ТРЕТЬЯ ГЛАВА

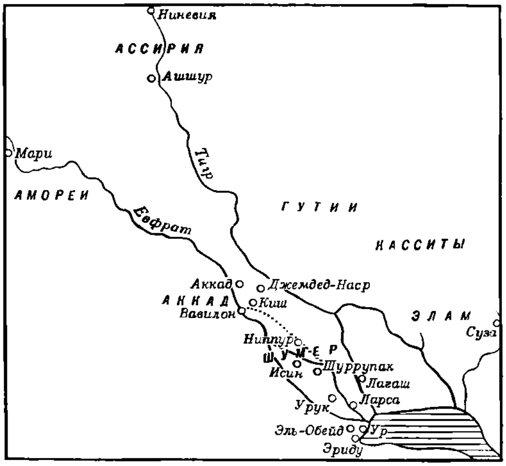
ВАВИЛОН

Древнее Двуречье

Мы называем культуру древнего Двуречья, образованного Тигром и Евфратом, вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Двуречье называют также Месопотамией (от греческих слов μέσος — средний, ποταμός — река, т. е. Междуречьем). Однако первоначально эта культура возникла не в Вавилоне, а значительно южнее, на берегу Персидского залива. На речных наносных почвах дельты Тигра и Евфрата, постепенно оттеснивших берег залива на юг, еще в IV тысячелетии до н. э. жили шумеры — народ с языком, непохожим на языки известных групп (для сравнения приведем шумерские числительные 1 — диш, 2 — мин, 3 — эш). Здесь возникли шумерские города Ур, Урук (библейский Эрех), Лагаш и Ларса. Севернее жили семиты аккадяне (ср. их числительные 1 — иштен, 2 — шина, 3 — шалашу с арабскими, приведенными на стр. 11), главным городом которых был Аккад.

Основа культуры Двуречья была заложена шумерами. Именно шумеры изобрели клинописное письмо, при котором буквы выдавливаются в виде нескольких клиньев деревянной палочкой на сырой глине, подвергаемой затем обжигу. Это письмо впоследствии было приспособлено к своим языкам вавилонянами, ассирийцами, хеттами, персами и предками армян — урарту. Шумеры пользовались шестидесятиричным счетом, который лег в основу вавилонской математики и отразился на нашем делении круга и счете времени. Шумерские зиккураты — «храмы неба», многоступенчатые сооружения на искусственных холмах,— были прототипами знаменитой Вавилонской башни. Шумерами впервые был применен и такой элемент архитектуры, как арка.

В XXIII в. до н. э. оба государства Двуречья были объединены аккадским царем Саргоном I; начиная с XXI в. до н. э. с востока и запада вторгаются многочисленные племена эламитов и аморитов. Вскоре шумеры как народ исчезают с политической сцены, и уже авторы библейских преданий не знают о его существовании; история шумеров была восстановлена только в новейшее время. В XIX—XVIII вв. до н. э. возвышается новое царство со столицей в Вавилоне, вблизи нынешнего Багдада, возглавляемое царями аморитянской династии. Ее наиболее выдающийся представитель Хаммурапи вновь полностью объединил в XVIII в. до н. э. всю Месопотамию и Сирию; особенно он прославился своим сводом законов. В последовавшей затем борьбе с иноземными нашествиями Вавилонское государство не раз испытало периоды упадка и подъема. При вавилонском царе Набонассаре (747—735 гг. до н. э.) начинаются регулярные астрономические наблюдения, сведения о которых сохранились до настоящего времени в передаче александрийских астрономов (эти наблюдения датируются «эрой Набон ссара», начавшейся в 747 г. до н. э.).



Древнее Двуречье

В XVI в. до н. э. в верхнем течении Тигра возникает ассирийское царство с главными городами Ассуром и Ниневией — столицей Нина и Семирамиды. В 729 г. до н. э. ассирийский царь Тиглатпилесар III захватывает Вавилон. Наибольшего расцвета ассирийская держава достигла при Асархаддоне (680—669 гг. до н. э.). В 538 г. до н. э. Вавилон и Ассирию захватывает персидский царь Кир, а в 336 г. до н. э. — Александр Македонский, после смерти которого Двуречье становится одной из областей эллинистического государства Селевкидов. Во II в. до н. э. Вавилон был мертвым городом и лежал в руинах, но вавилонская математика и особенно астрономия еще продолжали развиваться. К эпохе Селевкидов относятся некоторые важные тексты. Последние клинописные таблички дошли до нас от конца I в. до н. э.

