Глава XIV

ПОНЯТИЕ МАССЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Хотя логико-математические основания нерелятивистской квантовой механики конечного числа степеней свободы — по крайней мере с технической точки зрения — достаточно разработаны для последовательной формулировки дедуктивной теории, тем не менее семантическая интерпретация и в особенности методологическая роль наблюдаемых величин все еще остается неопределенной. Никогда, кажется, основательно не выяснялся логико-методологический статус понятия массы в структуре классической квантовой механики.

Обычная процедура состоит в том, что понятие массы непосредственно переносится из классической механики в различные представления квантовой механики. Масса, таким образом, выступает как особого рода параметр в формулировках квантово-механических проблем, трактуемых посредством операторов и функций состояния. Вопрос, не является ли сама масса наблюдаемой величиной или чем-то выводимым из наблюдаемых величин и не представима ли она при помощи операторов подобно другим наблюдаемым величинам, вообще говоря, даже не ставится.

Можно показать, что дефиниция и установление массы в ньютоновской манере могут быть на законном основании приняты в квантовой механике, так как уравнения движения Ньютона, согласно хорошо известным теоремам Эренфеста и других или согласно принципу соответствия, являются — по крайней мере в качестве «теорем о среднем» — логическим следствием фундаментальных уравнений квантовой динамики [1]. Необходимо, однако, понимать,

[1] P. Ehrenfest, Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik, «Zeitschrift für Physik», 45, 455—457 (1927). См. также A. E. Ruark, «Journal of the Optical Society of America» 16, 40—43 (1928) и «Physical Review», 31, 533—538 (1928).

что теоремы Эренфеста обнаруживают только аналогию между динамическим поведением волнового пакета и поведением ньютоновской частицы; в концептуальном отношении они не сводят первый к последней. Принцип соответствия, кроме того, несмотря на его историческое и эвристическое значение для развития квантовой теории не составляет неотъемлемой части самой теории. В самом деле, строгое выведение принципов квантовой механики из классической физики невозможно, несмотря на тот факт, что волновая механика Шрёдингера переходит в классическую механику частиц подобно тому как физическая оптика переходит в геометрическую. Не существует и не может существовать логического вывода уравнения Шрёдингера из классической механики.

Возможно, будет менее спорным рассматривать m в основных уравнениях квантовой механики сначала просто как параметрическую характеристику специального типа частиц, к которым эти уравнения относятся, и физически определять ее в качестве коэффициента инерции в дальнейшем развитии теории. Предварительная интерпретация параметра m и его операциональное определение могут быть даны при помощи уравнения Луи де Бройля для дифракционного процесса

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (1)$$

где длина волны λ измеряется на основании дифракционной картины, а v — при помощи одного из конвенциональных методов определения скорости. Параметру m в уравнении (1) первоначально не придавали никакого инерциального смысла. Затем возник вопрос, может ли интерпретация m как инерциального коэффициента выводиться из одних лишь волновых свойств материи и излучения. Действительно, можно показать [2], что уравнение Луи де Бройля, соотношение между энергией и частотой $E = h\nu$ и уравнения лоренцевых преобразований ведут к инерциальной интерпретации коэффициента m в уравнении (1). Интересно, что такое выведение инерционных свойств материи из ее волновых аспектов, по-видимому, не являет-

---

[2] Richard Schlegel, Wave and inertial properties of matter, «American Journal of Physics», 22, 77—82 (1954).

ся удовлетворительной процедурой для введения понятия массы в классическую квантовую механику, потому что инертная масса появляется здесь как релятивистский эффект.

Более последовательным и созвучным духу квантовой механики подходом, является, возможно, приписывание плотности непосредственно волновой функции с расщеплением по номинально бесконечному волновому фронту. Интегрирование этой плотности по всему трехмерному пространству дало бы тогда значение массы частицы, представленной волной или волновым пакетом. Такое определение массы в квантовой механике было и в самом деле разработано Эддингтоном [3] в его переформулировке принципа исключения путем приписывания некоторого значения насыщения для плотности элементарной волновой функции.

Поправки, полученные Ферми и Вильсоном в их попытке примирить электромагнитную интерпретацию массы с теорией относительности, содержат, как мы уже видели, определенные положения, чуждые электромагнитной теории. Резонно задать вопрос: нельзя ли такое обращение за помощью к чуждым электромагнетизму положениям рассматривать как указание на то, что одна электромагнитная теория не способна объяснить инерционные свойства материи?

Исследуем эту проблему с позиций современной теории поля. В классической физике понятие массы частицы, вообще говоря, было независимым от понятия поля. Частицы и поля рассматривались как два существенно различных фактора. Частицы были источниками поля и испытывали действие со стороны поля, но не были частями поля. Масса появлялась в уравнениях движения в форме параметра, который был характеристикой частицы при обсуждении и который описывал ее инерциальное поведение. Массу в этом смысле называли механической массой частицы и обозначали через m_m. Электромагнитная масса, обсуждавшаяся в главе XI, была в действительности исключением, так как ее происхождение предполагалось лежащим всецело во взаимодействии между зарядом

[3] Arthur Eddington, A new derivation of the quadratic equation for the masses of the proton and electron, «Proceedings of the Royal Society», 174, 16—41 (1940).

частицы и электромагнитным полем. Масса в этой теории была производным понятием, но заряды и поле были еще взаимно несводимыми и существенно различными агентами. Масса частицы, которая, как предполагалось, возникает при взаимодействии с полем частицы (с «собственным полем») или считалась порожденной только этим полем, была названа полевой массой и обозначалась через m_f.

Теория, в которой полная масса частицы есть ее полевая масса, будет называться масс-унитарной. Следуя Борну и Инфельду [4], мы будем называть некоторую теорию унитарной, если она постулирует существование только одной физической сущности. Унитарная теория поля всегда масс-унитарна, но не всякая масс-унитарная теория является обязательно унитарной. Электромагнитная теория массы, например, была попыткой сформулировать масс-унитарную теорию, но она не была унитарной теорией, так как заряды и поля были взаимно несводимыми понятиями [5]. Масс-унитарная теория должна удовлетворять следующим условиям:

(1) Полная энергия U_f поля, порождаемого частицей, должна быть конечной (то есть нерасходящейся) величиной.

(2) U_f/c^2 должна быть равна экспериментально определяемому значению массы частицы.

(3) Импульс G_f должен быть конечной (то есть нерасходящейся) величиной.

(4) G_f и U_f должны образовывать четырехмерный вектор.

(5) Теория должна приводить к уравнениям движения частицы.

(6) Теория должна давать значение спина частицы, совпадающее с экспериментальным.

Так как спин частицы представляет собой квантово-механический эффект, условие (6) приложимо только к квантово-полевым теориям, но не к классическим теориям

---

[4] M. Born and L. Infeld, Foundations of the new field theory, «Proceedings of the Royal Society», 144, 425 (1934).

[5] Терминология в научной литературе в этом отношении непоследовательна. Французские теоретики обычно используют термин théorie unitaire в смысле английского unified theory; см., например, A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Paris, 1955), p. 150. Ржевуский использует термин «унитарный» в смысле нашего «масс-унитарный» и т.д.; J. Rzewuski, Field theory (Warsaw, 1958), p. 259.

поля, которые мы будем обсуждать первыми. Для того чтобы проверить, является ли классическая теория электромагнитного поля масс-унитарной, напомним, что импульс P_m и энергия E $\left(\text{или, более точно, } \frac{iE}{c}\right)$ частицы (электрона) образуют четырехмерный вектор. Если F_{ik} — тензор электромагнитного поля [6], а f_k — плотность силы Лоренца, то

$$f_k = \frac{1}{4\pi} F_{kn} \frac{\partial F_{nr}}{\partial x_r}. \qquad (2)$$

Известно, что f_k связано с тензором энергии-импульса электромагнитного поля T_{mn} уравнением

$$f_k = \frac{\partial T_{kn}}{\partial x_n}, \qquad (3)$$

где

$$T_{kn} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{kr}F_{rn} + \frac{1}{4}\delta_{kn}F_{qp}F_{qp}\right). \qquad (4)$$

Интегрируя левую часть уравнения (3) по инвариантному четырехмерному объему $d\Omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$ $(dx_4 = icdt)$, получим

$$ic \int\int\int\int f_1\, dV\, dt = ic \int F_x\, dt = icG_{mx}, \qquad (5)$$

где F_x есть x-компонента силы, действующей на частицу, а $G_{mx} = P_{mx}$ есть x-компонента (механического) импульса частицы. Для временно́й компоненты получим

$$ic \int\int\int\int f_4\, dV\, dt = -\int w\, dV = -E, \qquad (6)$$

где w обозначает плотность энергии. Так как интегрирование четырехмерного вектора по инвариантному объему $d\Omega$ не разрушает тензорного характера четырехмерного вектора, то становится ясно, что импульс и энергия частицы снова комбинируются в четырехмерный вектор.

