ВТОРАЯ ГЛАВА

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ

Древнейшие цивилизации

Наиболее древние письменные математические тексты, известные в настоящее время, сохранились примерно от начала второго тысячелетия до н. э. К этому времени относится расцвет двух великих цивилизаций древнего Востока — Египта и Вавилона, возникших в долинах Нила и Двуречья Тигра и Евфрата. Одновременно с древним Египтом и Вавилоном появились цивилизации в Индии — в долинах Инда и Ганга, в Китае — в долинах Хуанхэ и Янцзы и, может быть несколько позже, в Средней Азии и Закавказье, на островах и европейском и азиатском побережье Средиземного моря, в Индокитае и Индонезии. Математические документы сохранились только в Египте, Месопотамии, Индии и Китае. Во второй и третьей главах мы рассмотрим математические достижения египтян и вавилонян; о математике древнего Китая и Индии мы будем говорить при изложении математики этих стран в Средние века. О математике европейского Средиземноморья до появления греков, о математике Средней Азии до арабского завоевания и о математике древнего Закавказья мы не располагаем сведениями, но по остаткам этих древних цивилизаций можно судить о том, что они мало уступали Египту и Вавилону. То же относится и к древним Индокитаю и Индонезии и, может быть, в меньшей степени, к древним государствам Африки и Америки, наши сведения о культуре которых совершенно недостаточны.

Все государства, о которых мы здесь говорим, были государствами земледельческими. Площадь, пригодная для земледелия во всех этих странах, была невелика, ее можно было увеличить только путем проведения оросительных каналов или осушения болот. Работы по проведению каналов и осушению болот, необходимость установления границ между полями потребовали создания сельских общин. Поэтому наряду с натуральным хозяйством этих общин появляется распределение, связанное со значительными общественными работами, а также с частыми войнами, в которые вовлекаются большие массы людей. Организация централизованного государства приводит к появлению централизованной религии, вокруг дворцов правителей и храмов возникают города, которые становятся центрами торговли.

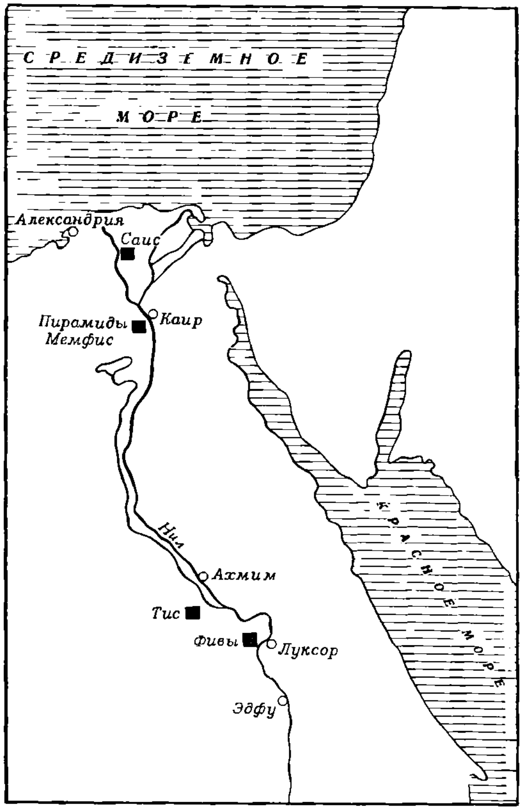
Именно в этих государствах появляются математические задачи, к которым приводит необходимость расчетов при проведении каналов, строительстве плотин, складов для зерна, дворцов, храмов и военных укреплений, при межевании земель, распределении материалов и продуктов среди участников общественных работ или военных походов, при торговых сделках, вождении торговых или военных караванов и мореплавании. Об этих задачах и говорят те математические документы, которые в том или ином виде сохранились до нашего времени. Тот факт, что от одних цивилизаций сохранилось относительно много математических документов, а от других такие документы сохранились в единичных случаях, не означает, что в одних государствах математика существовала, а в других нет. Математика несомненно имелась во всех этих государствах, хотя, возможно, уровень ее в разных странах не был одинаковым. Именно так обстоит с Египтом и Вавилоном: в Египте математические тексты писались на хрупком папирусе, иногда на коже, и сохранились только те тексты, которые были положены в пирамиды — усыпальницы высокопоставленных египтян — для того, чтобы души покойников могли читать свои любимые произведения в загробном мире; вавилонские же тексты были написаны клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась, и до нас дошло огромное число математических клинописных текстов. Существенное различие между имеющимися в нашем распоряжении египетскими и вавилонскими математическими текстами вынуждает рассматривать математику Египта и Вавилона отдельно. Мы начнем с египетской математики. о которой мы располагаем более бедными сведениями.

Древний Египет

Объединение Египта приписывается фараону Менесу (Мине), основавшему около 3000 г. до н. э. так называемое Раннее царство со столицей в верхнеегипетском городе Тисе. Около 2700 г. до н. э. продолжавшаяся несколько столетий борьба между Верхним и Нижним Египтом заканчивается победой последнего и возникает Древнее царство со столицей в нижнеегипетском городе Мемфисе (Меннефер), вблизи нынешнего Каира. Наиболее известными фараонами этой эпохи были Хеопс (Хуфу) и Хефрен (Хафра), построившие наиболее крупные пирамиды. Около 2000 г. до н. э. начинается новая эпоха истории Египта, называемая Средним царством, столицей Египта становится снова верхнеегипетский город Фивы (Уасет), вблизи нынешнего Луксора (ал-уксур — «дворцы»). Эпоха Среднего царства продолжается около двухсот лет. В конце этой эпохи север Египта подвергается нашествию варваров — гиксосов, пришедших из степей Аравии. С изгнанием гиксосов начинается Новое царство, столицей которого остаются Фивы. Наиболее известными фараонами этой эпохи были Тутмос I, завоевавший земли до Евфрата, и Рамсес II (1317—1251 до н. э.), воевавший с хеттами в Сирии. В 670 г. до н. э. Египет завоевывает ассирийский царь Асархаддон, в 655 г. до н. э. Псамметих I изгоняет ассирийцев и основывает последнее самостоятельное древнеегипетское царство со столицей в Саисе в дельте Нила; в это время Мемфис вновь возвышается как религиозный центр. В 525 г. до н. э. Египет захватывается персидским царем Камбизом, а в 332 г. до н. э. — Александром Македонским, основавшим в устье Нила Александрию, которая после смерти Александра становится столицей эллинистического государства Птолемеев.