Источники

Источниками для изучения математики Вавилона являются математические клинописные тексты, обнаруженные при археологических раскопках или найденные случайно местными жителями в развалинах старых сооружений. Среди разрозненного, распыленного по музеям мира множества глиняных табличек (зарегистрировано их около 500 000) самых разных эпох, от начала III тысячелетия до н. э. до I в. н. э., известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами; имеются также в большом числе хозяйственные записи, многие из которых еще не прочитаны. Расшифровка и анализ клинописных текстов открыли неведомый до той поры мир математика древнего Двуречья, жившего четыре тысячелетия назад. Здесь особенно значительны заслуги О. Нейгебауера, работы которого, появившиеся в 30-е годы нашего столетия, породили бурный поток исследований в этой области. Публикации клинописных текстов по математике принадлежат также ассирологу Ф. Тюро-Данжену, позднее А. Саксу (совместно с О. Нейгебауером), Э. М. Брёйнсу, А. А. Вайману и многим другим.

В древнем Двуречье, как и в Египте, общественными работами руководили писцы, занимавшиеся также учетом хозяйства, составлением торговых документов и деловой перепиской. Писцы были тесно связаны с храмами, в которых и хранились глиняные таблички с клинописными текстами. Как и в Египте, специальность писца была почетной: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу». Нередко писцами становились сыновья правителей, ведь писцы относились к правящему классу. «Дом табличек» — так называлась школа или академия, где писцы обучались. «Писец должен был уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих»,—написано в послании одного ученика к другому.

Математические клинописные тексты, как и египетские, носят учебный характер и содержат в основном расчетные задачи; однако вавилонская вычислительная техника была гораздо более совершенна, а среди задач выделяется обширный класс алгебраических задач, которые выражаются системами линейных уравнений и уравнений второй степени. И хотя в клинописных текстах, как в египетских, нет доказательств, методы вычислений показывают, что их авторы знали и применяли законы алгебраических дробей и преобразований. В целом вавилонская математика в большей мере, чем египетская, приобретает знакомый нам вид самой абстрактной из наук, и внутренние потребности получают в ее развитии большее значение.

Вавилонская нумерация

В Вавилоне мы впервые встречаемся с последовательной позиционной нумерацией. Эта нумерация была построена на использовании только двух клинописных знаков 𒁹 и 𒌋, первый из которых обозначал 1 и 60, а второй — 10 и 600. Шумеры, впервые применившие шестидесятиричный счет, обозначали 60 и 600 клиньями большего размера, чем 1 и 10, но вавилоняне стали обозначать соответственные числа одинаковыми клиньями. При записи чисел от 1 до 59 знаки единицы и десяти записывались столько раз, сколько в данном числе единиц и десятков, причем разряды располагались в том же порядке, что и у нас. Числа, кратные 60, от 60 до $59 \cdot 60$ записывались точно так же, как соответственные множители от 1 до 59 слева от чисел, меньших 60. Вавилонские цифры изображены в четвертом столбце таблицы на стр. 22.

Впоследствии знак 𒁹 стал обозначать не только 1 и 60, но и 3600, и любые числа 60^n, а также 1/60 и любые другие числа вида $1/60^n$. Знак 𒌋 стал обозначать не только 10 и 600, но и 36 000 и любые числа вида $10 \cdot 60^n$, а также 1/6 и любые другие числа вида $10/60^n$. Таким образом, вавилоняне пользовались шестидесятиричной системой счисления (сохранившей некоторые следы десятичной системы) и шестидесятиричными дробями.

В более позднее время вавилоняне ввели знак, имеющий значение нуля, и, если $m - n > 1$, между числами, кратными 60^m и 60^n, вставлялось $m - n - 1$ таких знаков.

Вавилоняне обладали также специальными знаками для дробей 1/2, 1/3 и 2/3.

Вавилонская нумерация весьма близка к первоначальной финикийской, где 1 и 10 обозначались знаками / и 7, близкими к вавилонским знакам

𒁹 и 〈. Финикийские цифры изображены в пятом столбце таблицы на стр. 22. Тот факт, что финикийский знак 7 направлен в другую сторону, чем вавилонский знак 〈, объясняется тем, что финикияне, как и египтяне, писали справа налево, а вавилоняне — слева направо. Кроме этих двух знаков, у финикиян был еще знак Н, означающий 20, и знак Р, означающий 100, причем последний знак не повторялся, а справа от него записывалось число сотен, т. е. знак Р применялся в соответствии с мультипликативным принципом.