---

[6] См. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1960, стр. 76—79 Повторение индексов предполагает суммирование.

Вычисляя интеграл в правой части уравнения (3), получим для пространственных компонент

$$ic \int\int\int\int \frac{\partial T_{1n}}{\partial x_n} dV\, dt =$$

$$= ic \int\int\int\int \left(\frac{\partial T_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial T_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial T_{14}}{ic\, dt} \right) dV\, dt =$$

$$= ic \int dt \oint T_{1N}\, d\sigma - \frac{i}{c} \int S_x\, dV = ic \int dt \oint T_{1N}\, d\sigma - icG_x^{(f)}, \quad (7)$$

где интеграл от дивергенции преобразуется в поверхностный интеграл с помощью формулы Гаусса и где S_x есть x-компонента вектора Пойнтинга, а $G_x^{(f)}$ — x-компонента импульса поля. Для временно́й компоненты подобное вычисление дает выражение

$$\int dt \oint S_N\, d\sigma + E^{(f)}, \quad (8)$$

где $E^{(f)} = U_f$ есть полная энергия поля. Приравнивая (7) и (8) к (5) и (6), находим, что

$$P_{mx} = G_{mx} = -G^{(f)} + \int dt \oint T_{xN}\, d\sigma, \quad (9)$$

$$-E = E^{(f)} + \int dt \oint S_N\, d\sigma. \quad (10)$$

Интегрирование в последних двух уравнениях дается по времени потоков энергии и импульса через поверхность и, таким образом, зависит от истории системы во все предшествующие моменты времени. Они не могут быть интерпретированы как импульс или энергия электромагнитного поля. Поэтому $C^{(f)}$ и U_f — импульс и энергия электромагнитного поля — не являются компонентами четырехмерного вектора и не могут быть отождествлены с импульсом и энергией частицы. Другими словами, полевая масса m_f не может быть отождествлена с механической массой m_m, и классическая теория электромагнитного поля не является масс-унитарной.

Тот результат, что в случае электромагнитного поля компоненты импульса поля $G_1^{(f)} = G_x^f, \ldots, G_4^{(f)} = E^{(f)} = U_f$ не образуют четырехмерный вектор, следует также непосредственно из теоремы, которую, согласно Густаву

Ми [7], обычно называют теоремой Лауэ. Если T^0_{kn} есть тензор энергии-импульса, а dV^0 — трехмерный объем по отношению к системе отсчета, в которой заряженная частица (электрон), порождающая поле, покоится, то $G_k^{(f)}$ является четырехмерным вектором, если и только если $\int T^0_{rs}dV^0 = 0$ для всех $r = s$, за исключением $r = s = 4$.

Далее, в системе, относительно которой частица покоится, вектор магнитного поля исчезает, плотность полной энергии покоя равна $T^0_{44} = (1/8\,\pi)E^2$ и, как мы знаем из максвелловского тензора напряжений, $T^0_{11} = (1/4\,\pi)(E_x^2 - 1/2E^2)$. Таким образом, $\int T^0_{44}dV^0 = (1/8\pi)\int E^2 dV = U^0$, и $\int T^0_{11}dV^0 = -1/3U^0 \neq 0$. Следовательно, теорема Лауэ неприменима к электромагнитному полю, $G_k^{(f)}$ не есть четырехмерный вектор и условие (4) для масс-унитарных полей не выполняется.

Поэтому любая попытка построить масс-унитарную теорию поля должна начинаться с далеко идущей модификации фундаментальных уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Следует признать, что большинство из таких переформулировок теории Максвелла — Лоренца

---

[7] Gustav Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie «Annalen der Physik», 40, 7 (1913). Теорема Лауэ может быть доказана при помощи уравнений преобразования для тензора энергии-импульса: $T_{14} = i\beta\gamma^2 (T^0_{11} - T^0_{44})$ и $T_{44} = \gamma^2 (T^0_{44} - \beta^2 T^0_{11})$, где вследствие сферической симметрии покоящегося поля должны учитываться только диагональные члены. Здесь $G_k^{(f)}$ определяется с помощью $(i/c)\int T_{k4}\, dV$. Таким образом, $G_k^0 = 0$ для $k = 1, 2, 3$, а $G_4^0 = (i/c)\int T_{44}dV = (i/c)\, E^{(f)}$. Если $G_k^{(f)}$ есть четырехмерный вектор, то он удовлетворяет уравнениям преобразования $G_1^{(f)} = -i\beta\gamma G_4^0 = (\beta\gamma/c)\int T^0_{44}\, dV^0$ и $G_4^{(f)} = (i\gamma/c)\int T^0_{44}\, dV^0$. Кроме того, мы имеем $G_1^{(f)} = (i/c)\int T_{14}dV = (\gamma\beta/c)\int (T^0_{44} - T^0_{11})\, dV^0$ и $G(f) = (i\gamma/c)\int (T^0_{44} - \beta^2 T^0_{11})\, dV^0$ вместе с $dV = \gamma dV^0$. Сравнение показывает, что $\int T^0_{11}\, dV^0 = 0$.

направлены не столько на масс-унитарный вывод электронной массы, сколько выполнены с несколько иными целями. Они мотивированы желанием преодолеть определенные трудности, касающиеся природы квантовой электродинамики. Современная квантовая электродинамика, развитая Дираком [8], Гейзенбергом и Паули [9], Иорданом и Ферми, основана на понятиях электромагнитного поля и электронно-позитронного поля и является как теорией поля, так и теорией элементарных частиц. Состояния квантованного электромагнитного поля ассоциируются с фотонами, а состояния квантованного электронно-позитронного поля — с электронами. На ранней стадии развития этой теории было ясно, что собственная энергия электрона в самом нижнем порядке расчета по теории возмущений оказывается расходящейся величиной [10]. И хотя эта расходимость на основании дираковской теории дырок вследствие подавления части собственной энергии вакуума имела только логарифмическую природу — в противоположность линейной расходимости классической собственной энергии,— неизбежное следствие бесконечности массы для элементарной частицы, казалось, делало теорию бесполезной для всех практических целей. Чтобы облегчить разрешение этих трудностей с расходимостью, полагали, что в первую очередь желательно пересмотреть классическую электромагнитную теорию так, чтобы избавиться от этих бесконечностей в классической области, и надеялись на то, что квантование такой модифицированной классической теории приведет затем к последовательной квантовой электродинамике.

В то время одним из самых успешных подходов казалась борновская нелинейная теория электромагнитного

---

[8] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the emission and absorption of radiation, «Proceedings of the Royal Society», **114**, 243—265 (1927); «The quantum theory of dispersion», ibid., 710—728.

[9] W. Heisenberg und W. Pauli, Zur Quantendynamik der Wellenfelder, «Zeitschrift für Physik», **56**, 1—61 (1929).

[10] I. Waller, Bemerkungen über die Rolle der Eigenenergie des Elektrons in der Quantentheorie der Strahlung, «Zeitschrift für Physik», **62**, 673—676 (1930); J. R. Oppenheimer, Note on the theory of the interaction of field and matter, «Physical Review», **35**, 461—477 (1930).