Источники

Большинство математических текстов, сохранившихся в памятниках древнего Египта, написаны на папирусе — бумаге, выделанной из стебля одноименного растения (от слова «папирус» произошли названия бумаги Papier, papier, paper на немецком, французском и английском языках).



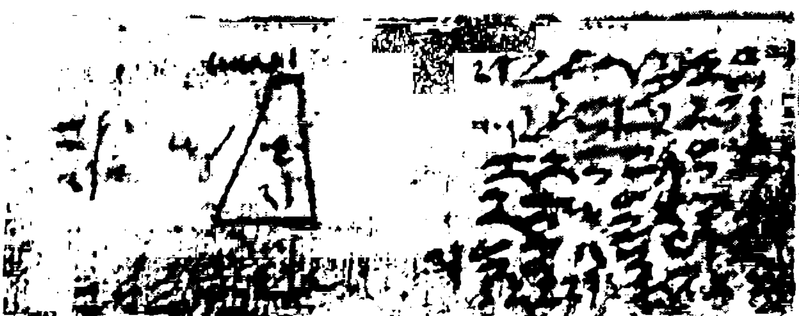
Древний Египет

В эпоху Древнего царства египтяне писали при помощи иероглифов (от греческих слов ἱερός — священный, γλυφή — резьба) — рисуночного письма, в котором каждый рисунок изображал слово или слог. В эпоху Среднего царства иероглифическое письмо было заменено более простым иератическим письмом, где от каждого иероглифа осталось несколько характерных штрихов, а иероглифы применялись только в особо торжественных случаях. И, наконец, в эпоху Нового царства возникает скорописное демотическое письмо (от греческого δῆμος — народ).

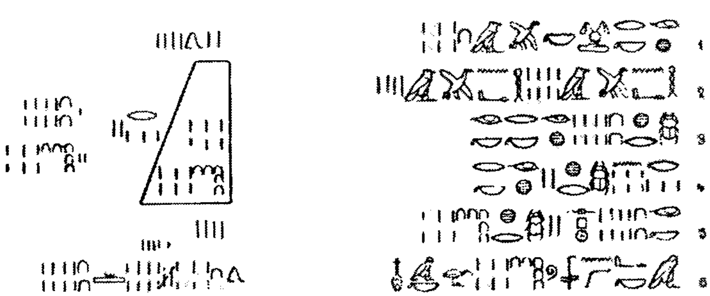
Самый большой, сохранившийся до наших дней древнеегипетский математический текст — это так называемый папирус Райнда размером 5,25 *м* $\times$ 33 *см*, содержащий 84 задачи. Названный по имени владельца, приобретшего папирус в 1858 г., он ныне хранится частично в лондонском Британском музее, частично в Нью-Йорке. Другой папирус примерно такой же длины, но гораздо более узкий (5,44 *м* $\times$ 8 *см*), приобретенный в конце прошлого века русским востоковедом В. С. Голенищевым, принадлежит московскому Музею изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Этот свиток содержит 25 задач. Оба папируса переведены на современные языки и прокомментированы. Папирус Райнда был изучен в прошлом веке сначала его издателем А. Эйзенлором, а затем В. В. Бобыниным. В 20-х годах нашего столетия он был переведен Т. Питом, а также

А. Б. Чейсом и другими учеными. Московский папирус исследовали Б. А. Тураев и его ученик В. В. Струве, которому главным образом мы обязаны изданием этого текста. Эти два текста — важнейшие, хотя и не единственные. Оба папируса относятся примерно к одному времени — эпохе Среднего царства. Египетская культура в ту пору достигла уже высокого материального и духовного расцвета. Носителями научных знаний были так называемые писцы — чиновники, состоявшие на государственной или храмовой службе. Служилая интеллигенция, гордившаяся своей образованностью (сам фараон был титулован «писцом божьей книги»), выполняла в древнем обществе различные административно-хозяйственные функции. В папирусах XX—XIX вв. до н. э. зафиксированы должности писца дома документов, войска, царских работ, надзирателя писцов, начальника сокровищницы и т. д. — самый широкий диапазон от старшего военачальника или великого искусством врачевания «царского писца» до «писца пастбищ пестрого скота». «Писец — он руководит всеми, и не обложена налогами работа в письме. На нее нет налогов. Заметь себе это»,—

Фрагмент Московского папируса (*а*) и перевод этого фрагмента, написанного демотическим письмом, на иероглифическую запись (*б*) (Москва, Музей изобразительных искусств им. А. С. Пушкина)



а



б

говорится в одном из многих текстов, восхваляющих привилегированное положение писца в древнем Египте и агитирующих за эту профессию. «Это больше, чем любая должность, и нет [ничего] равного им в стране этой»,— читаем мы в одном из папирусов. Писцы обучались в специальных школах. Имелись и высшие писцовые школы, имевшие торжественное название «дома жизни». Упомянутые выше математические папирусы были составлены для учебных целей. Московский папирус был переписан неким учеником во времена гиксосов (ок. 1800—1600 гг. до н. э.) с текста, относящегося примерно к 1900 г. до н. э. Папирус Райнда, в котором материал более систематизирован, был переписан писцом Ахмесом также при владычестве гиксосов, и, как сказано в нем, посвящен «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию их тайн»,— настолько ценились в древности математические знания. Автор оригинала также неизвестен; известно лишь, что папирус был написан во второй половине XIX в. до н. э.

Таким образом, основные сведения о древнеегипетской математике у нас относятся к одной эпохе, и мы не можем составить представление о развитии математики в данной цивилизации на протяжении ее истории.