Финикийские цифры, видимо, непосредственно происходят от счета на пальцах: знак / означает палец, знак 7 — две руки, знак Н — человека с двумя руками и ногами. Знак Р, вероятно, появился позднее и происходит от какого-нибудь иероглифа.

По-видимому, вначале вавилоняне пользовались той же нумерацией, что и финикияне, но впоследствии отказались от знака для 20 и стали придавать каждому знаку наряду с его старым числовым значением новое значение, отличавшееся от него в 60 раз. Возможно, что на одной из промежуточных стадий у вавилонян был специальный знак для 60, аналогичный финикийскому знаку для 100 и помещавшийся между шестидесятиричными разрядами, подобно финикийскому знаку Р.

В шестом и седьмом столбцах таблицы на стр. 22 изображены цифры, обнаруженные на таблицах, найденных при раскопках городов древней Сирии.

Вычислительная техника

И позиционный характер вавилонской нумерации и довольно большое ее основание, естественно, наложили печать на всю технику вычислений. Заметим, что в дальнейшем мы будем, как принято теперь, отделять целую часть числа, записанного в шестидесятиричной системе, точкой с запятой, а отдельные разряды — запятой; например:

$$2,21;12,27 = 2\cdot 60 + 21 + \frac{12}{60} + \frac{27}{60^2}.$$

Сложение и вычитание производили так же, как это делается в десятичной позиционной системе целых и дробей. Впрочем, имелось одно несущественное отличие, связанное с употреблением всего двух знаков — единицы и десяти. При сложении, например, помимо перехода от какого-либо шестидесятиричного разряда к ближайшему следующему (когда сумма единиц превосходит 59), бывало нужно и в пределах данного разряда переходить от одной десятки к следующей за ней (когда сумма единиц превосходит 9).

При умножении затруднение, связанное с большим основанием системы нумерации, преодолевалось с помощью специальных таблиц. Дело в том, что вавилоняне не пользовались одной таблицей умножения до $59\cdot 59$, запомнить которую нелегко, так как она содержит 1770 элементов (в нашей десятичной таблице их всего 45). Для умножения, как и для деления, существовал обширный набор таблиц.

Прежде всего, имелись таблицы произведений чисел n, называемых теперь «заглавными», на числа $m=1, 2, 3..., 19, 20, 30, 40, 50$ (здесь и далее мы отвлекаемся от разряда этих чисел совершенно так же, как это делается в наших таблицах). В принципе было бы достаточно взять в качестве заглавных чисел те же m: это заменило бы таблицу умножения до 59·59. Можно было бы даже обойтись без множителей 11, 12, ..., 19. В самом деле, например, 37·19 = (30 + 7) (10 + 9) и т. д. Но вавилоняне для своих вычислений разработали гораздо более обширный набор таблиц, и область заглавных чисел далеко выходит за пределы чисел m. Например, среди заглавных чисел имеются такие числа, как

1,15	2,15	12,30
1,20	2,24	16,40
1,30	3,45	36
1,40	7,30	45

а также такие «трехзначные» числа, как 2,13,20 или 44,26,40. Наличие заглавных чисел вроде 1,20 = 80; 1,40 = 100 или 16,40 = 1000, встречающихся весьма часто, не удивительно. Но зачем включены были числа вроде 2,13,20, т. е. 8000, или 44,26,40, т. е. 16 000? Это объясняется тем, что таблицы умножения были тесно связаны с таблицами деления.

Операцию деления в вавилонской математике можно назвать проблемой № 1. Известный теперь каждому школьнику процесс поразрядного деления не был полностью известен в те далекие времена. Египтяне, как мы видели, пользовались при делении удвоением и сложением. Вавилоняне пошли по другому пути. Деление a на b они свели к умножению $c = a\bar{b}$, и даже термина «делить» у них не существовало. Всякий раз они говорили так: возьми обратную от b, ты увидишь $\bar{b}$; умножь a на $\bar{b}$, ты увидишь c. Разумеется, вместо наших букв вавилонянин называл конкретные числа. Главное внимание, таким образом, было уделено составлению таблиц обратных величин.

