Глава IX

ПОНЯТИЕ МАССЫ В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Современная аксиоматизация механики, подобно аксиоматизации многих других областей науки (за исключением чисто математических дисциплин, таких, как алгебра или геометрия), не была результатом необходимости, вытекающей из существа специальных исследований предмета данной науки. Скорее, она была осуществлена для того, чтобы удовлетворить общую философско-эстетическую потребность в законченной концептуальной структуре, характеризуемой высокой степенью математико-логической строгости. В сравнении, например, с аксиоматизацией биологии [1], музыки [2] или психологии [3] аксиоматизация механики кажется относительно легкой задачей, так как за исключением нескольких динамических понятий и понятия времени геометрическое рассмотрение играло в ней преобладающую роль, а геометрия является одной из наиболее строгих аксиоматических систем в научном мышлении.

Одним из таких динамических понятий, которые отличают собственно механику от геометрии, является как раз понятие массы. Можно поэтому ожидать, что аксиоматические исследования в механике, возможно, приведут к логическому и методологическому разъяснению нашего понятия.

Как мы уже видели в предыдущей главе, в качестве основы для определения понятия массы могут быть выбраны различные физические законы или гипотезы. Если

---

[1] J. H. Woodger, The axiomatic method in biology (Camb. Univ. Press, New York, 1937).

[2] Susanne K. Langer, A set of postulates for the logical structure of music, «Monist», 39, 561—570 (1929).

[3] J. H. Woodger, The formalization of a psychological theory, «Erkenntnis», 7, 195—198 (1937).

масса взята в качестве производного понятия в рамках дедуктивной системы, то эти законы или гипотезы должны получить объяснение и быть включены в формализацию. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с такой процедурой, естественно принять понятие массы в качестве первоначального понятия. Действительно, в наиболее развитой аксиоматизации механики [4] понятие массы принимается в качестве первоначального понятия в дополнение к неопределенным понятиям положения, времени и частицы (или совокупности частиц). Такой подход полностью адекватен разъяснению формальных и аналитических аспектов системы. Если, однако, ставится в качестве условия «метааксиоматическое» требование соответствия между первоначальными понятиями (на формальном, аксиоматическом уровне) и наблюдаемыми величинами (на операциональном, эмпирическом уровне) — требование, которое, естественно, не имеет никакой аналогии с аксиоматизацией чисто математических теорий,— тогда понятие массы становится необходимо определимым в формализованной системе.

Трудности, возникающие при рассмотрении массы как определимого понятия, могут, очевидно, быть сведены к минимуму, если физический закон или гипотеза, лежащие в основе определения, максимально просты. Гермес в своих попытках аксиоматизировать механику в соответствии с вышеупомянутым требованием увидел в механизме неупругого столкновения (при условии сохранения импульса) простейший физический закон, ведущий к формализованному определению массы [5]. Далее мы изложим в сжатом и несколько упрощенном виде доклад, прочитанный Гермесом [6] на Международном симпозиуме по аксио-

[4] Например, J. C. C. McKinsey, A. C. Sugar, and P. Suppes, Axiomatic foundations of classical particle mechanics, «Journal of Rational Mechanics and Analysis», 2, 253—272 (1953). См. также H. Rubin and P. Suppes, Axioms of relativistic particle mechanics, «Pacific Journal of Mathematics», 4, 563—601 (1954).

[5] Hans Hermes, Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik (Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exacten Wissenschaften, Heft 3, Leipzig, 1938).

[6] Hans Hermes, Zur Axiomatisierung der Mechanik, в: «The axiomatic method, Proceedings of an International Symposium», ed. L. Henkin, P. Suppes, and A. Tarski (North Holland, Amsterdam, 1959), p. 282—290.

матическому методу, состоявшемся в Калифорнийском университете (с 26 декабря 1957 года по 4 января 1958 года).