У нас нет почти никаких известий о математических знаниях Раннего и Древнего царств. Сохранились только числовые записи да рисунки на каменных плитах и стенах, свидетельствующие, что художники умели изображать предметы в уменьшенном масштабе с помощью квадратных сеток. Однако, хотя подробности научного развития неизвестны, мы знаем, что на протяжении III тысячелетия до н. э. существовали развитая письменность, нумерация и метрология, на основании астрономических наблюдений был разработан календарь (год делили на 12 месяцев по 30 дней и в конце года добавляли еще 5 дней). Это было время строительства первых пирамид, которые древние греки относили к семи чудесам мира.

Остается также открытым вопрос, что происходило в области математики в эпоху Нового царства и позднее вплоть до ассирийского завоевания, саисского царства и персидского завоевания. В это время могли быть установлены контакты с наукой Вавилона и других стран Передней Азии, в частности Финикии, а также Крита. Знание этих контактов, вероятно, могло бы многое прояснить в вопросе о восточных корнях науки древней Греции. Однако никаких математических документов от этих времен не имеется. Не дошли они и от последующих столетий, отмеченных великолепным взлетом литературы и искусств (и теперь мы не можем без восхищения смотреть, например, на головку Нефертити), идеологической борьбой в области религии (попытка Аменхотепа IV, боровшегося со жречеством и знатью, заменить многобожие культом одного бога Солнца — Атона), прогрессом медицины, дальними морскими и сухопутными экспедициями, а в астрономии — появлением изображений звездных карт на потолках гробниц. Правда, полагают, судя по некоторым отрывкам, что математика мало изменилась с тех пор, как были составлены Московский папирус и папирус Райнда.

Дальнейшая история Египта, история I тысячелетия до нашей эры,— полоса упадка страны и господства иностранных завоевателей, сначала эфиопов, затем ассирийцев и персов. После завоеваний Египта Александром Македонским начинается процесс плодотворного синтеза греческой и египетской культур. Александрия становится крупнейшим центром науки наступающей эпохи эллинизма, и она сохраняет это значение еще долгие века спустя после завоевания Египта Римом (30 г. до н. э.).

Вновь с математическими работами египтян мы встречаемся в эпоху эллипизма и в период распространения ислама, но это уже совсем другая культура, другая и математика. Древнеегипетская цивилизация закончила свое существование.

Египетская нумерация

Египетская иероглифическая нумерация была чисто аддитивной: египтяне имели особые знаки только для единицы, десяти, ста, тысячи, десяти и ста тысяч, миллиона и десяти миллионов. В первых трех столбцах таблицы (стр. 22) указаны иероглифические, иератические и демотические цифры древних египтян.

Знак 1, очевидно, изображает мерную палку, знак для 10 — путы для стреноживания коров, знак для 100 — мерительную веревку для обмера полей, знак для 1000 — цветок лотоса, знак для 10 000 — указательный палец, знак для 100 000 — лягушку, знак для 1 000 000 — удивленного человека, знак для 10 000 000 — Солнце. При записи числа иероглифы единицы, десятка, сотни и т. д. писались столько раз, сколько в данном числе единиц в соответствующих разрядах, причем разряды записывались в порядке, обратном нашему (египтяне писали справа налево).

В заменившем первоначальное иероглифическое письмо более скорописном иератическом письме, которым и написаны дошедшие до нас математические папирусы, имеются уже особые знаки как для первых девяти чисел, так и для десятков, сотен и тысяч, выработавшиеся из иероглифических изображений этих чисел.

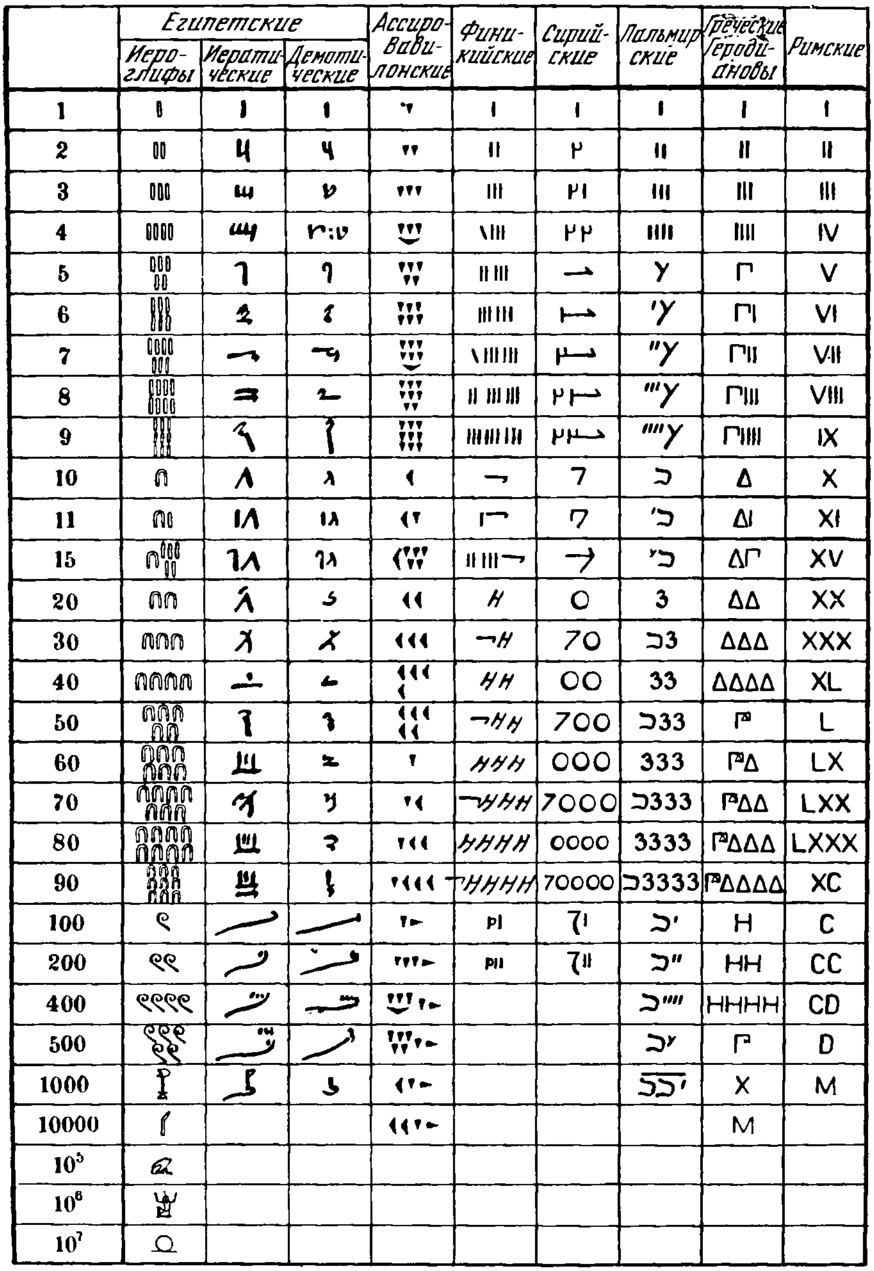
Кроме обозначений целых чисел, египтяне имели также специальные обозначения для дробей вида $1/n$ и дроби $\frac{2}{3}$; дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ обозначались специальными иероглифами, а основные дроби вида $1/n$ обозначались знаком числа n, над которым ставился знак $\bigcirc$ (рот—«часть»).