поля [11]. Вспомним, что уравнения поля являются следствием принципа наименьшего действия, согласно которому интеграл от лагранжиана имеет стационарное значение [12]. Ввиду инвариантности $E^2 - H^2$ Борн постулировал в качестве лагранжиана функцию

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi}\left[1 - \left(1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}\right)^{1/2}\right], \tag{11}$$

где E_0 — так называемое максимальное поле. Для $E \ll E_0$ и $H \ll H_0$ L_0 переходит в классический лагранжиан $(1/8\pi)(E^2 - H^2)$ электромагнитного поля. Для чисто электростатического поля с взаимодействием между электроном и полем уравнение (11) должно быть модифицировано

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi}\left[1 - \left(\frac{E^2}{E_0^2}\right)^{1/2}\right] - e\varphi\delta(r), \tag{12}$$

где φ — потенциал взаимодействия, e — заряд, а $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. Из уравнения (12) могут быть рассчитаны компоненты тензора энергии-импульса с результатом, что

$$\int T_{11}^0\, dV^0 = \frac{e^2}{r_0}\left(\frac{1}{3}c_1 - c_2\right), \tag{13}$$

$$\int T_{44}^0\, dV^0 = \frac{e^2}{r_0}(c_1 - c_2), \tag{14}$$

где

$$r_0 = \left(\frac{e}{E_0}\right)^{1/2}, \quad c_1 = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^{1/2}}\, dx,$$

$$c_2 = \int_0^\infty x^2\left[1 - \frac{x^2}{(1+x^4)^{1/2}}\right] dx.$$

Интегрирование по частям выражения для c_2 показывает, что $c_2 = {}^1/_3 c_1$. Уравнение (13) обнаруживает, что согласно

---

[11] Max Born, On the quantum theory of the electromagnetic field, «Proceedings of the Royal Society», **143**, 410—437 (1934); Max Born and Leopold Infeld, Foundations of the new field theory, ibid., **144**, 425—451 (1934). Идея возможности нелинейных теорий поля может быть прослежена до появления статьи Густава Ми: Gustav Mie, «Grundlagen einer Theorie der Materie», «Annalen der Physik», **37**, 511—534 (1912); **39**, 1—40 (1912); **40**, 1—66 (1913).

[12] См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, стр. 76—83.

теореме Лауэ выполнено условие (4) для масс-унитарных полей. Полевая масса m_f может быть вычислена из уравнения (14), что дает

$$m_f = \frac{1}{c^2} \int T^0_{44}\, dV^0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{c_1}{c^2} \approx 1{,}24 \frac{e^2}{c^2 r_0}\,. \qquad (15)$$

Если для m_f подставить электромагнитное значение собственной массы электрона ($m_f = 9{,}1085 \cdot 10^{-28}$ *г*), константа r_0 оказывается равной классическому радиусу электрона $r_0 \approx 3{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см*[13]. Условия (1), (2), (3) для масс-унитарных полей поэтому выполняются. Наконец, условие (5) также выполняется, так как в нелинейной теории закон движения есть следствие уравнений поля, как это известно из общей теории относительности [14]. Следовательно, борновская нелинейная теория электромагнитного поля является масс-унитарной теорией.

Что же касается экспериментального подтверждения теории, следует заметить, что нелинейные эффекты, возникающие из-за отсутствия принципа суперпозиции — такие, как рассеяние (или отражение) излучения излучением,— имеют крайне малую величину и лежат за пределами экспериментальной верификации или эмпирического объяснения [15]. Но главной причиной, почему борновская нелинейная теория не оправдала возлагавшихся на нее надежд, были не вопросы эксперимента, а ее неясность и непригодность для квантово-механических обобщений, которые могли бы устранить бесконечные расходимости не только так называемой «продольной» собственной энергии, связанной с классической теорией поля, но также и «поперечной» собственной энергии, обусловленной квантово-механическим взаимодействием заряженной частицы с вакуумными флуктуациями.

---

[13] В борновской теории электрон представляет собой точечную частицу.

[14] См. A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, The gravitational equations and the problem of motion, «Annals of Mathematics», 39, 65 (1938); см. также Max Jammer, Concepts of force, p. 262—263.

[15] Таким образом, например, столкновение двух фотонов, или квантов излучения, может привести к возникновению виртуальной пары и последующей ее аннигиляции, восстанавливающей два фотона, что, вообще говоря, эквивалентно рассеянию излучения на излучении.

Другой подход к преодолению трудностей, связанных с расходимостью m_f для точечной частицы, который также берет начало в классической процедуре исключения сингулярностей, обусловленных электромагнитной собственной энергией точечного источника, без отказа от справедливости уравнений Максвелла в окрестности источника и без нарушения релятивистской инвариантности,— это λ-предельный процесс, введенный в 1933 году Грегором Венцелем [16]. Путем использования отдельных временных координат для каждой заряженной частицы и для поля и при помощи формализма Дирака — Фока — Подольского, формфактор выбирается так, чтобы интегральная энергия поля была равна нулю. Этот прием означает полное исключение m_f. Другие допущения, имеющие в виду те же цели, вводят дополнительные компенсирующие поля так, чтобы свести к нулю полную собственную энергию [17].

Наиболее революционными из допущений, сделанных с целью преодоления трудностей, связанных с расходимостью массы и энергии, по-видимому, являются те, которые провозглашают фундаментальный пересмотр применения понятий пространства и времени по отношению к элементарным частицам. Еще в 1930 году Амбарцумян и Иваненко [18], исследуя понятие пространственной протяженности элементарных частиц, выдвинули идею кубической пространственной решетки с конечной константой решетки и программу замены дифференциальных уравнений физической теории уравнениями в конечных разностях. Ватагин [19] ввел идею элементарной длины под видом

[16] G r e g o r W e n t z e l, Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen, «Zeitschrift für Physik», 86, 479—494 (1933); 87, 726—733 (1934); «Recent research in meson theory», в: «Reviews of Modern Physics», 19, 1—18 (1947).

[17] Штюкельберг использовал компенсирующее скалярное поле; E. C. G. S t ü c k e l b e r g, Un nouveau modèle de l'électron ponctuel en théorie classique, «Helvetica Physica Acta», 14, 51—80 (1941). Бопп и Ланде с этой целью вводили векторные поля; см. F. B o p p, Eine lineare Theorie des Elektrons, «Annalen der Physik» 38, 345—384 (1940) и A. L a n d é Finite self-energies in radiation theory, «Physical Review», 60, 121—127 (1941).

[18] V. A m b a r z u m i a n und D. I w a n e n k o, Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons, «Zeitschrift für Physik», 64, 563—567 (1930).

[19] G. W a t a g i n, Bemerkungen über die Selbstenergie der Elektronen, «Zeitschrift für Physik», 88, 92—98 (1934).

G-фактора. В 1938 году Гейзенберг [20] подчеркнул преимущество введения универсальной элементарной массы. Шилд [21] в 1948 году сконструировал модель (дискретного) пространственно-временного дисконтинуума, которая допускает удивительно большое число лоренцевых преобразований и даже обнаруживает ряд необычных свойств, похожих на некоторые черты дираковской теории электрона. Недавно были сформулированы теории элементарных частиц, не использующие пространственно-временные координаты и трактующие пространство-время как статистическое понятие, подобно температуре в кинетической теории газов [22].

В общем, эти корректирующие процедуры, важные сами по себе, для развития современной теории поля были большей частью математическими ухищрениями, которые мало способствовали более глубокому пониманию природы массы. То же самое можно сказать о так называемых процедурах регуляризации в квантовой теории поля, введенных Крамерсом [23], чтобы избежать бесконечностей, обусловленных взаимодействием электрона с нулевыми флуктуациями электромагнитного поля. Вклад взаимодействия в массу частицы просто игнорируется как невыделимый из полной массы и массы, которая является конечной величиной, будучи суммой собственной массы и массы, которой обладала бы частица, если бы было выключено ее взаимодействие с полем. Процедуры подбора констант с целью учета конечности суммы для экспериментально наблюдаемой массы обычно трактуются как перенормировка. Эти процедуры перенормировки, даже если не учитывать их проблематических аспектов с чисто матема-

---

[20] W. Heisenberg, Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge, «Annalen der Physik», 32, 20—33 (1938).

[21] A. Schild, Discrete space-time and integral Lorentz-transformations, «Physical Review» 73, 414—415 (1948). См. также «Canadian Journal of Mathematics», 1, 29—47 (1949).

[22] Takao Tati, A theory of elementary particles, «Progress in Theoretical Physics», 18, 235—246 (1957). См. также «Nuovo cimento», 4, 75—87 (1956).

[23] H. A. Kramers, Non-relativistic quantum-electrodynamics and correspondence principle, «Rapports du 8 Conseil Solvay 1948» (Brussels, 1950), 241—265. Перепечатано в: «H. A. Kramer's collected scientific papers» (North Holland, Amsterdam, 1956).

тической точки зрения [24], не кажутся приводящими ни к последовательной интерпретации природы массы, ни к недвусмысленному предсказанию спектра масс элементарных частиц. Удовлетворительное квантово-электродинамическое объяснение природы массы, таким образом, все еще остается задачей для будущего.

Другая полевая теория, которую мы еще не упоминали — полевая теория par exellence,— это общая теория относительности. Поэтому представляется небесполезным завершить наше исследование теоретико-полевого понятия массы несколькими замечаниями о вкладе общей теории относительности в выяснение этого понятия.