Временны́е сечения мировой линии непротяженной частицы, названные мгновенными точечными массами, обозначаются через x, y, ... Две мгновенные точечные массы x, y, принадлежащие одной и той же (физической) частице,— другими словами, два временны́х сечения мировой линии одной и той же частицы — называются «генетически тождественными» и соответственно обозначаются через Gxy. Если S есть инерциальная система отсчета, то $CStxy$ выражает тот факт, что мгновенные точечные массы x и y сталкиваются в неупругом ударе за время t по отношению к системе S, в которой их общая скорость после столкновения равна нулю. Наконец, Vel_Svtx обозначает скорость x по отношению к S непосредственно перед столкновением в момент времени t. Отношение масс двух частиц, данное Гермесом, принимает следующий вид:

Определение: $$Macca\ \alpha x x_0 =_{\mathrm{Df}} \bigvee_S \bigvee_t \bigvee_y \bigvee_{y_0} \bigvee_v \bigvee_{v_0} (Gxy \wedge Gx_0y_0 \wedge$$
$$\wedge CStyy_0 \wedge Vel\_Svty \wedge Vel\_Sv_0ty_0 \wedge \alpha\,|v| =$$
$$= |v_0|) \vee (Gxx_0 \wedge \alpha = 1).$$

В этом определении $\bigvee$ есть квантор существования, $\vee$ — символ логической дизъюнкции, а $\wedge$ — символ логической конъюнкции. На нетехническом языке это определение будет звучать следующим образом: «Масса x в α раз больше, чем масса x_0» означает, что «существует система S, мгновение t и мгновенные точечные массы y, y_0, генетически тождественные соответственно x, x_0, скорости которых (непосредственно перед столкновением) v и v_0 находятся в отношении $|v_0| : |v| = \alpha$. Если x и x_0 генетически тождественны, то отношение масс равно единице».

Для того чтобы полностью понять это определение, вспомним, что непосредственно перед столкновением частицы движутся с общей скоростью. Таким образом, может быть найдена инерциальная система, относительно которой общая скорость равна нулю. Для этой системы S классический закон сохранения записывается (в общепринятых символах) следующим образом:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

или

$$m_1 : m_2 = |v_2| : |v_1|,$$

где v_1 и v_2 — скорости до столкновения. Так, если $|v_0| = \alpha |v|$, то частица с мгновенной точечной массой x обладает массой в α раз большей, чем частица, мгновенная точечная масса которой x_0. Проще говоря, это составляет содержание выше приведенного определения. Для того чтобы это только что определенное отношение между x и x_0 было действительно отношением двух чисел, необходимо ввести дополнительную аксиому:

Аксиома: $\textit{Масса}\ \alpha yz \wedge \textit{Масса}\ \beta zx \wedge \textit{Масса}\ \gamma xy \rightarrow \alpha\beta\gamma = 1,$

где $\rightarrow$ есть символ импликации. На основе этой аксиомы и других постулатов можно доказать несколько важных теорем:

Теорема: $CStx_1x_2 \rightarrow CStx_2x_1.$

Теорема: $\textit{Масса}\ \alpha xx_0 \rightarrow \alpha \neq 0.$

Теорема: $\textit{Масса}\ \alpha xx_0 \rightarrow \textit{Масса}\ \frac{1}{\alpha} x_0x.$

Теорема: $\textit{Масса}\ \alpha xx_0 \wedge Gxy \wedge Gx_0y_0 \rightarrow \alpha = \beta.$

Смысл и физическое значение этих теорем легко понять· Последняя теорема, например, утверждает, что выбор мгновенных точечных масс не зависит от численного отношения масс частиц, которые представлены этими мгновенными точечными массами.

Подход Гермеса, подобно подходу Маха, определяет понятие массы, конечно, только в той мере, в какой он описывает процедуру, связывающую положительное число (отношение масс) с данной совокупностью двух частиц. Это важно для логической полноты процесса, но не приносит какого-либо дополнительного проникновения в физический смысл данного понятия. Можно, конечно, утверждать, что это и есть все то, что требуется. Согласно этой точке зрения, физическая наука является лишь системой соглашений или описаний, посредством которых числа сопоставляются некоторым операциям или процедурам наблюдения, и предметом исследования становится функциональная зависимость между этими числами. Физический смысл понятия сводится, таким образом, к математическим отношениям, в которые число, связанное с понятием, вступает с числами, относящимися к другим понятиям или явлениям. Аналитический аппарат, применяемый для выяснения значения понятия, должен, таким образом, основываться на методах статистических расчетов.