Математические знания египтян

Какой была математика древних египтян? Она кажется нам теперь довольно примитивной, ведь египтяне не пошли дальше арифметики дробей, уравнений первой степени и неполного квадратного уравнения. Дело, однако, в том, что и египетские дроби — это не дроби в нашем понимании, и уравнения — это совсем не наши уравнения, такого понятия тогда не было. Древний ученый шел непроторенными путями, и в круге тех понятий и проблем его ум работал не менее интенсивно, чем теперь ум математика над той или иной нерешенной современной задачей.

Математические знания египетского писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, разделе имущества, обмене и распределении продуктов (денег в древнем Египте не было), измерении площадей полей и объемов плотин и зернохранилищ, переводе мер веса или емкости в другие единицы и т. п. Основное внимание в египетских текстах сконцентрировано не на методах решения задач, а на самих вычислениях. И сами методы часто зависят от тех вычислительных трудностей, которые встают перед решающим задачу. Задачи в подавляющем большинстве еще совсем не абстрагированы и не обобщены.

Конечно, изложение математики, письменное или устное, предполагает некоторую систематизацию материала. Ее мы находим в папирусе



Числовые знаки разных народов

Райнда. Классификация задач производилась не по методам (например, задачи на пропорции, линейные уравнения и т. д.), а по темам. Задачи на припек можно объединить в один класс, задачи о емкости зернохранилищ и сосудов — в другой и т. д. При этом фактически определялась математическая суть данной группы, а значит, единый метод решения, хотя он не был сформулирован общим образом. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Однако при решении вычислитель пользуется некоторыми общими законами. Так, решение первой группы задач основано на пропорциональной зависимости, второй — на формулах объема тел и т. д. Иногда дается проверка найденного решения.

Для тренировки учащихся составлялись задачи развлекательного характера, не имевшие прямого практического применения, либо только имевшие вид практических. Наиболее яркой из них, пожалуй, была задача на геометрическую прогрессию,— замечательная своей историей «задача-путешественница». В дальнейшем она с небольшими модификациями не раз встречалась в разные эпохи и у разных народов:

«Лестница	дом	7		
	кошка	49	1	2 801
	мышь	343	2	5 602
	ячмень	2401	4	11 204
	мера	16 807	вместе	19 607»

Как видно, в задаче речь идет о 7 кошках в каждом из 7 домов; каждая кошка съела по 7 мышей, из которых каждая съела по 7 колосьев ячменя; каждый же колос мог дать 7 мер хлеба. Сумма домов, кошек, мышей, колосьев и мер хлеба находится путем умножения

$$2801 \cdot 7 = 2801 \cdot (1 + 2 + 4)$$

(о египетском способе умножения см. стр. 24). Существует несколько гипотез о том, как именно было получено данное решение. Всякий раз при разборе древних решений исследователю приходится разгадывать, как оно было получено; согласно О. Нейгебауеру, в этом случае вычисление соответствовало схеме:

	1	1	7	49	343	2 401	2 801
	2	2	14	98	686	4 802	5 602
	4	4	28	196	1372	9 604	11 204
Вместе	7	7	49	343	2401	16 807	19 607

Искусство счета

Счет у египтян был по своей идее очень прост. Он состоял из умения складывать, удваивать, дополнять дроби до единицы. Египетская арифметика покоилась на этих основных процедурах.

Мы видели, что аддитивной была сама система счисления. В такой системе счисления сложение в принципе возможно без знания наизусть таблицы сложения, достаточно механически присчитывать единицы и уметь переходить из разряда в разряд, т. е. укрупнять или раздроблять единицы разрядов числа. Впрочем, вряд ли можно сомневаться, что египетский математик знал таблицу сложения. Техника сложения и вычитания в папирусах не описана.

Умножение на целое число и деление без остатка производились с помощью удвоения, т. е. однократного сложения числа с самим собой. Для этого множитель представляли как сумму тех или иных членов последовательности 1, 2, 4, 8, 16, ..., что всегда возможно.

У египетского писца не было в распоряжении правил для умножения и деления чисел, подобных нашим, не было таблицы умножения до 9·9. Удвоение — простейший случай умножения, но ограничение им влекло за собой громоздкость умножения и деления даже в пределах области целых чисел, не говоря уже о дробях. Приведем в наших цифрах схему умножения 12 $\times$ 12 из задачи № 32 папируса Райнда, где множитель представлен в виде степеней двойки (колонка слева):

1	12
2	24
/4	48
/8	96
Сумма	144

Дальше удваивать не нужно, так как среди степеней двойки есть уже необходимые слагаемые множителя, они отмечались косой чертой. Заметим, что в подлиннике запись идет справа налево, т. е. на схеме у нас, по существу, зеркальное отображение от вертикали. Следует добавить, что особо выделялись еще умножение на 10 и 5, т. е. учитывались свойства десятичной системы.