Самые ранние и наиболее употребительные такие таблицы содержали обратные значения тех чисел от 2 до 1,21 = 81, которые имеют вид $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, и потому точно представимы шестидесятиричной дробью с конечным числом разрядов; мы будем называть числа такого вида правильными. Эти таблицы таковы:

Обратное	2	есть	30	Обратное	27	есть	2,13,20
»	3	»	20	»	30	»	2
»	4	»	15	»	32	»	1,52,30
»	6	»	10	»	36	»	1,40
»	8	»	7,30	»	40	»	1,30
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	25	»	2,24	»	1,21	»	44,26,20

Существовали и гораздо более обширные таблицы чисел, обратных правильным, составленные в эпоху Селевкидов (III в. до н. э.) — время бурного развития астрономии. Например, в одной таблице приведены обратные значения чисел $125 \cdot 2^n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, 29$; при $n = 29$ числу 1,26,18,9,11,6,40 соответствует обратное значение 0; 0,0,0,0,0,0,41,42,49,22,21,12,39,22,30.

Как видно, в приведенной таблице встречаются оба трехзначных числа, которые включались в таблицы умножения. Вообще, таблицы деления и умножения так же взаимно обратны, как и сами эти операции. Если еще учесть, что числа записывались с точностью до множителя $60^{\pm n}$, то каждая сторона таблицы могла служить для различных вычислений. Например, «обратное 8 есть 7,30» можно понимать, как $\overline{8} = 0;7,30$ и вообще как $\overline{8}\cdot 60^{\pm n} = 0;\ 7,\ 30\cdot 60^{\pm n}$, а так же как $\overline{7;\ 30} = 0;8$ и вообще как $7;\overline{30}\cdot 60^{\pm n} = 0;8\cdot 60^{\pm n}$.

Каждая из таблиц обратных величин довольно обширна. При их составлении сыграло существенную роль основание системы счисления $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$. В пределах первого десятка встречается всего одно «неправильное» число 7, но уже во втором десятке их четыре: 11, 13, 17, 19, а всего до 60 их двадцать два. В более ранних таблицах обратных значений неправильные числа фигурируют обычно до 19, а в одной таблице, относящейся к середине III тысячелетия до н. э., даже до 59. В них против неправильных чисел стоит запись «обратного нет». Как производилось деление, когда делимое кратно неправильному делителю, не сообщается; быть может, частное находили подбором.

В более поздних таблицах даются приближенные значения для некоторых неправильных чисел, например для $\overline{7}$ значение 8,34,17,8,34,17, где дважды повторен период шестидесятиричного разложения этой дроби $\overline{7} = (8,34,17)$. Получивший такое приближение ученый должен был вплотную подойти к открытию периодических шестидесятиричных дробей. Однако клинописные таблицы ничего не сообщают о мыслях, которые могли возникнуть при таком вычислении. Иногда найденные приближения оценивали снизу и сверху; так, они знали, что $\overline{7}$ больше 0;8,34,16,59 и меньше 0;8,34,18. В одной древневавилонской таблице приведены обратные значения всех чисел от 56 до 80; здесь имеются приближения вроде 1,1,1 для $\overline{59}$ и 50,42,15 для $\overline{71}$, а всего 11 приближенных значений чисел, обратных неправильным. Деление на неправильное число производилось редко, его старались избегать, как обычно избегают неприятности. Оно встречается в основном при решении квадратных уравнений, возможно, потому, что основное внимание уделяли алгебре, а не счету, и не следили специально за тем, чтобы избежать деления на неправильные числа.

В распоряжении писцов были также таблицы обратных постоянных, применявшихся в хозяйственных расчетах. Так, например, приходилось иметь дело с различными характеристиками строительного материала, в особенности кирпичей, обожженных из сырца, 1-локтевых, 1/2-локтевых, 1/3-локтевых и т. д. В своих расчетах писец оперировал объемом не одного кирпича, а целого штабеля кирпичей. Пусть объем штабеля равен V_0. Чтобы подсчитать количество кирпича, требуемого для задуманного сооружения, имеющего объем V, писец должен найти количество штабелей $N = V\cdot \frac{1}{V_0}$. Здесь требуется обратная постоянная $\gamma = 1/V_0$. Обратных постоянных было много. Найдены три таблицы, расшифровать которые полностью еще не удалось. В них указаны нормы посевного и урожайного зерна в расчете на единицу площади поля и норма настрига шерсти с овцы и т. д.