Исторически масса появляется в контексте общей теории относительности в первую очередь в связи с так называемым принципом эквивалентности, выдвинутым Эйнштейном в 1916 году [25]. Равенство или пропорциональность между инертной и гравитационной массами указывает на возможность «оттрансформировать» однородные гравитационные поля. Вследствие слияния гравитационного силового поля с пространственно-временной структурой, эквивалентность или пропорциональность между инертной и гравитационной массой, которая в ньютоновской физике была эмпирическим и чисто случайным фактом, теперь становится объяснимой как следствие принципа ковариантности. Этот вывод, важный для объединения двух различных по происхождению понятий, с методологической точки зрения основан на традиционном понятии массы, или, другими словами, еще ничего не говорит о фундаментальном пересмотре понятия массы как таковой (ни инертной, ни гравитационной).

Следует, однако, напомнить, что пропорциональность между инертной и пассивной гравитационной массой, которая в ньютоновской физике была делом чистого случая, становится конститутивным принципом для общей теории относительности. Поясним этот пункт более детально.

Согласно принципу эквивалентности, так называемые силы инерции (как, например, центробежная сила), которые в ньютоновской механике имели характер фиктивных

---

[24] См., например, Д. И. Блохинцев, «Успехи физических наук», 61, 137 (1957) и «Fortschritte der Physik», 6, 246—269 (1958).

[25] А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1, стр. 452.

сил, обусловленных неподходящим выбором системы отсчета, в общей теории относительности интерпретируются как реальные силы, порождаемые удаленными массами Вселенной. Действительно, устранение принципиальной разницы между силами инерции и гравитационными силами является самым существенным в принципе эквивалентности (конечно, относящимся только к так называемым нестационарным полям). Центробежная сила,

$$F_c = m_i R\omega^2,$$

например, действующая на тело инертной массы m_i на расстоянии R от начала координатной системы, вращающейся с угловой скоростью ω, должна выражаться, подобно любой другой гравитационной силе, как произведение пассивной гравитационной массы и (отрицательного) градиента потенциала Φ:

$$F_c = -m_p \operatorname{grad}_R \Phi = -m_p \frac{\partial \Phi}{\partial R},$$

что представляет собой соответствующую формулировку уравнения Пуассона для рассматриваемого случая.

Из выражения линейного элемента ds^2 для вращающейся системы отсчета (скалярный) потенциал Φ дается формулой

$$\Phi = -\frac{1}{2} R^2\omega^2,$$

и, следовательно, центробежная сила определяется выражением

$$F_c = m_p R\omega^2,$$

которое показывает, что тождество $m_i = m_p$ лежит в фундаменте общей теории относительности.

В противоположность фундаментальной тождественности инертной и пассивной гравитационной массы общая теория относительности не может вывести тождественность активной и пассивной гравитационной масс (которая, как мы уже видели на стр. 133, была неотъемлемой частью оснований ньютоновской физики) из принципа действия и противодействия. В рамках общей теории относительности принцип действия-противодействия, основанный на понятии действия на расстоянии (и одновременности), несовместим с теоретико-полевым подходом. Однако ряд других соображений, как мы увидим ниже, приводит к выводу, что в общей теории относительности также должна существовать универсальная пропорциональность или равенство между этими двумя видами гравитационных масс.

Общерелятивистское понятие массы находилось сначала в положении, подобном тому, которое существовало в классической квантовой механике перед появлением квантовой теории поля. Чтобы сделать этот пункт яснее, рассмотрим хорошо известный пример шварцшильдовского линейного элемента для центрально-симметричного и статического гравитационного поля [26]. Чтобы получить строгое решение эйнштейновских уравнений поля для рассматриваемого случая, Шварцшильд показал, что общее выражение

$$ds^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n$$

пространственно-временной метрики может быть при упомянутых выше ограничениях переписано в виде

$$ds^2 = g_{11}\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + g_{44} c^2\, dt^2$$

и что полевые уравнения налагают на g_{44} условие

$$\frac{d}{dr} \log [r (g_{44} - 1)] = 0,$$

так что

$$g_{44} = 1 - \frac{2k}{r},$$

где k — пока не определенная константа. Так как линейное приближение уравнений поля показывает, что $^1/_2 c^2 (g_{44} - 1)$ играет роль ньютоновского потенциала Φ, то отсюда следует, что

$$g_{44} = 1 + 2\Phi.$$

В конце концов, так как в ньютоновской динамике для рассматриваемого случая уравнение Пуассона дает

$$\Phi = -G \frac{m}{r},$$

[26] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes, «Berliner Berichte» (1916), S. 189—196.

Шварцшильд пришел к выводу, что

$$g_{44}=1-\frac{G}{c^2}\frac{2m}{r}.$$

Другими словами, константа k путем аналогичных умозаключений отождествляется с активной гравитационной массой центрального тела (множитель пропорциональности G/c^2 приводит к изменению единиц). Степень, в которой метрика отклоняется от плоскости, таким образом, интерпретируется как масса.

Теперь должно быть ясно, почему раннее развитие общей теории относительности, поскольку оно касается понятия массы, обнаруживает сходство с ранними стадиями квантовой механики. В обеих теориях понятие массы было введено по аналогии, и в обеих теориях оно вводилось, чтобы обеспечить в остальных отношениях абстрактную теорию точками соприкосновения с эмпирическими данными и фактами. Но в обеих теориях на этой стадии их развития понятие массы было незаконным элементом, чуждым их концептуальной структуре. Причина этой незаконности в общей теории относительности, конечно, совершенно другая, чем в квантовой механике. В общей теории относительности масса или эквивалентная ей энергия, вообще говоря, не является компонентой тензора в противоположность плотности, которая является T_{44}-компонентой тензора энергии-импульса. Так как тензор T_{mn} в общей теории относительности как теории поля определяет поведение физических процессов или событий, было бы логично определить массу как интеграл от T_{44} по трехмерному пространству. Этот интеграл, однако, представляет собой компоненту тензора только в пространстве нулевой кривизны. Таким образом, классическое определение массы как объема, помноженного на плотность (ньютоновское определение 1), которое концептуально гармонирует с теоретико-полевой точкой зрения, становится неприемлемым, и необходимо принять более общее понятие массы.

Проблема, как определить массу (или энергию) динамической системы в общей теории относительности однозначным, ковариантным и физически осмысленным образом, привлекала внимание Эйнштейна [27], Нордстрема [28], Клейна [29], Вейля [30] и других. В поисках решения казалось естественным обобщить процедуру, принятую в специальной теории относительности. Напомним, что в специальной теории относительности четырехмерный вектор энергии-импульса P (стр. 170), временна́я компонента которого равна $-E/c$, удовлетворяет соотношению

$$P^2 - E^2/c^2 = -m_0^2 c^2, \tag{16}$$

где P^2 — сумма квадратов пространственных компонент P, а m_0 — инертная собственная масса частицы или рассматриваемой системы. Но соотношение (16) само может трактоваться как определение массы при условии, что члены в левой части уравнения могут быть определены независимо.

Таким образом, возникает вопрос, существует ли в общей теории относительности вектор энергии-импульса для данной динамической системы. Эта проблема в некоторой степени была решена Эйнштейном и Клейном [31]. В специальной теории относительности, как мы знаем, законы сохранения энергии и импульса выражаются при помощи лоренц-инвариантного дифференциального уравнения

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0, \tag{17}$$

где T_{ik} — тензор полной энергии-импульса системы. Соответствующая формула для общей теории относительности требовала бы, чтобы ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса обращалась в нуль. Обращение в нуль ковариантной дивергенции тензора второго ранга в противоположность дивергенции вектора, подобного вектору плотности тока-заряда в общерелятивистской электроди-

---

[27] А. Эйнштейн, Закон сохранения энергии в общей теории относительности, «Собрание научных трудов», т. 1, стр. 650.

[28] G. Nordström, On the mass of material system according to the theory of Einstein, «Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wettenschappen te Amsterdam», 20, № 7 (1917).

[29] F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt, «Göttinger Nachrichten» (1918), S. 394—423.

[30] H. Weyl, Space-time-matter (Methuen, London, 1922), p. 268—273.

[31] См. сноски 27 и 29.

намике [32], не влечет, однако, за собой обращения в нуль обычной дивергенции, что необходимо для сохранения. Тем не менее Эйнштейн показал, что законы сохранения могли бы быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} = 0$$

с $\mathfrak{T}_i^k = (-g)^{1/2}(T_i^k + t_i^k)$, где $(-g)^{1/2} t_i^k$, которые Эйнштейн называл компонентами энергии гравитационного поля, построены из g^{mn} и их первых производных.