Деление производилось как действие, обратное умножению. В задаче № 69 папируса Райнда, где делится 1120 : 80, указание гласит: «Умножай 80 (буквально: складывай, начиная с 80), пока не получишь 1120».

1	80
10	800
2	160
/4	320
	1120

Таким образом, непосредственно «пробуется», сколько раз делитель содержится в делимом. Частное складывается из чисел, соответствующих слагаемым делителя, отмеченным черточкой.

Наряду с удвоением при делении употреблялось раздвоение. Например, для вычисления 2 : 8 пользовались схемой

1	8
$\frac{1}{2}$	4
$/\frac{1}{4}$	2

С возведением в степень и извлечением корня древнеегипетский вычислитель имел дело при нахождении площади квадрата и объема куба или стороны квадрата по его площади. Однако он не умел выделять эти действия, специальной терминологии еще не существовало. При вычислении $2^2 = 4$ в Московском папирусе говорилось: «Сделай эти 2 в прохождении, получится 4». Имелось в виду, вероятно, нечто подобное квадрированию поля. А при извлечении $\sqrt{100} = 10$, как полагают, мыслилась процедура, обратная этой: «Сделай его угол» (уверенности в точности этого перевода нет).

Египетские дроби

Самым трудным был случай нецелого деления. Общими рациональными дробями вида $m \,/\, n$ египтяне не оперировали. Это не значит, что они не имели вообще представления о таких дробях, хотя, разумеется, теперешнее определение дроби как пары целых чисел (m, n) было им чуждо; впрочем, удовлетворительные с нашей точки зрения определения этого понятия появляются только в XIX в. Представления, равносильные идее общей дроби, у египтян, во всяком случае, имелись, ибо они умели по-своему выражать частные вида $m : n$. Для этого им служили аликвотные дроби — доли единицы вида $1/n$, которые мы, как это принято у историков математики, будем записывать в виде $\bar{n}$ (черточка символизирует египетский знак 𓂋). Деление $m : n$ египтяне иногда представляли как умножение $m \cdot \bar{n}$; в этом, быть может, сказалось влияние математики вавилонян, которые всегда приводили деление на целое число к умножению на обратную ему дробь.

Кроме дробей вида $\bar{n}$, египтяне оперировали еще дробью 2/3, для которой имелся свой знак 𓂌; мы будем обозначать ее $\bar{\bar{3}}$.

Появление класса аликвотных дробей весьма характерно для начального развития понятия числа в любой древней цивилизации. Это первое появление дробей из процесса дробления целого на части (другой источник возникновения дробей — процесс измерения), если не считать «натуральных» дробей типа 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6 и 1/8, которые имели индивидуальные названия (это были доли египетской единицы площади «сетат»). Эти натуральные дроби возникли одновременно с целыми также из процесса деления целого на более или менее крупные части. Деление же единицы на большое число в практике вряд ли встречалось, но выполнялось в задачах вычислителями «теоретически», при мысленном дроблении.

Аликвотные дроби типа $1/n$ являются первыми алгоритмическими дробями. Дальнейший этап развития рационального числа — это употребление этих долей как m целых чисел, т. е. интерпретация дроби m/n как целого именованного числа. Однако в древнеегипетской математике далее этих основных дробей, получивших название египетских, развитие не пошло.

Тем самым в вычислительной технике древнего Египта появилась теоретико-числовая задача о разложении дробей на сумму аликвотных. Задача, не имеющая единственного решения, решалась египтянами эмпирически, в несколько этапов. Она сводилась к составлению таблицы канонических разложений для дробей $2/n$, поскольку при делении основной операцией было удвоение. С такой таблицы начинается папирус Райнда. Разложения с $n = 3$ до $n = 101$ скрывают в себе, подобно молчаливому сфинксу, секрет их составления. Над разрешением этой египетской загадки работали многие ученые; мы будем придерживаться хода рассуждений Б. Л. ван дер Вардена.

Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть, они встречались на каждом шагу, и к ним привыкли. В текстах они употребляются без особых разъяснений:

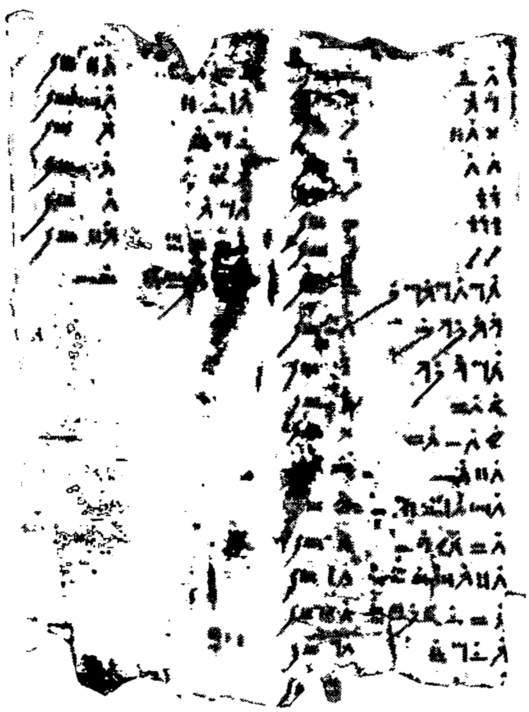
$$\bar{6} + \bar{6} = \bar{3},$$
$$\bar{6} + \bar{6} + \bar{6} = \bar{2},$$
$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{\bar{3}},$$
$$\bar{3} + 6 = \bar{2}, \qquad (1)$$
$$\bar{2} + \bar{3} + \bar{6} = 1. \qquad (2)$$