Первое приближение к такого рода подходу, поскольку это касается понятия массы, было сделано Пендсом в 1939 году. Рассматривая изолированную систему, состоящую из n масс m_1, m_2, . . ., m_n, которые в ньютоновской физике удовлетворяют уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = 0, \qquad (1)$$

Пендсе ставит вопрос: необходимо ли «предполагать свойство инерции, то есть существование n положительных чисел, связывая каждое число с одной частицей и произвольно выбирая одно из чисел?.. Если кто-либо сделает это допущение, то его работа будет сводиться к подсчету отношений масс частиц и взаимодействия между ними. Его проблемой будет проблема вычислений» [7]. Если для Пендсе величины m_k в уравнении (1) все еще имели значение масс n частиц, как это ранее предполагалось согласно определению Маха, то Саймон использует уравнение (1) и соответствующее уравнение для сохранения момента импульса

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (\boldsymbol{r}_k \times \ddot{\boldsymbol{r}}_k) = 0 \qquad (2)$$

в качестве определения величин m_k на основе статистических расчетов по аналогии с методами, употребляемыми в эконометрике [8].

Обычно предметом любого исследования в динамике является вычисление движений или траекторий рассма-

---

[7] C. G. P e n d s e, A further note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics, «Philosophical Magazine», **27**, 55 (1939).

[8] См. C. K o o p m a n s, ed., «Statistical inference in dynamic economic models» (Wiley, New York, Chapman & Hall, London, 1950), 1—265; A. W a l d, Selected papers in statistics and probability (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955), 569—575.

триваемых частиц. Саймон [9] оборачивает проблему и пытается из известных наблюдаемых движений вывести физическое значение математических величин, посредством которых исчисляется движение. С точки зрения вышеупомянутого метааксиоматического требования, которое Саймон полностью принимает, понятия, подобные силе или моменту вращения, поскольку эти понятия относятся к ненаблюдаемым величинам, должны быть определимыми понятиями [10]. Следовательно, уравнения (1) и (2) не могут рассматриваться как выведенные из закона силы, но они должны быть взяты в качестве определения для «изолированных» движений при условии, если скалярные величины m_k являются положительными. Предполагая возможность только положительных масс, Саймон вводит понятие массы, сопровождая это следующими предварительными определениями:

Определение 1. Движение (π) есть конечный точечный ряд, $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, на котором определена для $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ регулярная векторная функция $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i[x_i(t), y_i(t), z_i(t)]$. Здесь x, y, z, t — действительные числа, и x, y, z — однозначные функции от t.

Определение 2. Вектор $\mathbf{r}_i(t)$ называется положением P_i в момент t движения (π).

Определение 3. Если существует скалярный ряд $\{m_i\}$, $m_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, постоянный по отношению к t, такой, что (a) $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \equiv 0$, (b) $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i [\mathbf{r}_i(t) \times \ddot{\mathbf{r}}_i(t)] \equiv 0$ (оба выражения тождественные в t), тогда ряд $\{P_i\}$ вместе с объединенными векторами $\{\mathbf{r}_i(t)\}$ и скалярами $\{m_i\}$ называется собственным изолированным движением $[[\pi]]$.

Определение 4. Элемент P_i вместе с функциями $\mathbf{r}_i$ и m_i, определенными на нем, называется точечной массой или частицей в $[[\pi]]$.

Таким образом, частица в аксиоматической системе Саймона определяется как точка (понятие точки есть

---

[9] Herbert A. Simon, The axioms of Newtonian mechanics, «Philosophical Magazine», 38, 888—905 (1947).

[10] Herbert A. Simon, The axiomatization of classical mechanics, «Philosophy of Science», **21**, 340—343 (1954).

первоначальное понятие в этой системе), связанная с траекторией $\mathbf{r}_i$ и положительным скаляром m_i. Понятие массы вводится посредством следующего определения.

Определение 5. Положительный скаляр m_i называется массой P_i в $[[\pi]]$.

Величины m_i определения 3 не являются необходимо и единственным образом определенными, как это уже было показано Пендсом[11] при помощи равномерно вращающегося правильного многоугольника с n сторонами, вершины которого являются местами частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Необходимое и достаточное условие для единственности масс m_i (разумеется, с точностью до коэффициента пропорциональности) дается следующей теоремой.

Теорема. Массы являются единственным образом определимыми, если и только если не существует никакого надлежащего подмножества (π') от множества движения (π), на котором может быть определено изолированное движение.