Широкое применение различных таблиц — характерная особенность математики древнего Вавилона. Имелись таблицы степеней некоторых чисел до десятой включительно, пригодные одновременно для отыскания содержащихся в них корней; таблицы, ставящие в соответствие степени 2^n их показатели n (ими можно пользоваться в задачах на отдачу денег в рост); таблицы чисел вида $n^2 + n^3$, применявшихся в задачах, которые приводились к кубическому уравнению.

Арифметические задачи

Мы не будем подробно останавливаться на арифметических задачах, поскольку они не составляют характерной особенности вавилонской математики. Методы решения при этом опирались в основном на идеи пропорциональной зависимости и среднего арифметического. Даже задачи на раздел серебра между братьями в арифметической прогрессии решались на основе пропорциональной зависимости. Более развиты, чем у древних египтян, были представления об арифметической и геометрической прогрессиях.

Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данными первым и последним членами:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n .$$

В селевкидских текстах находятся задачи с суммированием n членов геометрической прогрессии, например $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$, правда, способ решения из текста не совсем ясен. По-видимому, было обнаружено, что в такой прогрессии

$$S_n = (S_{n-1} + 1) + S_{n-1},$$

— это легко заметить при небольшом числе слагаемых. Особенно замечательно правило суммирования ряда натуральных квадратов, высказанное применительно к сумме $1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2$; в буквенном выражении его можно записать следующим образом:

$$\sum_1^n m^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}\right) N, \quad \text{где } N = \sum_1^n m.$$

Был ли этот результат получен самостоятельно, неясно. В ту эпоху ряд натуральных квадратов, правда в несколько иной форме, просуммировал Архимед, и его вывод был известен, во всяком случае, александрийским ученым. С. Я. Лурье предложил остроумную реконструкцию геометрического вывода, дающего сразу только что приведенное правило (эта реконструкция изложена им в примечании к его переводу книги О. Нейгебауера «Лекции по истории античных математических наук»). В клинописных текстах мы находим первые задачи на проценты, как стали говорить, когда венецианские ростовщики ввели в обычай начислять рост «на сто» (pro centum). В отличие от Египта с его натуральным хозяйством, в древнем Вавилоне, стоявшем на перепутье торговых караванов многих народов Передней Азии, рано появились денежные знаки и кредит. Начисляли здесь 12 на 60, т. е., по-нашему, 20%. Вычислялись также сложные «проценты», как полагают, при помощи линейной интерполяции (снова пропорциональная зависимость).

Особый интерес представляет применение, которое получили арифметические прогрессии в астрономии.

Арифметические прогрессии в астрономии

Среди таблиц III—II вв. до н. э. находится таблица лунных эфемерид для 179 г. селевкидской эры (133/132 г. до н. э.), в которой первый столбец — номер месяца, второй — число и шестидесятиричные дроби суток

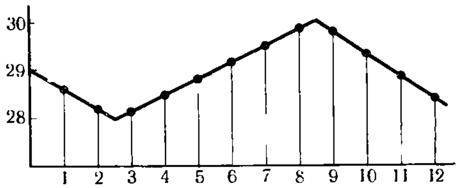


Рис. 3

Рис. 4

для момента соединения Луны с Солнцем:

12	28,55,57,58	7	29,31,21,22
1	28,37,57,58	8	29,49,21,22
2	28,19,57,58	9	29,56,36,38
3	28,19,21,22	10	29,38,36,38
4	28,37,21,22	11	29,20,36,38
5	28,55,21,22	12	29, 2,36,38
6	29,13,21,22		

Первые три числа второго столбца—возрастающая арифметическая прогрессия с разностью 18′, следующие шесть чисел составляют убывающую прогрессию с той же разностью и, наконец, последние четыре числа этого столбца снова образуют возрастающую прогрессию с той же разностью. График этой функции представляет собой зигзагообразную линию (рис. 3). Наблюдаемые величины времен соединений Луны и Солнца подчиняются значительно более сложной периодической закономерности, но вавилонские астрономы не могли ее точно получить и упрощали результаты наблюдений таким образом, чтобы они выражались уже известными им схемами.

Кроме того, астрономы того же времени составляли таблицы, характеризующие зависимость скорости Солнца v от его эклиптической долготы λ. Эти таблицы можно графически представить ступенчатыми ломаными линиями (рис. 4, где цифрам по оси абсцисс соответствуют 12 созвездий Зодиака).