При помощи обычного применения четырехмерной теоремы Гаусса можно показать, что величины

$$P_i' = \frac{1}{c} \int \mathfrak{T}_i^4 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

постоянны во времени. К тому же Клейн продемонстрировал, что P_i' ведет себя при линейных преобразованиях подобно вектору. Так как в пространстве нулевой кривизны P_i' сводится к P_i специальной теории относительности, естественно определить массу системы по аналогии с уравнением (16) при помощи уравнения

$$m_0 = \frac{1}{c} (P_4'^2 - P_1'^2 - P_2'^2 - P_3'^2)^{1/2}. \tag{18}$$

Такое определение массы имело бы смысл в общей теории относительности только в том случае, если бы P_i' были независимы от выбора системы координат. К сожалению, по отношению к эйнштейновским компонентам энергии

---

[32] Напомним, что для контравариантного вектора φ^i

$$\operatorname{div} \varphi^i = \varphi^i_{,i} = \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^i} ((-g)^{1/2} \varphi^i) = 0,$$

предполагая, конечно, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [(-g)^{1/2} \varphi^i] = 0,$$

в то время как для тензора второго ранга уравнение

$$\operatorname{div} T^{ik} = T^{ik}_{;k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kr} T^{rk} + \Gamma^k_{kr} T^{ir} = 0$$

не влечет за собой

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

гравитационного поля это не так. Эйнштейну удалось только показать, что P_i' независимы от выбора квазигалилеевых координатных систем, то есть систем, координаты которых на достаточно больших пространственных расстояниях от системы и от четырехмерной области, проходимой ею (ее так называемой «трубки», или «канала»), допускают метрику пространства Минковского.

Ввиду этих трудностей Эддингтон и Кларк [33] в 1938 году допустили, что масса динамической системы должна определяться как «масса M эквивалентной частицы, которая дает тот же самый линейный элемент на больших расстояниях». Точнее говоря, это есть масса системы в рассматриваемый момент, в то время как расстояния должны быть не настолько велики, чтобы вызвать физически значимое временно́е отставание потенциалов. Кроме того, скорость и ускорение рассматриваемой частицы должны быть равны скорости и ускорению центра масс системы [34].

Ясно, что современное понятие массы гравитирующей механической системы учитывает тот факт, что в соответствии с эквивалентностью массы и энергии любая потенциальная или кинетическая энергия, остающаяся в системе, вносит вклад в ее массу. Действительно, Гиллоч и Мак-Кри [35], которые использовали это определение в своих расчетах массы вращающегося цилиндра, показали, что эта масса равна собственной массе цилиндра плюс его кинетическая энергия, деленная на c^2. В общем случае, однако, масса системы, как указали сами Эддингтон и Кларк [36], равна сумме собственных масс и энергий тел, образующих систему, при условии, если только момент инерции C (относительно центра масс) неускорен. Если m_i — собственные массы системы, а K и V — соответственно кинетическая и потенциальная энергии, то

---

[33] Arthur Eddington and G. L. Clark, The problem of n bodies in general relativity theory, «Proceedings of the Royal Society», 166, 465—475 (1938).

[34] Ibid., p. 468. Понятие «центр масс» определимо геометрически.

[35] Josephine M. Gilloch and W. H. McCrea, The relativistic mass of a rotating cylinder, «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society», 47, 190—195 (1951).

[36] «Proceedings of the Royal Society», **166**, 469 (1938).

общая формула для массы системы имеет вид:

$$M=\sum_i m_i+\frac{1}{c^2}(K+V)+\frac{1}{2}\frac{d^2C}{dt^2}. \qquad (19)$$

Классический принцип аддитивности масс, конечно, не является больше справедливым. Возможность приписать отдельным составляющим динамической системы индивидуальные значения масс, как это было до теории относительности, больше не кажется обоснованной. Это та цена, которую теория поля вынуждена уплатить за эмансипацию понятия энергии, о чем говорилось в главе XIII. Действительно, используя социологическую терминологию, можно сказать, что эмансипация энергии приводит к «коллективизму масс».

Определение массы, данное Эддингтоном и Кларком, как отметил сам Эддингтон спустя два года после его публикации, еще не является удовлетворительным с общерелятивистской точки зрения. Можно показать для него, что определенная величина становится пространственным интегралом от $T_{44}+t_{44}$, где t_{44} — выражения для потенциальной энергии. Члены t_{mn} — представляющие собой так называемый псевдотензор энергии-импульса, суть алгебраические функции напряженностей гравитационного поля (первые производные от g_{mn}) и, следовательно, в случае нелинейных координатных преобразований, не являются тензорами.

Кларк в статье «О гравитационной массе системы частиц» [37] вновь исследовал допущения, сделанные в 1935 году Уайттакером [38] и Русом [39], согласно которым понятие массы в общей теории относительности может быть определено при помощи теоремы Гаусса в ее четырехмерной формулировке. По аналогии с электростатикой, где заряд системы определяется через полный поток вектора электростатического поля сквозь замкнутую поверхность, окружающую систему, полный поток релятивист-

[37] «Proceedings of the Royal Society of Edinburgh», 62, 412—423 (1949).

[38] E. T. Whittaker, On Gauss' theorem and the concept of mass in general relativity, «Proceedings of the Royal Society», 149, 384—395 (1935).

[39] H. S. Ruse, Gauss theorem in a general space-time, «Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society», 4, 144—158 (1935).

ской гравитационной силы сквозь простую замкнутую поверхность пропорционален полной гравитирующей массе внутри поверхности с множителем пропорциональности 4π. Релятивистская трактовка, однако, усложняется тем, что гравитационная сила, измеряемая произвольным наблюдателем, есть функция положения наблюдателя, а также его скорости и ускорения. Уайттакеру удалось обобщить теорему Гаусса для обсуждаемого им случая статического гравитационного поля, а Рус в свою очередь обобщил формулу Уайттакера для общей метрики пространства-времени $ds^2 = g_{mn}\,dx^m dx^n$. Роль заряда, фигурирующего в электростатической теореме Гаусса, в расчетах Уайттакера играет выражение $T_{44} - {}^1/_2T$, а в расчетах Руса — $\lambda^i\lambda^k T_{ik} - {}^1/_2T$, где T_{ik} — тензор энергии, $T = g^{mn}T_{mn}$, а λ^i — направления (единичные векторы) мировых линий фундаментальных наблюдателей. Таким образом, ньютоновское понятие массы последовательно заменяется понятием тензора энергии. Так как последний необязательно обращается в нуль при отсутствии материи в классическом смысле слова и отличается от нуля при наличии полей, подобных электростатическому полю, то гравитирующей массе естественно приписать также некоторую форму энергии, содержащейся в поле сил.

Со строгой и последовательной теоретико-полевой точки зрения представление материи и энергии при помощи тензора T_{mn} должно рассматриваться только как предварительный прием, который, вероятно, следует заменить чисто теоретико-полевыми методами. Сам Эйнштейн очень сокрушался по поводу «незаконного брака между искусственным тензором энергии-импульса материи и тензором кривизны»[40]. Подход Уайттакера — Руса — Кларка к понятию массы, таким образом, еще не представляется конечным решением проблемы. Но прежде чем обсуждать понятие массы с точки зрения тех теорий, которые рассматривают материю как сингулярности поля, докажем пропорциональность активной гравитационной и инертной масс на основе тензора энергии-импульса.

---

[40] См. L. Infeld, On equations of motion in general relativity theory. «Helvetica Physica Acta, Supplementum IV, Jubilee of Relativity Theory, Proceedings» (Birkhäuser Verlag, Basel, 1956), p. 207. См. также A. Einstein, The meaning of relativity (Princeton University Press, Princeton, ed. 4, 1953), p. 81, 106, 165

Эйнштейновская оригинальная формулировка энергии или массы замкнутой системы, как мы видели на стр. 214—215, была основана на использовании квазигалилеевых координат и — что было даже более серьезным недостатком — не делала физически значимым понятие распределения энергии в пространстве [41].