Движение называется дизъюнктивным, если $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = 0$. Движение фиксированных звезд представляет собой с хорошим приближением дизъюнктивное движение. Это следует из только что приведенной теоремы, согласно которой массы дизъюнктивного движения не являются единственным образом определенными. Проблема, состоящая в том, как выбрать подходящую систему отсчета, относительно которой массы при их однозначном определении имели бы свой обычный физический смысл, может быть решена, согласно Саймону, только посредством дополнительной физической гипотезы.

Физическая гипотеза. Существует класс галилеевых систем отсчета, по отношению к которым движение фиксированных звезд (за исключением двойных звезд) является дизъюнктивным.

Масса, определенная по отношению к такой системе отсчета, называется ньютоновской инертной массой.

Согласно представленной здесь формализации механики, массы определяются путем математических вычислений как численные коэффициенты в некоторых определен-

---

[11] C. G. Pendse, A further note on the definition and determination of mass in Newtonian mechanics (см. сноску 7).

ных уравнениях, которые характеризуют определенные классы движений или систем. Концепция Маха относительно понятия массы как математической величины, которая просто удовлетворяет важному уравнению [12], полностью реализована в представлении этого понятия Саймоном.

Однако с точки зрения современного понимания самих определений могут быть выдвинуты некоторые возражения против логической обоснованности саймоновского способа определения массы. Со времени важных исследований Тарского о параллелизме между аксиомами, теоремами и доказательствами, с одной стороны, и первоначальными понятиями, определимыми терминами и определениями — с другой [13], вопрос о том, являются ли первоначальные понятия данной дедуктивной теории взаимонезависимыми, стал предметом методологического изучения, так же как и проблема логической независимости аксиом (равно как их полнота и последовательность) стала важной темой фундаментальных исследований после опубликования (1899) Гильбертом «Оснований геометрии» [14].

Тарский вводит экстралогическую константу a как поддающуюся определению по отношению к системе предложений X (например, дедуктивной теории) в терминах b_1, b_2, . . . системы B (на основе X), если a и термины B встречаются в системе X и если по крайней мере одно предложение следующей структуры выводимо из предложений X:

$$(x) : x = a \cdot \equiv \cdot \phi\,(x;\ b_1,\ b_2,\ \ldots),$$

где ϕ обозначает любую функцию предложения, которая содержит x как единственно изменяющуюся величину и в которой экстралогическими константами (первоначальными или определенными) являются только b_1, b_2, . . . из B. Если описать содержание вышеприведенной формулы без использования символического языка, то можно

[12] E r n s t M a c h, Die Prinzipien der Wärmelehre: «...nichts als die Erfüllung einer wichtigen Gleichung...»

[13] A l f r e d T a r s k i, Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów, «Przeglad filozoficzny», 37, 438—460 (1934). См. также A. T a r s k i, Logic, semantics, metamathematics (Oxford University Press, New York, 1956), chap. 10.

[14] Д. Г и л ь б е р т, Основания геометрии, М.—Л., 1948.

сказать следующее: «ϕ представляет собой определение a, если для каждого x, x удовлетворяет ϕ, если и только если x тождествен a». На основе этого определения самой процедуры определения может быть доказана следующая теорема.

Теорема. Термин a поддается определению в только что описанном смысле, если и только если формула

$$(x_1, x_2) : \phi (x_1 : b_1, b_2, \ldots) \cdot \phi (x_2 : b_1, b_2, \ldots) \rightarrow x_1 = x_2$$

является логически доказуемой [15].

Используя метод Падоа [16], мы в состоянии проверить, будет ли данный термин в дедуктивной теории первоначальным или поддающимся определению. В применении процедуры Тарского к аксиоматизации механики Саймоном пусть ϕ обозначает конъюнкцию уравнений (a) и (b) в определении 3 (см. стр. 123), B обозначает систему траекторий частиц для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а x обозначает скаляры $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, которые удовлетворяют ϕ в терминах B. Так как, вообще говоря (как, например, в случае дизъюнктивного движения только одной частицы), численные значения масс не являются однозначно определенными, то вышеупомянутая теорема показывает, что понятие массы в процедуре Саймона не поддается определению в смысле Тарского и Падоа. Таким образом, понятие массы, несмотря на то что оно означает ненаблюдаемую величину, должно быть первоначальным понятием.