В современной литературе описанные закономерности астрономических явлений часто называют «зигзагообразными» и «ступенчатыми» функциями. Древние астрономы графиков не строили и понятия функции не выработали. Они просто работали с таблицами, и с помощью этих таблиц старались описать видимые на небе периодически повторяющиеся явления.

Алгебраические методы

Можно спорить о том, являлись ли египетские приемы решения задач на «аха» и приемы их решения алгебраическими или арифметическими. В клинописных текстах мы находим большое число задач, представляющих собой уравнения и системы уравнений первой и второй степени, записанных без символов, но в своей особой терминологии и решаемых с помощью арифметико-алгебраических преобразований. Алгебра линейных и квадратных уравнений достигла высокого уровня уже в эпоху Хаммурапи; рассматривались также уравнения более высоких степеней.

В случае двух неизвестных одно называлось длиной (x), другое — шириной (y), их произведение—«площадью», «полем» или «длиной—шириной»; говорилось также о «сторонах моих квадратов» (т. е. x^2 и y^2). При этом в примерах всегда «длина» больше «ширины» ($x > y$). В задачах, приводящихся к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная — «глубина» (z), а произведение трех неизвестных именовалось «объемом». Приведенная терминология свидетельствует о происхождении ряда алгебраических задач из геометрии, но сами задачи имели совершенно отвлеченный характер. Это проявляется уже в том, что с неизвестными величинами, по названию имеющими различные измерения, обращались как с однородными, составляя выражения, равносильные нашим $xy + x$ и $xyz + xy$. Следует отметить также, что «длина», «ширина», «площадь» и т. д. изображались шумерскими знаками в текстах, написанных на аккадском языке. Поскольку разговорным был уже аккадский язык, а шумерский вышел из употребления, эти знаки приобретали характер настоящих математических символов. В некоторых случаях употреблялись и вовсе отвлеченные названия «множитель» и «обратное», обозначавшие собственно x и $y = 1/x$.

Уравнения первой степени и их системы в клинописных текстах встречаются редко. Способы решения применялись различные: исключение неизвестных, введение вспомогательных неизвестных, правило ложного положения (в случае одного неизвестного) и др. Вот пример из текстов древневавилонского периода, найденных при раскопках города Суз (в нашей символике):

$$\frac{y}{4} + x = 7,$$

$$x + y = 10.$$

Судя по вычислениям в тексте, древний вычислитель после освобождения от дробного коэффициента в первом уравнении и вычитания из него второго получил $3x = 18$, $x = 6$ и $y = 4$.

Область, в которой вавилонянам принадлежит основной успех—это решение задач на квадратные уравнения и системы, сводящиеся к ним. Таких задач в клинописных текстах подавляющее большинство.

Квадратные уравнения

Прежде всего заметим, что вавилоняне не знали ни отрицательных чисел, ни тем более комплексных, и уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), не имеющие положительных корней, безусловно не рассматривались. Позднее ученые Средних веков, начиная с ал-Хорезми (первая треть IX в.), различали три канонические формы трехчленных квадратных уравнений, которые могут иметь положительные корни:

$$ax^2 + bx = c, \tag{1}$$

$$ax^2 = bx + c, \tag{2}$$

$$ax^2 + c = bx, \tag{3}$$

или

$$x^2 + px = q, \tag{1'}$$

$$x^2 = px + q, \tag{2'}$$

$$x^2 + q = px. \tag{3'}$$

В клинописных текстах квадратные уравнения принадлежат к формам (1) и (2), которые записывали в виде

$$ax^2 - bx = c \tag{2''}$$

или

$$x^2 - px = q. \tag{2'''}$$

Форма (3) или, что то же, (3′), в них не встречается, но имеются задачи, равносильные ей, а именно задачи, выражающиеся канонической системой

$$\left.\begin{aligned} x + y &= p, \\ xy &= q. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Формы (1) и (2″) умножением на число приводились к (1′) и (2‴).

Уравнения (1) и (2) всегда имеют один положительный корень (другой—отрицательный), и, с точки зрения древнего математика, это положение было самым естественным. Поскольку лишь форма (3) или (3′) может иметь два положительных корня, а она в текстах не обнаружена, преждевременно ставить вопрос, известно ли было вавилонянам, что в этом случае корень может иметь два различных значения. Некоторые историки науки полагают, что система (I) решалась путем приведения к форме (3′) и неизвестные x, y выступали как два корня (3′). Однако здесь для объяснения выдвигаются две гипотезы, между тем ход вычисления x, y в текстах, естественно, объясняется с помощью одного несложного тождества.

