную плотность заряда $\sigma_д$ на пластинах конденсатора; в) поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле; г) диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ стекла.

Решение:

а) Напряженность поля в стекле $E = \dfrac{U}{d} = 300$ кВ/м (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 6$.
б) Поверхностная плотность заряда на пластинах равна

$\sigma_д = \dfrac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 15{,}9$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.123). в) Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times \times(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d} = 13{,}3$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.122). г) Диэлектрическая восприимчивость стекла и поверхностная плотность связанных зарядов связаны соотношением $\sigma_{св} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \aleph U}{d}$ (см. задачу 9.123). Отсюда $\aleph = \dfrac{\sigma_{св} d}{4\pi\varepsilon_0 U} = 0{,}4$.

9.125. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено маслом. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Какую разность потенциалов U надо подать на пластины конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на масле была равна $\sigma_{св} = 6{,}2$ мкКл/м^2?

Решение:

Имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Из (1) $U = \dfrac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = 1{,}75$ кВ.

9.126. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Площадь пластин конденсатора $S = 0{,}01$ м^2. Пластины конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 4{,}9$ мН. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле.

Решение:

Имеем $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$ — (1). Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ (см. задачу 9.122).

Из (1) $\frac{U}{d}=\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Тогда $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$; $\sigma_{св}=0{,}6$ мкКл/м^2.

9.127. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином. При присоединении пластин к источнику напряжения давление пластин на парафин стало равным $p=5$ Па. Найти: а) напряженность E электрического поля и электрическое смещение D в парафине; б) поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на парафине; в) поверхностную плотность заряда $\sigma_{св}$ на пластинах конденсатора; г) объемную плотность энергии W_0 электрического поля в парафине; д) диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ парафина.

Решение:

а) Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$, откуда $E=\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Поскольку давление $p=\frac{F}{S}$, то $E=\sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}}=752$ кВ/м. Электрическое смещение $D=\varepsilon\varepsilon_0 E=13{,}3$ мкКл/м^2. б) Имеем $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\times\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$ (см. задачу 9.126). С учетом $p=\frac{F}{S}$ имеем $\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}}=6{,}7$ мкКл/м^2. в) Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д=\varepsilon\varepsilon_0 E=D$; $\sigma_д=13{,}3$ мкКл/м^2. г) Объемная плотность энергии $W_0=\frac{ED}{2}=5$ Дж/м^2. д) Имеем $\sigma_{св}=4\pi\varepsilon_0\aleph E$ (см. задачу 9.123), отсюда $\aleph=\frac{\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 E}=0.08$.

9.128. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U_1 = 0{,}6$ кВ. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то разность потенциалов на пластинах конденсатора возрастет до $U_2 = 1{,}8$ кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость $\aleph$ диэлектрика.

Решение:
После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Из решения задачи 9.122 имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U_1}{d}$. Найдем из (1) $\varepsilon = \dfrac{U_2}{U_1}$. Тогда

$$\sigma_{св} = \varepsilon_0\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)\frac{U_1}{d}; \qquad \sigma_{св} = 5{,}3 \text{ мкКл/м}^2.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов и диэлектрическая восприимчивость диэлектрика связаны соотношением $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0 \aleph \dfrac{U_1}{d}$. Отсюда $\aleph = \dfrac{d\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 U_1}$; $\aleph = 0{,}159$.

9.129. Пространство между пластинами плоского конденсатора объемом $V = 20$ см^3 заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 5$). Пластины конденсатора присоединены к источнику напряжения. При этом поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св} = 8{,}35$ мкКл/м^2. Какую работу A надо совершить против сил электрического поля, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора? Задачу решить, если удаление диэлектрика производится: а) до отключения источника напряжения; б) после отключения источника напряжения.

Решение:
Работа A против сил кулоновского поля равна изменению энергии конденсатора $\Delta W = A$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и

$\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2$. Отсюда $\Delta W = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2(1-\varepsilon)$. Из (1) найдем $\dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, или $-\dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, тогда $\Delta W = \dfrac{V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon)} = -19{,}7$ мкДж, т. е. энергия конденсатора уменьшилась, следовательно, работа сил поля положительна, а работа против них отрицательна. Тогда $A = -19{,}7$ мкДж. б) Если конденсатор отключен от источника, то $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U_1}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\dfrac{U_2}{d}\right)^2$. Отсюда

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\varepsilon^2\left(\frac{U_1}{d}\right)^2 - \varepsilon^2\left(\frac{U_2}{d}\right)^2\right); \quad \Delta W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U_1}{d}\right)^2(\varepsilon - 1).$$

Поскольку $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U_1}{d}$, откуда $\dfrac{U_1}{d} = \dfrac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$, то $\Delta W = \dfrac{\varepsilon V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$; $\Delta W = 98$ мкДж, т. е. энергия конденсатора увеличилась, следовательно, работа сил поля отрицательна, а работа против них положительна. Тогда $A = 98$ мкДж.