

# П Е Р В А Я Ч А С Т Ь

## МАТЕМАТИКА В ДРЕВНОСТИ

### ПЕРВАЯ ГЛАВА

#### ДОИСТОРИЧЕСКИЕ ВРЕМЕНА

##### Возникновение понятия числа

Такие основные математические понятия, как число или простейшие геометрические фигуры, возникли задолго до появления математических текстов. Понятия числа и геометрической фигуры, которые представляются нам очень простыми и привычными, на самом деле являются абстрактными понятиями, которые могли образоваться только в результате длительной умственной работы. Подобно тому, как понятия дуба и сосны появляются намного раньше общего понятия дерева, так и понятия двух рук и пяти пальцев возникают намного раньше общих понятий двух и пяти.

Когда первобытному охотнику нужно было узнать, все ли собаки в своре на месте, он не считал их, а просто, окинув взором свору, видел, какой собаки не хватает. Такой «чувственный счет», доступный даже утке, чувствующей, весь ли ее выводок следует за ней к водоему, существовал задолго до возникновения счета.

Первым шагом к возникновению счета было установление, как мы сейчас говорим, «взаимно однозначного соответствия» между считаемыми предметами и некоторым другим множеством. Оба сравниваемых множества предметов могут быть заранее неизвестны; например, при обмене между первобытными племенами обмениваемые предметы просто раскладывались в два ряда, так что взаимно однозначное соответствие между ними устанавливалось фактически. Именно так описывает Дж. Морган обмен угрей на корни у австралийских племен. Затем появляются своего рода эталоны счета — естественные, как пять пальцев на руке, или искусственные, как специально приспособленные для этой цели палочки или камешки. Именно появление множества-эталона, символизирующего какое-нибудь конкретное число, привело к возникновению понятия числа. Судя по этнографическим и лингвистическим данным, первые множества-эталонны были естественными. Любой человек знал, что на небе Луна одна, у человека два глаза и на руке пять пальцев. Не удивительно поэтому, что этими словами он стал обозначать числа 1, 2 и 5. В таких случаях говорили, что предметов столько, сколько Лун, сколько глаз или сколько пальцев на руке. Подобное понятие числа вполне соответствует тому уровню развития языка у некоторых малоразвитых народов, когда в нем еще

отсутствуют абстрактные прилагательные типа «круглый», «черный», — вместо этих слов употребляются сравнения: «как Луна», «как вороново крыло». Пережиток этой системы мы встречаем в древней индийской словесной системе счисления, где единица называлась Луной, Землей, Брахмой, два — близнецами, глазами, руками, пять — чувствами, стрелами бога любви Камадевы, шесть — запахами, семь — горами, восемь — богами и т. д.

Этот этап счета при помощи «конкретных» чисел сменился следующим, когда из всего разнообразия совокупностей была выбрана одна, наиболее пригодная для счета. Очевидно, удобнее было пользоваться такой совокупностью, в которую входили более или менее однородные предметы, например пальцы рук. Если их не хватало, в ход шли пальцы ног. Так, у индейцев племени абипонов число 5 называлось «рука», 10 — «две руки», 20 — «руки и ноги»; в названии 4 — «пальцы страуса» — отражена более ранняя ступень счета. У зулусов каждый палец обозначал определенное число; например, слово «татизитуна» (буквально — «взять большой палец руки») обозначало 6, а «у комбиле», т. е. «он указал», — 7 и т. д. Для такого счета было характерно осязаемое взаимно однозначное соответствие: у некоторых южноафриканских племен при счете затрагиваются до каждого предмета по очереди пальцами, начиная с мизинца левой руки. У австралийцев и полинезийцев каждая часть тела имела свое название и точно соответствовала месту в своеобразной системе счисления: начиная с мизинца левой руки шли пальцы, запястье, локоть, плечо и т. д., кончая мизинцем правой руки, и обратно. Такой живой шкалой, которая всегда «при себе», пользовались, чтобы сообщить, например, дружественному племени о количестве воинов, собираемых племенами, или о числе дней, по прошествии которых следует выходить на охоту.