В важной статье «О локализации энергии физической системы в общей теории относительности» [42] Мёллер недавно показал, что если эйнштейновский полный канонический псевдотензор энергии-импульса $\mathfrak{T}_i^k$, который может быть выражен так же [43], как дивергенция от

$$h_i^{kj} = \frac{g_{in}}{2\varkappa(-g)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g)(g^{kn}g^{jm} - g^{jn}g^{km})] \tag{20}$$

($\varkappa$ — эйнштейновская константа уравнений поля, связанная с гравитационной постоянной G уравнением $\varkappa = 8\pi G/c^4$), заменить новым псевдотензором энергии-импульса $h_i^{kj} + \psi_i^{kj}$, где ψ_i^{kj} определяется формулой

$$\psi_i^{kj} = h_i^{kj} - \delta_i^k h_r^{rj} + \delta_i^j h_r^{rk} \tag{21}$$

и имеет равную нулю дивергенцию, то оба вышеупомянутых недостатка могут быть преодолены. Таким образом, подход Эйнштейна — Клейна к общерелятивистскому определению инертной массы для замкнутой динамической системы через уравнение (18), где m_0 — инертная масса m_i, снова приобретает значительный интерес.

Из уравнения (21) или (20) можно сделать важный вывод, касающийся отношения между активной гравитационной массой и инертной массой в общей теории относительности, если вернуться для простоты к использованию квазигалилеевых координат.

В случае статической системы, достаточно удаленной от остальной материи Вселенной, метрика имеет вид шварцшильдовской [44]:

$$ds^2 = -\frac{1}{1-2k/r}dr^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + \left(1 - \frac{2k}{r}\right)c^2 dt^2. \tag{22}$$

[41] Эта составная часть пространственного интеграла не инварантна полной энергии даже для чисто пространственных преобразований; см. стр. 216.

[42] «Annals of Physics» 4, 347—371 (1958).

[43] См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, стр. 351.

[44] Ibid., p. 336.

В изотропных координатах этот линейный элемент для больших r может быть переписан в виде

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2k}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)+\left(1-\frac{2k}{r}\right)c^2\,dt^2, \qquad (23)$$

так что

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-\left(1+\frac{2k}{r}\right),\ g_{44}=1-\frac{2k}{r},$$

а все другие g_{ik} обращаются в нуль. Вычисляя $(-g)^{1/2}$ с точностью до первого порядка по $1/r$, получим

$$(-g)^{1/2}=1+\frac{2k}{r},\ g^{11}=g^{22}=g^{33}=-\left(1-\frac{2k}{r}\right),\ g^{44}=1+\frac{2k}{r},$$

а все остальные g^{ik} обращаются в нуль.

Для статической системы пространственные компоненты P'_1 обращаются в нуль, и, согласно уравнению (18),

$$E/c^2=m_i, \qquad (24)$$

так как $-cP'_4=E$. Но E, как временна́я компонента P'_i, может также быть вычислена с помощью членов псевдотензора h_i^{kj} в соответствии с общей формулой

$$P'_i=\frac{1}{c}\int \mathfrak{T}_i^4\,dx^1\,dx^2\,dx^3=\frac{1}{c}\int h_{i\,j}^{4j}\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

Для $i=4$ получим

$$E=-\int\frac{\partial}{\partial x^j}(h_4^{4j})\,dx^1\,dx^2\,dx^3,$$

или, применяя теорему Гаусса,

$$E=-\int h_4^{4j}\gamma^{-1/2}\,d\sigma_j, \qquad (25)$$

где γ — определитель пространственного метрического тензора $\gamma_{ik}=g_{ik}$ $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$, так как все g_{i4} для статической системы обращаются в нуль $(i=4)$; $d\sigma_j$ — псевдовекторная нормаль к элементу поверхности $d\sigma$ сферы S, по которой должно быть выполнено интегрирование в уравнении (25).

Подставляя значения $(-g)^{1/2}$, g_{ik}, g^{ik} в уравнение (20), мы получим для $j=1,\ 2,\ 3$

$$h_4^{4j}=\frac{g_{44}}{2\kappa(-g)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^j}[(-g)(g^{44}g^{jj})]=-\frac{2k}{\kappa r^3}x^j.$$

Следовательно,

$$E=\int \frac{2k}{\kappa r^3} x^j \gamma^{-1/2}\, d\sigma_j,$$

и, если радиус сферы увеличивается до бесконечности,

$$E=\lim_{r\to\infty}\left[\frac{2k}{\kappa r^2}4\pi r^2\right]=\frac{8\pi k}{\kappa}. \tag{26}$$

Напомним теперь, что активная гравитационная масса m_a была определена (стр. 212) с помощью шварцшильдовской константы k, согласно соотношению $k=(G/c^2)m_a$. Подставляя это значение для k в (26) и принимая во внимание, что $\kappa=8\pi G/c^4$, окончательно получим

$$E/c^2=m_a. \tag{27}$$

Сравнив результат с уравнением (24), можно заметить, что благодаря вышеупомянутой процедуре аналогии активная гравитапионная масса тела или динамической системы равна инертной массе также и в общей теории относительности.

На стр. 210 отмечалось, что тождество инертной массы и пассивной гравитационной массы является простым следствием принципа эквивалентности. В свете только что полученного нами результата мы, таким образом, приходим к важному выводу, что общая теория относительности в отличие от классической механики, рассматривает тождество *всех трех* видов масс как необходимый — а не только случайный — момент своей логической структуры.

В общей теории относительности частица может рассматриваться также как сингулярность в поле g_{mn}. Ограничиваясь в нашем обсуждении случаем пустого пространства, заметим, что вследствие того факта, что уравнения поля $G_{mn}=0$ должны удовлетворяться всюду вне сингулярностей, эти последние, то есть четырехмерные мировые линии частиц, не могут быть произвольно специфицированы. Математические ограничения, налагаемые уравнениями поля на сингулярные кривые в четырехмерном пространстве, выражают тот факт, что законы движения в общей теории относительности не представляют собой добавочных условий, которые должны быть увязаны — как в ньютоновской физике — с уравнениями поля, а, скорее, непосредственно следуют из самих уравнений поля [45]. Так как понятие массы есть прежде всего и главным образом понятие фактора, определяющего движение, и так как поле является первичной и окончательной величиной, единственным логически и методологически удовлетворительным способом введения понятия массы будет введение его при помощи законов движения, полученных из уравнений поля. Проблема получения законов движения из уравнений поля была решена в 1938 году Эйнштейном, Инфельдом и Гофманом, а упрощенное решение проблемы было опубликовано двумя годами позже Эйнштейном и Инфельдом [46]. Наконец, логически более простое, но технически более трудное решение, допускающее приближение сколь угодно высокого порядка, было дано Эйнштейном и Инфельдом в 1949 году [47]. Оно, по-видимому, представляет собой одно из самых глубоких и далеко идущих исследований этого вопроса. Посмотрим, как оно вводит понятие массы в концептуальную структуру своего изложения.

Гравитационные потенциалы g_{mn} представляются в виде $g_{mn} = \eta_{mn} + h_{mn}$, где η_{mn} — галилеевы величины, а h_{mn} — отклонения пространства-времени от плоского пространства (необязательно малые). Для удобства некоторые линейные комбинации h_{mn} определяются как $\gamma_{mn} = h_{mn} - {}^1/_2\eta_{mn}\,\eta^{pq}h_{pq}$. Первый (не нулевой) член в разложении γ_{44} представляет собой существенный член, обозначаемый $\underset{2}{\gamma_{44}}$. Далее, приближение первого порядка к уравнениям поля показывает, что $\underset{2}{\gamma_{44,ss}} = 0$. Теперь

---

[45] A. Einstein und J. Grommer, Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz, «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften» (1927), S. 2—13, 235—245.

[46] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, Gravitational equations and the problem of motion, «Annals of Mathematics», 39, 65—100 (1938); A. Einstein and L. Infeld, Gravitational equations and the problem of motion II; ibid. 41, 455—464 (1940).

[47] A. Einstein and L. Infeld, On the motion of particles in general relativity theory, «Canadian Journal of Mathematics», 1, 209—241 (1949). Эта статья представляет собой только краткое изложение результатов. Рукопись, содержащая полные расчеты, хранится в Институте высших исследований (Принстон, Нью-Джерси). В нашем резюме используются латинские индексы для суммирования от 1 до 4.

можно показать, что это последнее уравнение аналогично уравнению Пуассона и его решение может быть записано как $\underset{2}{\gamma_{44}} = 2\varphi$, где $\varphi = \sum\limits_{s=1}^{N} (-2\overset{s}{\underset{2}{m}}\overset{s}{\psi})$ и где суммирование распространяется на N сингулярностей, имеющихся в поле; $\overset{s}{\psi}$ — обратная величина пространственного расстояния от s-й сингулярности, а $\overset{s}{\underset{2}{m}}$ — не зависящие от времени положительные постоянные, пока не определенные.