Все это простейшие дроби, операции с которыми были так же хорошо известны, как операции с целыми числами. Отсюда простыми комбинациями могли вывести такие соотношения:

$$\bar{\bar{3}} = \bar{2} + \bar{6}, \qquad (3)$$
$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{\bar{3}} + \bar{6}, \qquad (4)$$
$$\bar{\bar{3}} + \bar{2} = 1 + \bar{6}. \qquad (5)$$

Как свидетельствуют задачи, которые содержатся в кожаном свитке, хранящемся в Лондоне и относящемся примерно к XVIII—XIX вв. до

Кожаный свиток Британского музея
(*R. K. Glanville*. The mathematical leather roll in the British museum. The Journal of Egyptian Archeology, 1927, t. 13, p. 232)



н. э., выражения (1) — (5) делятся на 2, 3, 4, и получается еще серия разложений:

$$\bar{6} + \overline{12} = \bar{4},$$
$$\bar{9} + \overline{18} = \bar{6},$$
$$\overline{12} + \overline{24} = \bar{8}$$

и т. п. Очень важно правило (3), которое фактически представляет начало создания таблицы канонических разложений при удвоении дробей:

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{2} + \bar{6} \quad \text{(то же, что (3))},$$
$$\bar{9} + \bar{9} = \bar{6} + \overline{18} \quad \text{(разделено на 3)},$$
$$\overline{15} + \overline{15} = \overline{10} + \overline{30} \quad \text{(разделено на 5)}$$

и т. п. Ясно, что в таблице должны содержаться разложения только для нечетных n, так как при удвоении дроби $1/2k$ она дает просто $1/k$. Далее, при удвоении дробей вида $1/3k$ можно пользоваться разложением

$$2\cdot\overline{3k} = \bar{\bar{3}}\bar{k} = (\bar{2} + \bar{6})\,\bar{k} = \overline{2k} + \overline{6k}.$$

Эта часть таблицы, как признают все исследователи, самая древняя. Остается понять главное: общий случай разложения дроби на основные. Оказывается, надо просто делить 2 на n. Для нас такой вывод тривиален, для древнеегипетского вычислителя он был гениальной догадкой. Вычислитель поступает так в своей таблице начиная с $n = 11$. При этом деление 2 на 5, 9, 11, 17, 23, 29 производится при помощи ряда дробей, начинающихся с последовательности $\bar{\bar{3}}$ (ведь дробь 2/3 была натуральной, традиционной), а на 7, 13 — с последовательности $\bar{2}$.

Красные числа

В дальнейшем, начиная с $n = 31$, когда вычисления усложняются, прибегают к другому методу — методу так называемых красных вспомогательных чисел. Они представляют собой при известной модернизации дополнительные множители, подобные тем, которыми мы пользуемся при приведении дробей к общему знаменателю. Но от современных дополнительных множителей они отличаются принципиально. Дело в том, что красные числа могут быть не только целыми, но и дробными. Получается это оттого, что здесь общим знаменателем является не наименьшее общее кратное — этого понятия еще не существовало,— а просто в большинстве случаев наибольший из знаменателей данных дробей. Все остальные дроби выражаются через эту наименьшую дробь, «измеряются» некоторой минимальной мерой, которая не всегда может целое число раз уложиться в заданных величинах. Эта процедура нужна была в тех сложных случаях деления 2 на 31, ..., когда, по египетскому способу, получив 1 с некоторой дробью, требовалось оценить, сколько же еще не хватает до 2. Таким образом, выделялась самостоятельная вычислительная задача дополнения некоторой суммы дробей до 1. Такие задачи специально разобраны в папирусе Райнда.

Приведем один пример. Схема деления 37 на $1 + \overline{\overline{3}} + \overline{2} + \overline{7}$ в задаче 33 папируса Райнда такова:

1	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{2} + \overline{7}$
2	$4 + \overline{3} + \overline{4} + \overline{28}$ (так как $2 \cdot \overline{7} = \overline{4} + \overline{28}$)
4	$9 + \overline{6} + \overline{14}$ (так как $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$)
8	$18 + \overline{3} + \overline{7}$
16	$36 + \overline{\overline{3}} + \overline{4} + \overline{28}$

Удвоение приводит почти к результату. Теперь надо найти, сколько недостает дроби $\overline{\overline{3}} + \overline{4} + \overline{28}$ до единицы и, кроме того, выразить в каких-то других «универсальных» единицах эту недостачу и делитель, чтобы можно было сравнить их. Здесь такой единицей является дробь $\overline{42}$, а не $\overline{28}$, потому что главная цель красных чисел — дать в сумме целое число. Остаток в новых единицах, т. е. долях $\overline{42}$:

1	42	
/ $\overline{\overline{3}}$	*28*	
$\overline{2}$	21	
/ $\overline{4}$	*10*	$\overline{2}$
/ $\overline{28}$	*1*	$\overline{2}$

Итак, красные числа (они набраны курсивом) $28 + 10 + \overline{2} + 1 + \overline{2}$ в сумме дают 40. Значит, до единицы не хватает двух $\overline{42}$. Делитель же в новых единицах слагается из

1	42
$\overline{\overline{3}}$	28
$\overline{2}$	21
$\overline{7}$	6

т. е. равен 97 этих новых единиц. Следовательно, в нашей первой схеме удвоений к частному 16 надо еще прибавить $2 \cdot \overline{97}$, что по таблице канонических разложений представляется суммой $\overline{56} + \overline{679} + \overline{767}$. Тогда в правой части схемы будет число 37, которому в левой части будет соответствовать частное, равное $16 + \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$. Это и есть ответ.

Мы видим, что при решении вычислительных задач понятие числа развивалось. Приведение дробей к общему знаменателю проводилось на том уровне, когда операции ограничивались областью целых чисел, аликвотных дробей и дроби 2/3. Но разработка самой процедуры приведения требовала перевода одних долей в другие и тем самым раздвигала границы числового понятия. Дробь понимается здесь как мера, как именованное число: «столько-то таких-то». Задачи на перевод одних мер в другие решались специально — требовалось переводить объем и вес в другие единицы. Однако это обобщение не привело еще к выделению более общего понятия дроби. Вместе с тем поражает искусство, с каким владел древнеегипетский вычислитель всей описанной техникой операций.