Прекрасный образец счета такого типа оставил нам русский исследователь Новой Гвинеи Н. Н. Миклухо-Маклай. Он попросил папуасов подсчитать число дней до возвращения корвета «Витязь», нарезав для этого полоски бумаги.

«Первый, раскладывая кусочки бумаги на колене, при каждом обрезке повторял «наре, наре» (один); другой повторял слово «наре» и загибал при этом палец прежде на одной, затем на другой руке. Насчитав до десяти и согнув пальцы обеих рук, опустил оба кулака на колени, проговорив: ...«две руки», причем третий папуас загнул один палец руки. Со вторым десятком было сделано то же, причем третий папуас загнул второй палец; то же самое было сделано для третьего десятка; оставшиеся бумажки не составляли четвертого десятка и были оставлены в стороне. Все, кажется, остались довольными»<sup>1</sup>.

Здесь описаны и действенный счет, сопровождаемый переключиванием полосок, и живая шкала — пальцы рук, и групповой счет. Первый папуас занял инструментальным счетом, он переключивает полоски, обозначающие дни, второй фиксирует единицы, третий — десятки.

О времени появления общего понятия числа у народов Европы и Азии можно сделать вывод, сравнивая названия чисел у народов с родственными языками. Мы видим большое сходство между русским числительным «один», немецким *eins*, английским *one*, французским *un*, латинским *unus* и точно так же между числительными «два», *zwei*, *two*, *deux*, *duo*, или «три»,

<sup>1</sup> Н. Н. Миклухо-Маклай. Путешествия. Собрание сочинений, т. 1. М.—Л., 1950, стр. 141.

dreï, three, trois, tres на тех же языках. В то же время по-грузински эти же числительные: эрти, ори, сани, по-турецки: bir, iki, üç, по-венгерски: egy, kettő, három, по-арабски: ахад, иснан, салас. Сходство числительных у индоевропейских народов показывает, что названия чисел у предков этих народов появились еще в те далекие времена, когда они говорили на одном языке.

Происхождение названий числительных большей частью трудно проследить, но, например, тот факт, что арабское «саб'» — 7 имеет один корень с глаголом «саб'а» — «растерзать на части», указывает на то, что число 7 предки арабов связывали с неопределенно большим числом частей, на которые дикий зверь может растерзать свою жертву; откуда видно, что слово «саб'» первоначально обозначало неопределенно большое количество (с этим связано мистическое значение числа 7 в религиях, родственных религии предков арабов).

Чрезвычайно интересны названия числительных на языке народов Восточной Африки суахили: если для 1, 2, 4, 5, 8 и 10 на этом языке собственные названия moja, mbili, tatu и т. д., то названия sita, saba, tisa для 6, 7, 9 представляют собой искажения арабских числительных «сит», «саб'», «тис'», то же относится к названиям десятков от 20 до 90. Отсюда видно, что к тому времени, когда у побережья Восточной Африки появились арабские купцы, у местных жителей еще не были созданы устойчивые собственные названия для этих чисел.

Заметим, что у большинства народов названия десятков образуются по схеме  $n \cdot 10$ , где  $n$  — число десятков (например, двадцать, тридцать, пятьдесят и т. д.). В этой связи очень интересны исключения во французском языке, где 70 называется soixante-dix ( $60 + 10$ ), 80 — quatre-vingt ( $4 \times 20$ ), 90 — quatre-vingt-dix ( $4 \times 20 + 10$ ), т. е. начиная с 70 французы считают не десятками, а двадцатками. Более последовательно счет двадцатками проведен в грузинском языке, где 10 — ати, 20 — оци, 30 — оцдаати ( $20 + 10$ ), 40 — ормоци ( $2 \times 20$ ), 50 — ормоцдаати ( $2 \times 20 + 10$ ), 60 — самоци ( $3 \times 20$ ) и т. д.