Чтобы установить физический смысл этих постоянных, Эйнштейн и Инфельд рассчитали поле (ассоциированное с первой частицей) для случая, когда все остальные сингулярности удалены от первой частицы, характеризуемой постоянной $\overset{1}{\underset{2}{m}}$. Путем сравнения результата с гравитационным полем, порождаемым изолированным телом гравитационной массы M, рассчитанным «общепринятыми методами общей теории относительности», как, например, шварцшильдовский линейный элемент, авторы нашли, что для больших r последнее поле оказывается тождественным полю приближения первого порядка, если принять $M = \overset{1}{\underset{2}{m}}$. Следовательно, «$\overset{1}{\underset{2}{m}}$ есть гравитационная масса, так как для больших r это поле есть поле частицы с гравитационной массой $\overset{1}{\underset{2}{m}}$».

Таким образом, обращение к аналогии (в данном случае даже по аналогии с аналогией) с классической динамикой делает указанные постоянные интегрирования физически осмысленными и обозначает их как массы. Однако настоятельно ли необходимо в рамках строгой теории поля искать динамическую интерпретацию этих постоянных интегрирования? Не может ли их чисто математический статус постоянных в пространственно-временных функциях четырехмерных кривых полностью исчерпывать их смысл? Ответ был бы утвердительным, если бы их конкретные числовые значения не играли никакой роли. Однако эти значения являются важными для фактического определения четырехмерных траекторий сингулярностей. Эти значения могут быть установлены только с помощью конфигурационной структуры по крайней мере двух таких сингулярностей или, другими словами, путем исследования их взаимодействия. Но это означает, что для описания их движения требуется динамическая интерпретация в традиционном смысле этого слова. Короче говоря, уступка традиционным понятиям необходима даже в такой развитой трактовке современной теории поля.

Определение массы как сингулярности в метрике выдвигает, однако, дополнительные проблемы. Прежде всего возникает принципиальный вопрос, какого сорта сингулярности являются допустимыми. Как недавно установил Уилер [48], «на сегодняшний день не существует даже зародышей исчерпывающего анализа видов сингулярностей, которые могут возникать в решениях эйнштейновских уравнений поля». И далее, масса перестает быть хорошо определимой величиной в случае нескольких сингулярностей, если составные части системы отделены друг от друга расстояниями порядка их собственных радиусов. Действительно, само понятие «число сингулярностей» представляется недостаточно определенным. Поэтому важно понять, что даже метод эйнштейновско-инфельдовской аналогии не может считаться методом, приводящим к отчетливому определению массы.

В заключение этого раздела о понятии массы в теории поля необходимо рассмотреть так называемые пространственные теории материи. В их попытках свести физику к геометрии пространства проблема массы, несомненно, имеет первостепенное значение.

Если игнорировать донаучные пространственные теории материи, как, например, некоторые понятия [49] древних Вед, основанные на вере в несубстанциональность мира явлений, или некоторые пифагорейские и платоновские учения [50] и подобные им спекуляции, то следует

---

[48] J o h n A. W h e e l e r, Geometrodynamics and the problem of motion, «Reviews of Modern Physics», 33, 64 (1961).

[49] См. теорию акаши в: «Brihadāranyaka Upanishad», part 2, chap. 3, secs. 2 and 3; в «Taittiriya Upanishad», part 2, chap. 1, sec. 3; в «Chhāndogya Upanishad», part 1, chap. 9, sec. 1; part. 3, chap. 18, sec. 6.

[50] M a x J a m m e r, Consepts of space, p. 12.

заметить, что одной из наиболее замечательных попыток такого рода в новейшее время была теория Клиффорда, английского переводчика работ Римана по структуре пространства. Напомним, что Клиффорд рассматривал материю и ее движение как проявление изменяющейся кривизны пространства. В 1876 году Клиффорд опубликовал очерк «О пространственной теории материи» (расширенный вариант статьи, представленной в Кембриджское философское общество), в котором утверждал полную тождественность пространства и материи. Пространство, с его точки зрения,— не просто арена физических событий; оно, скорее, представляет собой последний и единственный «строительный материал» физической реальности. «В физическом мире не происходит ничего, кроме этого изменения [кривизны пространства]» [51]. Клиффорд, однако, был не в состоянии выполнить свою претенциозную программу и, в частности, не смог интерпретировать понятие массы в терминах чисто пространственных или геометрических рассмотрений.

Тем временем проблема внутренней связи между структурой пространства и законами динамики и электродинамики привлекла внимание как физиков, так и философов. Действительно, Кант в своих докритических «Мыслях об истинной оценке живых сил» [52] выразил веру в такую связь и пытался вывести трехмерность пространства из динамики Ньютона: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния» [53]. В 1808 году Лаплас пытался показать, что постулирование инвариантности масштаба линейных протяженностей в физической Вселенной влечет за собой определенную формулировку закона обратных квадратов — любой показатель, отличный от двух, несовместим с этим допущением.

---

[51] W. K. Clifford, The common sense of the exact sciences (ed. J. R. Newman; Knopf, New York, 1946), p. 202.

[52] См. И. Кант, Соч., т. 1, стр. 51.

[53] Там же, стр. 71: «Согласно изложенному, я полагаю: во-первых, что субстанциям в существующем мире, частью которого мы являемся, присущи силы такого рода, что, соединяясь друг с другом, они распространяют свои действия обратно пропорционально квадрату их расстояний; во-вторых, что возникающее отсюда целое имеет в соответствии с этим законом свойство трехмерности»

Другие исследования подобного рода о соотношении между метрикой и динамикой были выполнены Дельбефом[54], Бертраном[55] и Зенеком[56]. Эйнштейновские уравнения поля в общей теории относительности, согласно которым фундаментальный метрический тензор g_{mn} зависит от тензора массы-энергии T_{mn}, представляются дающими четкое решение обсуждаемой проблемы, поскольку дело касается (механической) динамики: геометрия становится частью физики, пространство — физическим объектом.

Однако по отношению к электродинамике имело место развитие другого рода. Вито Вольтерра[57] еще в 1889 году знал, что уравнения Максвелла представляют собой частный случай общей теории сопряженных функций. Фридрих Коттлер в 1922 году опубликовал две интересные статьи[58], в которых попытался показать, что подобно тому, как законы Ньютона и геометрия пространства не имеют необходимой внутренней связи[59], уравнения физики поля в теории Максвелла не зависят от метрики. Таким образом, Коттлер стал инициатором движения, ставившего целью полное исключение метрических отношений, как римановых, так и конформных, из фундаментальных законов физики. Одним из наиболее ревностных сторонников этого направления стал Д. ван-Данциг. Хорошо известно, что уравнения Максвелла инвариантны относительно ортогональных преобразований в трехмерном пространстве, что обнаруживается представлением их в обычном векторном виде. Уравнения Максвелла инвариантны также по отношению к более общей группе афинных пре-

---

[54] L. Couturat, Note sur la géométrie non-euclidienne et la relativité de l'espace, «Revue de métaphysique et de morale», 1, 302 (1893).

[55] J. Bertrand, «Comptes rendus», 77, 846 (1873).

[56] J. Zenneck, Gravitation, в: «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» (Teubner, Leipzig, 1903—1921), Bd 5, Tl 2, S. 42.

[57] Vito Volterra, Sulle funzioni coniugate, «Rend. Accad. dei Lincei», 5, 599—611 (1889); перепечатано в: V. Volterra, «Opere matematiche» (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1954), vol. 1 (1881—1892), p. 420—432.

[58] F. Kottler, Newton's Gesetz und Metrik, «Wiener Sitzungsberichte», 131, 1—14 (1922); и «Maxwell'sche Gleichungen und Metrik»; ibid., S. 119—146.

[59] «Das Newtonsche Gesetz und die Geometrie unseres Raumes stehen in keinem notwendigen Zusammenhang».

образований, что можно легко показать при помощи клейневского принципа адъюнкции. Их инвариантность относительно преобразований Лоренца является одним из существенных следствий теории относительности Эйнштейна. То, что они инвариантны относительно гораздо более широкой группы преобразований — так называемых конформных преобразований,— было показано Каннингемом [60] и Бейтменом [61]. Наконец то, что уравнения Максвелла вообще независимы от какой бы то ни было метрики, было показано ван-Данцигом [62].