Задачи на «аха»

Разобранная только что задача № 33 из папируса Райнда представляет собой частный случай так называемых задач на «аха» (или, как раньше писали, «хау»). С современной точки зрения, в них решаются уравнения первой степени вида

$$x + ax + bx + cx + \ldots = p,$$

откуда

$$x = \frac{p}{1 + a + b + c + \ldots}$$

(такое деление и было рассмотрено выше). Несомненно, что задачи этого рода соответствуют нашим линейным уравнениям с одним неизвестным. Само слово «аха» означает «кучу», «груду» — здесь в смысле количества, и, конечно, это количество есть неизвестная, которую требуется найти. Однако, как ни просты эти задачи, существуют различные толкования их решения. Скорее всего, египтяне пользовались приемом, который много позднее в Европе Средних веков получил название способа ложного положения.

Например, условие задачи № 26 в папирусе Райнда гласит: «Количество и его четвертая часть дают вместе 15» (мы бы записали: $x + \frac{1}{4}x = 15$), а решение начинается словами: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, имеют 1; вместе 5». После того вычисляются $15 : 5 = 3$ и $4 \cdot 3 = 12$. Естественно понимать дело так. Вычислитель принимает, что количество есть 4, тогда прибавление четверти количества дает 5, а должно быть втрое больше ($15 : 5 = 3$); поэтому искомое количество также должно быть втрое больше принятого ($4 \cdot 3 = 12$). Вообще, если «ложное положение» есть x_1 и оно дает p_1 вместо p, то

$$x : x_1 = p : p_1, \qquad x = x_1 \cdot \frac{p}{p_1}.$$

Такие общие рассуждения и пропорции в папирусах не встречаются, но идея пропорциональности, на которой основано правило ложного положения, была очень простой и доступной и, кроме того, широко распространенной в древности. Если, как в задаче № 33, количество полагают сначала равным $x_1 = 1$, то $x = p/p_1$ и дело сводится просто к делению.

С помощью метода ложного положения египтяне решали также задачи, которые можно выразить двучленным квадратным уравнением $ax^2 = b$. Такова, например, задача № 6 Московского папируса, в условии которой сообщается, что 3/4 длины являются шириной, а площадь равна 12 и требуется определить стороны прямоугольника. Судя по порядку действий, решение основано на пропорциональной зависимости между квадратом предположенного значения длины, равной 1, и площадью, равной в таком случае 3/4, а также квадратом истинной длины x и истинной заданной площадью 12:

$$1^2 : x^2 = \frac{3}{4} : 12.$$

Отсюда

$$x^2 = 12 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}}.$$

В египетском решении прежде всего вычисляется $1 : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$. Далее находится произведение $12 \cdot 1\frac{1}{3} = 16$ и $\sqrt{16} = 4$. Наконец, ширина есть $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Правда, имеются и другие истолкования этого решения.

В группе задач на «аха», первых в истории математики отвлеченных задачах, решенных единым методом, мы видим зачатки алгебры как науки о решении уравнений.

Прогрессии

Особенно следует упомянуть случаи арифметических прогрессий в папирусе Райнда. Их мы находим в задаче: «Наставление, как определять разности. Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет 1/8 меры». Здесь количество хлеба составляет арифметическую прогрессию из 10 членов с разностью 1/8. Автор находит, что 10-й член прогрессии равен

$$1 + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{16}.$$

Мы уже упоминали задачу о домах, кошках, мышах и т. д., представлявшую собой задачу на геометрическую прогрессию.

Геометрические знания

Геометрические знания египтян относятся к измерению площадей и объемов. Некоторые найденные при этом результаты были замечательными, но в отдельную отрасль математики геометрия еще не превратилась.

Площади прямоугольников, треугольников и трапеций вычислялись по точным правилам, площадь произвольного четырехугольника — по приближенному правилу, как произведение полусумм пар противоположных сторон a, c и b, d, т. е.

$$S = \frac{a+c}{2} \frac{b+d}{2}.$$

Этот прием распространялся и на треугольники при $d = 0$. Все такие задачи возникли из практики землемерия. Не было термина «сторона» фигуры и самого термина «фигура» — говорили о поле, об участке с границами или с «шириной» и «длиной». Мы увидим, что такого рода терминология одинаково свойственна древним задачам как египтян, так и других народов. Возникает вопрос, почему пользовались только что приведенным правилом для площади произвольного четырехугольника, погрешность которого в общем случае может быть весьма и даже сколь угодно велика? Ведь всякий четырехугольник можно разбить на правильные треугольники и трапеции. Здесь мы встречаемся с «математической практикой» в ее начальной форме. Вероятно, на деле это правило применялось к участкам, которые по форме своей близки к прямоугольнику. В надпи-

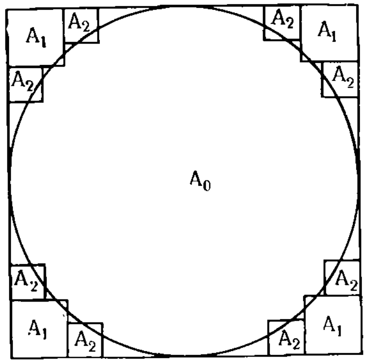


Рис. 1

сях на стенах храма Гора в Эдфу в перечне пожертвований по этому правилу подсчитаны размеры земельных участков, например: «22 на 23; 4 на 4; это равно 90». И треугольные площади в этом случае имели форму, при которой землемеры могли употреблять неверное правило без существенной ошибки. Сознавали ли эти землемеры, что правило только приближенное, это уже другой вопрос, на который мы не можем ответить.