В большинстве современных языков названия числительных основаны на десятичной системе, т. е. на представлении чисел в виде суммы числа единиц (до 10), числа десятков (до 100), числа сотен (до 1000) и т. д. Несомненно, что в основе этой системы лежит счет на пальцах. Именно так полагал Аристотель, к мнению которого уместно добавить еще слова А. Лебега: «Возможно, что если бы люди имели одиннадцать пальцев, была бы принята одиннадцатиричная система счисления»<sup>1</sup>.

Впрочем, в отдельных случаях, когда после счета на пальцах считалась и вся рука, возникла одиннадцатиричная система счисления, которая, по видимому, имела у новозеландцев, имеющих специальные названия для 1, 2, 3-й степеней одиннадцати и представлявших 12, 13, 22 в виде  $11 + 1$ ,  $11 + 2$ ,  $2 \cdot 11$ .

В некоторых языках числительные сохраняют следы пятиричной системы, в этих языках пальцы второй руки называются так же, как пальцы первой с прибавлением слова, обозначающего 5 пальцев или руку. Например, в языке шумеров — первоначального населения Междуречья, заложившего начала культуры древнего Вавилона — 7 — имин [= 5 (= иа) + 2 (= мин)], а 9 — илимму [= 5 + 4 (= лимму)], а в языке ацтеков — первоначального населения Мексики — 6 — чикюасе [= 5 + 1 (= се)], 7 — чикоме

<sup>1</sup> А. Лебег. Об измерении величин. М., 1960, стр. 22.

[ $=5 + 2(=о́ме)$ ], а 9 — чикунауи [ $=5+4(=науи)$ ]; число 5, которое некогда называлось у ацтеков «чику», впоследствии получило название «макуили».

Двадцатиричные названия у французов и грузин представляют собой пережитки счета двадцатками, при котором считались не только пальцы рук, но и пальцы ног. Двадцатиричные названия десятков встречаются в ряде индоевропейских языков (например, в датском и осетинском), в ряде языков народов Кавказа, принадлежащих к самым разнообразным языковым группам (кроме упомянутых грузинского и осетинского, в абхазском, чеченском и др.), а также в некоторых других языках, например ацтекском.

На самых первоначальных ступенях развития человек пользовался и двоичной системой счисления. Например, на языке одного из племен островов Торресова пролива существуют следующие наименования: 1 — урапун, 2 — окоза, 3 — окоза-урапун, 4 — окоза-окоза, 5 — окоза-окоза-урапун, 6 — окоза-окоза-окоза и т. д.

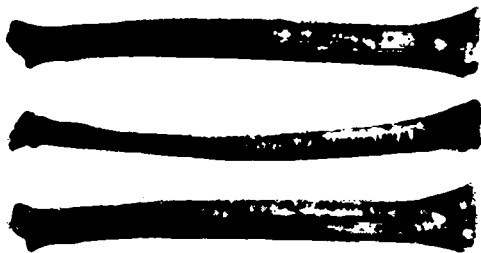
Индийское племя абипонов полтора века назад вело счет таким образом: 1 — инитара, 2 — иньоака, 3 — иньоака-инитара, а далее употреблялись специальные названия числительных, основанные уже по пятиричной системе. Ниже мы рассмотрим исчисление индейского племени майя, основанное на двадцатиричной системе, и исчисление вавилонян, — на шестидесятиричной системе.

### Возникновение числовых обозначений

Сведения о результатах счета первоначально хранили при помощи зарубок на дереве или на костях либо узелков на веревках. Старейшей известной в настоящее время записью числа является запись на лучевой кости молодого волка длиной 18 см в виде 55 зарубок, расположенных по 5, причем после 25 зарубок идет длинная черта. Эта кость была найдена около деревни Вестонице в Моравии (Чехословакия) в 1937 г. и относится к ХХХ в. до н. э.; кость служила, по-видимому, для записи трофеев доисторических охотников. Зарубками, обозначающими долги на бирках, раскалывающихся на две половины, одна из которых хранится у должника, а другая у кредитора, пользовались в Западной Европе даже в XIX в. (известный пожар английского парламента в 1834 г. произошел при сжигании таких бирок в парламентских печатках). О распространении записей при помощи зарубок свидетельствует известное выражение «заруби себе на носу». Инки записывали свои долговые обязательства с помощью узелков на цветных веревках — перуанских квипу. Аналогичные квипу встречались у землевладельцев некоторых районов Китая и Японии еще в нашем столетии.