Одновременно, однако, достигло важных результатов и диаметрально противоположное направление, стремившееся к объединению гравитации и электромагнетизма на основе подходящей для этой цели метрики [63].

Идя по этому пути, Райнич в 1925 году опубликовал интересное исследование связи между римановым тензором кривизны и тензором электромагнитного поля. В своей статье «Электродинамика в общей теории относительности» [64], важность которой не была понята — а, возможно, и не могла быть понята в то время, — Райнич, в противоположность программе Коттлера, показал, «что при некоторых допущениях электромагнитное поле полностью определяется кривизной пространства-времени, так что нет никакой необходимости дальнейшего обобщения общей теории относительности» [65]. Действительно, Райнич показал, что риманово пространство с отличным от нуля и дифференцируемым тензором кривизны Риччи

---

[60] «The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof», в: «Proceedings of the London Mathematical Society», 8, 77—98 (1910).

[61] «The transformation of the electrodynamical equations», ibid., 223—264.

[62] «The fundamental equations of electromagnetism. independent of metrical geometry», в: «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society», 30, 421—427 (1934). См. также D. van Dantzig, Electromagnetism, independent of metrical Geometry, в: «Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam», 37, 521—525 (1. The foundation), 526—531, 643—652 (1934); 39, 126—131 (1936).

[63] А. Эйнштейн, В. Майер, Т. Калуза, О. Клейн, Г. Вейль, О. Веблен, Б. Гофман — упомянуты только некоторые из сторонников этого направления.

[64] «Transactions of the American Mathematical Society», 27, 106—136 (1925).

[65] Ibid., p. 107.

R_{mn} нулевого следа $R_n^n = 0$, квадрат которого представляет собой некоторый множитель единичной матрицы

$$R_a^m R_m^b = \delta_a^b \left(\frac{1}{4} R_{st} R^{st} \right),$$

и в котором вектор

$$A_b = (-g)^{1/2} \varepsilon_{bkmn} R^{kp;\, m} R_p^n / R_{st} R^{st}$$

(ε_{bkmn} — полностью антисимметричный псевдотензор четвертого ранга) удовлетворяет условию

$$A_{b;\, p} - A_{p;\, b} = 0,$$

без дальнейших допущений описывает свободную от источников электродинамику Максвелла. Таким образом, при определенных условиях (полевые условия Райнича), одна геометрия пространства (свернутый тензор кривизны) определяет локальные значения тензора электромагнитного поля, а уравнения Максвелла являются простыми геометрическими утверждениями, связывающими кривизну Риччи и скорость ее изменения. Важность результатов Райнича для дедуктивного построения пространственной теории материи оставалась неосознанной до тех пор, пока Миснер[66] не пришел независимо к тем же выводам. Возможность выражения релятивистской формулы уравнений Максвелла в чисто геометрической форме открывает новый подход к последовательной пространственной теории материи. Отказавшись от неявного допущения, делавшегося ранее, что пространство обладает простой связностью, Уилер и Мизнер продемонстрировали совместимость римановой геометрии с обширным классом многосвязных топологий и показали, что некоторые разумно выбранные топологические связи (linkages) имитируют электрические заряды в том смысле, что они внешне неотличимы от обычных электрических зарядов, подчиняющихся взаимным отталкивательным и притягательным силам, теореме Гаусса и закону сохранения заряда.

Установив, что электродинамика Максвелла есть проявление геометрических (топологических) свойств и что заряды могут быть выражены в терминах свободных от

---

[66] Charles W. Misner and John A. Wheeler, Classical physics as geometry, «Annals of Physics», 2, 525—603 (1957).

источников электромагнитных полей, Уилер и Миснер попытались вывести понятие массы также в терминах геометрических характеристик. Строго говоря, часть решения уже была в руках, так как электрическое поле обладает плотностью энергии. Но чтобы позволить вывести массу как массу физического тела (объекта, обладающего массой и координатами положения) энергия должна быть локализована, а само электромагнитное поле должно образовывать относительно устойчивую и сконцентрированную сущность.

То, что такая возможность действительно имеется, стало ясно, когда Уилер в 1955 году продемонстрировал существование определенных несингулярных решений системы уравнений теории относительности и электромагнетизма. Он показал[67], что эйнштейновские уравнения поля

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{mn},$$

объединенные с уравнениями Максвелла

$$(-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} [(-g)^{1/2} F^{ik}] = 0,$$

где $F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k$ (A_k — электромагнитные потенциалы) и где $T_i^k = \left(\frac{1}{4}\pi\right)\left(F_{ir}F^{kr} - \frac{1}{4} F_{rm}F^{rm}\delta_i^k\right)$, выражают электромагнитный тензор энергии-импульса и полностью допускают несингулярное решение для A_k и δ_{mn}. Как показывают эти уравнения, гравитационная масса порождается всецело за счет энергии, запасенной в электромагнитном поле. Таким образом, гравитационное притяжение, возникающее за счет энергии электромагнитного возмущения, способно к концентрации этого возмущения и его сохранению на долгое время по сравнению с характеристическими периодами системы. В простейшем варианте такие конгломераты электромагнитной энергии, или геоны (гравитационно-электромагнитные сущности), имеют форму кругового тороида. Существование решений объединенных уравнений, соответствующих другим конфигурациям энергии, является предметом современных

---

[67] John Archibald Wheeler, Geons «Physical Review», 97, 511—536 (1955); см. также Edwin A. Power and John A. Wheeler, Thermal geons, «Reviews of Modern Physics», 29, 480—495 (1957).

исследований [68]. Понятие геона обеспечивает, таким образом, теоретико-полевое представление того, что классическая физика трактовала как физическое тело, обладающее массой (инертностью) и локализацией в пространстве (координаты положения).

Комбинируя пространственную теорию свободной от источников электродинамики Райнича с понятием геонов, мы приходим к выводу, что «в геометродинамике масса и заряд... являются аспектами геометрической структуры пространства» [69]. Таким образом, геометродинамика, по-видимому, нашла замечательный обходной путь полного обоснования понятия массы на геометрическом понятии искривленного пространства. Для оценки этой теории, однако, не следует игнорировать ее трудности и недостатки. Она может объяснить только массы порядка от 10^{39} до 10^{57} *г*, которые пока не обнаружены в природе. Все попытки видоизменить теорию, превратив ее в «квантовую геометродинамику» [70] для микрофизики, и дать интерпретацию массы элементарных частиц в соответствии с характеристическими состояниями коллективных возмущений метрики пока еще наталкиваются на серьезные трудности. Короче говоря, хотя на пути к геометрической интерпретации понятия массы открываются новые и интересные перспективы, тем не менее в настоящее время бытие «реальных масс», как они рассматриваются в физике, все еще не может считаться объясненным.

Такова история основного понятия массы.

Несмотря на свою первостепенную важность для всех областей физики и несмотря на статус необходимого концептуального инструмента научного мышления, понятие массы представляется как бы уклоняющимся от всех попыток полного и исчерпывающего объяснения и свободного от логических и научных возражений определения.

---

[68] См., например, F. J. Ernst, Linear and toroidal geons, «Physical Review», **105**, 1665—1670 (1957); D. R. Brill and J. A. Wheeler, Interaction of neutrinos and gravitational fields, «Reviews of Modern Physics», **29**, 465—479 (1957); L. G. Chambers, The Hund gravitational equations and geons, «Canadian Journal of Physics», **37**, 1008—1016 (1959).

[69] «Annals of Physics», **2**, 595 (1957).

[70] John A. Wheeler, On the nature of quantum geometrodynamics, «Annals of Physics», **2**, 604—614 (1957).

На протяжении долгой истории развития понятия массы в человеческом мышлении, от ранних смутных идей неоплатонической философии, мистических и неотчетливых представлений в теологии к своему научному проявлению в физике Кеплера и Ньютона, к тщательно продуманным многочисленным определениям в позитивистских и аксиоматических формулировках и кончая далеко идущими его модификациями в современных физических теориях, наука никогда не достигала полного овладения и контроля всеми концептуальными переплетениями, заключенными в этом понятии. Нужно признать, что, несмотря на совместные усилия физиков и философов, математиков и логиков, не достигнуто никакого окончательного прояснения понятия массы.

Современный физик с полным правом может гордиться своими эффектными достижениями в науке и технике. Однако он всегда должен сознавать, что фундамент его впечатляющего здания, основные понятия его науки, как, например, понятие массы, опутаны серьезными неопределенностями и приводящими в смущение трудностями, которые до сих пор еще не преодолены.