Необходимо указать еще, что широко распространенное мнение о знакомстве древних египтян с так называемой теоремой Пифагора не опирается на какие-либо египетские тексты. В них нигде нет указаний ни на общую теорему Пифагора, ни на частные случаи треугольников, для сторон которых $a^2 + b^2 = c^2$. Правда, греческие ученые, побывавшие в Египте, сообщают, что для построения прямого угла употреблялась веревка, разделенная на 12 равных частей; с этой целью концы веревки связывались и она натягивалась в виде (прямоугольного) треугольника со сторонами 3 : 4 : 5. Но эти свидетельства относятся уже к середине I тысячелетия до н. э. Между тем, как мы увидим, теорема Пифагора была известна задолго до того в древнем Вавилоне.

Вычисление площади круга

При вычислении площади круга египтяне пользовались довольно хорошим приближением, полагая ее равной квадрату со стороной в 8/9 диаметра:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Этому правилу, содержащемуся в задаче № 50 папируса Райнда, отвечает значение $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}1605$, погрешность которого менее 1%. Метод получения правила неизвестен. Очень правдоподобна гипотеза А. Е. Раик о последовательности наложения квадратных сеток. Предполагается, что площадь круга диаметра d сравнивается с площадью описанного квадрата, из которого удалялись малые квадратики со сторонами $\frac{1}{6}d$, $\frac{1}{9}d$ (рис. 1). В наших обозначениях вычисления таковы.

Первое приближение:

$$S = d^2 - 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 d^2 = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right).$$

Второе приближение:

$$S = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 d^2 = d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)d^2 =$$

$$= d^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)d^2 = \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right)d\right]\left[\left(1 - \frac{1}{9}\right)d\right].$$

Именно так формулируется египетское правило вычисления площади круга. В пользу этой гипотезы свидетельствуют аналогичные вычисления в задаче Московского папируса, где предлагается сосчитать $\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$.

Объем пирамиды

Египтяне вычисляли объемы многих тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра — как произведение площади основания на высоту. Следует отметить, что такие расчеты производились в задачах на обмер зерна в амбарах, имеющих эти формы, и главное внимание уделялось переводу мер емкости сыпучих тел в геометрические меры объема и обратно.

Самым удивительным в геометрии египтян было правило для определения объема усеченной пирамиды, которое можно выразить формулой

$$V = (a^2 + ab + b^2)\frac{h}{3},$$

где a и b — стороны квадратных оснований пирамиды, h — высота ее (в тексте $a = 4$, $b = 2$, $h = 6$). Многие полагают, что при выводе этой формулы египтяне представляли пирамиду с одним перпендикулярным основанию ребром. Вероятно, пирамида разбивалась на части, указанные на рис. 2. Тогда она составляется из четырех пирамид

$$V = \frac{1}{3}a^2h + \frac{1}{3}b^2h + 2\cdot\frac{1}{3}b\left(a\cdot\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab).$$

Существуют и другие реконструкции, но, во всяком случае, нельзя представить себе, что этот результат был получен без геометрических и арифметических рассуждений. Что касается объема четырехгранной пирамиды, то он мог быть получен эмпирически. Возможно, что правило, которое нетрудно установить для угловой пирамиды в кубе, было распространено на остальные случаи.

Интерес к вычислению объема пирамиды и усеченной пирамиды был совершенно естественным в Египте. В этой связи заметим, что египетские строители умели математически охарактеризовать угол наклона α боковой грани к квадратному основанию пирамиды числом локтей, на которое высота, опущенная из вершины пирамиды на сторону основания, отходит от вертикали при подъеме на один локоть. В сущности, они имели дело при этом с отношением высоты пирамиды к половине стороны основания, т. е. с $\operatorname{ctg}\alpha$.

Загадочной является упомянутая выше задача № 10 Московского папируса, где вычисляется поверхность корзины «с отверстием $4\frac{1}{2}$». Текст неясен, а может быть, и неполон. В. В. Струве усмотрел в нем совершенно

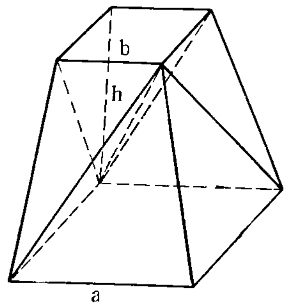


Рис. 2

точное правило вычисления поверхности полушара, Т. Пит — боковой поверхности цилиндра, а О. Нейгебауер — приближенное вычисление куполообразного амбара для хранения зерна. Как бы то ни было, и в этой задаче нашему числу π соответствует уже упоминавшееся значение $4\,(^8/_9)^2$.

Значение математики древнего Египта

Как мы видели, в древнем Египте математика представляла собой совокупность знаний, еще не расчленившуюся на арифметику, алгебру, геометрию и выступающую прежде всего как собрание правил для численного решения простейших арифметических, алгебраических и геометрических задач. Проблемы, стоявшие перед египетскими писцами, были главным образом практические. Многие решения находили путем проб, ощупью, эмпирически, и не удивительно, что они оказывались иногда громоздкими и требовали преодоления больших трудностей, которые не встретились бы на другом пути (примером могут служить операции с дробями). Но наряду с этим еще в начале II тысячелетия до н. э. шла интенсивная работа творческой мысли, задачи обобщались и начинали принимать более абстрактный характер. При исследовании отдельных проблем вырабатываются приемы геометрических и арифметико-алгебраических преобразований, которые, как и проверка решений, уже предвещали дальнейший рост этих составных частей математической дедукции. Догматическая манера изложения и обучения не могла полностью сорвать эти первые ростки идеи математического доказательства. Эти ростки, как мы увидим, еще более отчетливо видны в математике древнего Вавилона.

Математика древнего Египта оказала несомненное влияние на последующие судьбы науки. Сами греки рассказывали, что многие начальные сведения приобретены ими во время поездок в Египет. В этих рассказах много легенд, но в основе своей они сообщали правду. Когда Прокл писал в V в., что «согласно большинству мнений, геометрия была впервые открыта в Египте, имела свое происхождение в измерении площадей» [1], он лишь следовал ученым VI—V вв. до н. э.

---

[1] *Proclus Diadochus.* In primum Euclidis Elementorum commentarii. Ed. C. Friedlein. Leipzig, 1873, p. 64.