Перейдем теперь к принципам изображения чисел при помощи цифр у разных народов. Такое обозначение, называемое нумерацией (от латинского *numerus* — число), первоначально было основано на так называемых аддитивном (от латинского *additio* — сложение), субтрактивном (*substractio* — вычитание) и мультипликативном (*multiplicatio* — умножение) принципах.

Аддитивный принцип состоит в том, что вводится несколько основных знаков, например для 1, 10, 100, а остальные числа вида  $n$ ,  $10n$ ,  $100n$



Зарубки на костях  
(*K. Absolon. The world earliest portrait — 30 000 years old.*  
Illustrated London News, 2.X.1937)

изображаются соответственным знаком, повторенным  $n$  раз. Аддитивная нумерация непосредственно отражает инструментальный счет с палочками, ракушками или другими предметами. Мы встречались с аддитивным принципом в названиях чисел племен островов Торресова пролива. Субстративный принцип состоит в том, что сочетание цифр  $mn$ , где  $m < n$ , означает разность  $n - m$ , а мультипликативный принцип — в том, что сочетание цифр  $mn$  означает произведение чисел  $m$  и  $n$ . Оба эти принципа применяются и в названиях чисел: на мультипликативном принципе основаны названия десятков и сотен в индоевропейских языках, в частности, русские названия 20, 30, 50—80 и 200—900, с субстративным принципом связано слово «девяносто», возникшее в результате «скрепления» первоначального названия этого числа «девяносто» (ср. *devadesát* в современном чешском языке) и выражения «10 до 100». Еще более нагляден этот принцип в финском языке, где названия 8 — *kahdeksan* и 9 — *yhdeksan* представляют собой сокращения выражений — «2 (*kaksi*) до 10» и «1 (*üksi*) до 10».

Классическим примером применения аддитивного и субстративного принципов является применяемая и нами римская нумерация (см. стр. 22): римские цифры II, III, VI, VII, VIII, XX, XXX и т. д. основаны на аддитивном принципе, а римские цифры IV, IX, XL — на субстративном принципе.

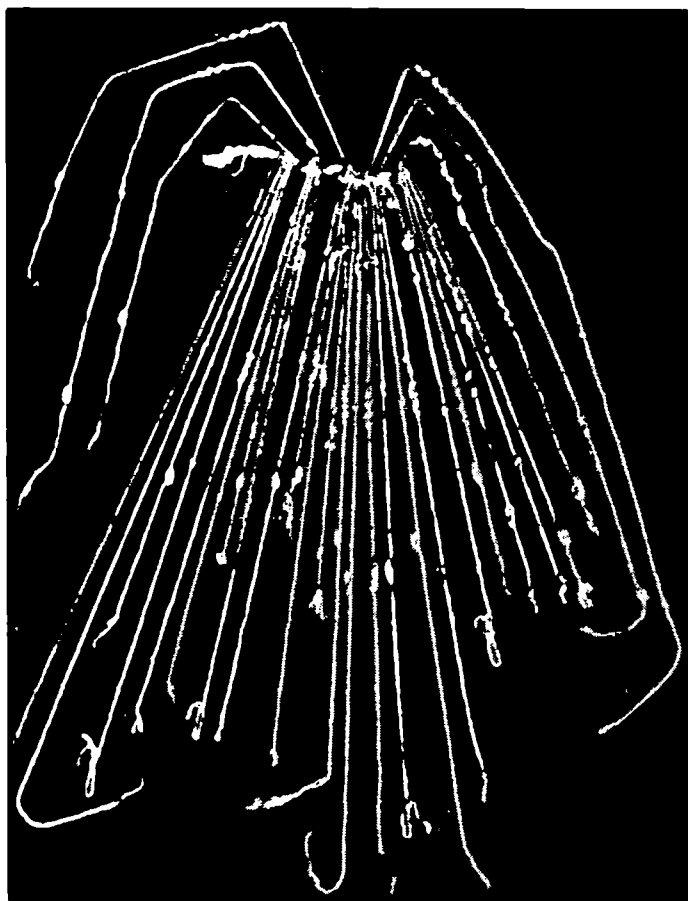
### Возникновение понятий о геометрических фигурах