Для того чтобы избежать такого неудовлетворительного заключения, Саймон предложил интересное разрешение этой трудности в докладе, представленном Между-

---

[15] Эта теорема представляет собой простое видоизменение теоремы 2, как показано Тарским; см. A. T a r s k i, Logic, semantics. metamathematics, chap. 10, 303.

[16] A. P a d o a, Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque, «Bibliothèque du Congrès International de Philosophie» (Paris, 1901), vol. 3; см. также «Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre», в: «Comptes rendus du Deuxième Congrès International des Mathematiciens» (Paris, 1902), p. 249—256.

О методе Падоа см. E. W. B e t h, The foundations of mathematics (North Holland, Amsterdam, 1959), chap. 4, sec. 34; chap. 7, sec. 55; chap. 11, sec. 94; J. C. C. M c K i n s e y, On the independence of undefined ideas, «Bulletin of the American Mathematical Society», 41, 291—297 (1935); P. S u p p e s, Introduction to logic (Van Nostrand, Princeton, New York, Toronto, London, 1958), p. 169.

народному симпозиуму по аксиоматическому методу [17]. Видоизменив точность определений Тарского, Саймон ввел определение, которое он назвал общей определимостью.

Определение. Формула $\phi(x;\ b_1,\ b_2,\ \ldots)$ обобщенно определяет экстралогическую константу a, если для каждого x при условии, когда x тождествен a, x удовлетворяет ϕ. Или на языке символической логики:

$$(x) : x = a \rightarrow \phi(x;\ b_1,\ b_2,\ \ldots).$$

Введение импликации (вместо эквивалентности, по выражению Тарского) исключает доказательность выше упомянутой теоремы и, таким образом, лишает законной силы применение метода Падоа для исследования логической (общей) определимости понятия массы.

Введение понятия массы посредством статистических расчетов заслуживает некоторых дальнейших замечаний. Как мы уже видели, никакие попытки формализовать. механику Ньютона на основе точного и явного определения массы не принесли большого успеха. Это произошло потому, что такого рода определения либо должны были основываться на понятии силы как первоначальном понятии, либо предполагать некоторый динамический закон, который явно или неявно снова ведет к понятию силы. К этому следует добавить трудности, связанные с неопределенностью выявления соответствующей инерциальной системы. Уайтхед справедливо замечает: «Мы получаем наше знание о силах, имея некоторую теорию массы, а наше знание относительно массы мы имеем на основании некоторой теории относительно сил» [18]. Хотя ньютоновская механика является простейшей теорией, какую физика когда-либо создавала, и хотя для обычных физических объектов средних масштабов механика Ньютона в высшей степени справедлива, тем не менее ее логическая структура не поддается попыткам полного логического анализа, если допустить, что такой анализ предполагает явное определение содержащихся в этой структуре фундаментальных понятий*.

---

[17] См. «The axiomatic method, Proceedings of an International Symposium», p. 446 (сноска 6).

[18] A. N. W h i t e h e a d, An enquiry concerning the principles of natural knowledge (Cambridge University Press, New York, 1919), p. 18.

С точки зрения этой ситуации, вероятно, оправданным будет не настаивать на явном определении основных понятий до построения теории, но, скорее, необходимо принять значимость этих понятий *посредством* конструирования самой теории. В противоположность чисто гипотетико-дедуктивной теории, например аксиоматизированной геометрии, где первоначальные понятия (подобные точке, прямой линии и т. д.) могут быть взяты как неявно определяемые системой аксиом данной теории [19], в механике должны быть рассмотрены и определены семантические правила и соотнесения с опытом, и, если даже определяемое носит характер неявного, в конечном счете оно должно поддаваться определению в его количественных аспектах посредством обращения к операциональным определениям. Действительно, уже маховское определение массы согласуется с этим принципом. Мах не говорил, что́ представляет собой масса реально, но, скорее, продвигал неявное определение понятия в направлении количественного определения к некоторой операциональной процедуре. Более того, его определение, будучи эквивалентным третьему закону Ньютона, является составной частью теории механики, а не предшествует ей. Метод статистического вывода, показанный на примере определения массы Саймоном, ясно и прозрачно выражает ту идею, что только путем внутренних отношений с другими понятиями теории — в данном случае с эмпирически определяемыми ускорениями — определение массы становится действительно значимым.

---

[19] См. «Journal of Symbolic Logic», 7, 92 (1942).