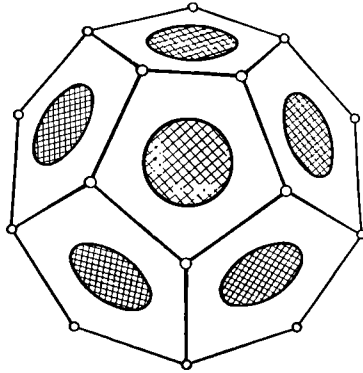
С конкретными геометрическими фигурами человек столкнулся в своей трудовой деятельности при выделке орудий труда и сосудов, при обработке полей и постройке зданий. Уже в глубокой древности изготовлялись скребки и ножи в форме дисков, треугольников, ромбов и сегментов, круглые сосуды; поля обычно имели форму прямоугольника, а здания — форму конуса, цилиндра и параллелепипеда.

Большинство общепринятых в настоящее время в геометрии названий геометрических фигур являются греческими, обозначающими различные предметы той или иной формы, с которыми люди сталкивались в своей

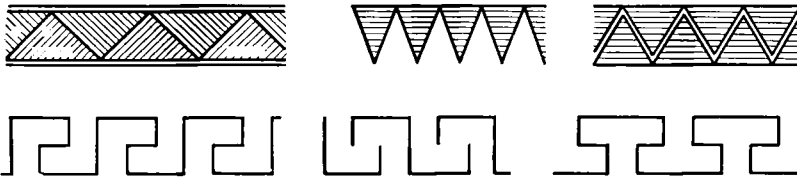
практической деятельности: слово «центр» происходит от греческого слова *κέντρον* (в латинской форме *centrum*), обозначавшего палку с заостренным концом, которой погоняли быков (первоначально это слово было названием ножки циркуля, ставящейся в центр описываемой им окружности). Слово «ромб» происходит от слова *ῥόμβος* — волчок, «трапеция» — от слова *τραπέζιον* — «столик» (от того же корня происходит и «трапеза»). Слово «призма» происходит от слова *πρίσμα* — опиленная, «сфера» — от слова *σφαῖρα* (*sphaera*) — «мяч», «конус» — от слова *κῆνος* (*conus*) — сосновая шишка, «цилиндр» — от слова *κύλινδρος* (*cylindrus*) — валик, каток. «Пирамида» происходит от древнеегипетского названия египетских пирамид «пурама», которому греки придали форму *πυραμῖς*. «Линия» (по-латыни *linea*) происходит от латинского слова *linum* — лен; первоначально под линией понимали натянутую льняную нить. «Точка» происходит от глагола «ткнуть», так же как равнозначное слово «пункт» про-

Узловой счет инков  
(Нью-Йорк, Американский музей естественной истории)





Бронзовый додекаэдр этрусков  
 (F. Lindemann. Zur Geschichte  
 der Polyeder. Sitzungsberichte  
 der Bayr. Akademie der Wissen-  
 schaften, mathem.-naturwiss.  
 Abt., 1934, S. 265—275)



Геометрические орнаменты на греческих вазах

исходит от латинского глагола *pungo* — укалываю, т. е. первоначально под точкой понимали укол (ср. медицинский термин «пункция» — иглоукалывание).

Эти примеры показывают, что и в геометрии сначала появились геометрические эталоны: мяч — для шарообразных предметов, сосновая шишка — для остроконечных и т. д., а впоследствии названия этих эталонов стали названиями абстрактных геометрических фигур.

Создание понятий о геометрических фигурах было тесно связано с изображением различных плоских фигур на рисунках и орнаментах и с изготовлением моделей различных тел.