Рассмотрим для примера решение уравнения формы (2‴)

$$x^2 - x = 14{,}30.$$

В тексте сказано: «Я вычел из площади сторону моего квадрата, это 14,30». Далее идет вычисление: «Ты берешь 1, коэффициент [1]. Ты делишь пополам 1, это 0;30. Ты умножаешь 0;30 на 0;30, это 0;15. Ты складываешь [это] с 14,30 и это есть 14,30;15, что является квадратом для 29;30. Ты складываешь 0;30, которое ты умножал, с 29;30, получается 30,сторона квадрата» [2].

---

[1] Здесь просто «число», по-видимому, в отличие от «величины». Древние это различали, что отражено, например, в терминах для сложения и вычитания.

[2] *O. Neugebauer.* Mathematische Keilschrifttexte, Bd III. Berlin, 1937, S. 6.

Как видно, вычисление полностью соответствует нашей формуле

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = \sqrt{(0;30)^2 + 14,30} + 0;30.$$

Само правило решения квадратного уравнения (2), как и (1), было, по всей видимости, найдено дополнением левой части уравнения до полного квадрата. Значит, древневавилонский математик должен был знать правило

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Что касается канонической системы (1), то, по-видимому, ее с помощью тождества

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

приводили к линейной системе

$$\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}, \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} .$$

Именно, сначала образовывали

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

и затем находили

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x, \quad \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y.$$

Помимо канонической системы (1), решались задачи, выражающиеся другой канонической системой

$$\left.\begin{aligned} x - y &= p, \\ xy &= q, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

равносильной форме (2′). Здесь использовалось то же самое тождество для вычисления $(x + y)/2$.

Мы здесь следовали реконструкции решения систем (I) и (II), предложенной К. Фогелем и учитывающей некоторые особенности древних текстов. Как сказано, существуют и другие объяснения, сводящие дело к формулам (3′) и (2′) или же к двучленному квадратному уравнению. Например, система (I) могла бы быть решена с помощью подстановок

$$x = \frac{p}{2} + z,$$

$$y = \frac{p}{2} - z.$$

Это дает $(p/2)^2 - z^2 = xy = q$, откуда $z = \sqrt{(p/2)^2 - q}$, после чего сразу находятся x, y. Этот ход решения предполагал знакомство с тождеством $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Заметим, что в пользу этой гипотезы, не следующей непосредственно из текстов, но и не противоречащей им, говорит наличие такого метода у Диофанта (III в. н. э.), в творчестве которого гениально синтезированы греческие и восточные традиции.

Решение некоторых задач, т. е. их приведение к каноническому виду, требовало искусного владения алгебраическими преобразованиями. Мы встречаем здесь задачи вида

$$\left.\begin{aligned} xy+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}&=15,\\ x+y&=7,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=21;40,\\ xy&=10,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} xy+(x-y)(x+y)&=1,13,20,\\ x+y&=1,40\end{aligned}\right\}$$

и другие, более сложные. Иногда тексты отражают самые поиски решения. Так, в первой из только что приведенных задач после вычисления $(x+y)/2=3;30$ попытка определить «в лоб» полуразность $(x-y)/2$ не удается, и вычислитель разочарованно пишет: «Дальше не идет». Тогда, вычитая $(x+y)/2$ из левой части первого уравнения, он получает систему

$$xy-\frac{y}{6}=y\left(x-\frac{1}{6}\right)=11;30,$$

$$y+\left(x-\frac{1}{6}\right)=6;50,$$

и, принимая $x-\frac{1}{6}$ за новую неизвестную, приходит к системе вида (I), которую умеет решать.

Учение о квадратных уравнениях явилось основой существенно нового этапа в развитии математики, когда наряду с арифметикой и измерением фигур ее полноправной частью стала алгебра. Для решения квадратных уравнений потребовалось многое, и сами они вызвали к жизни цепь новых понятий. Действительно, нужно было уметь производить разнообразные тождественные преобразования, оперировать неизвестными величинами как известными — словом, закладывать основы алгебраического исчисления. Со всем этим было связано также выделение канонических классов задач, решаемых с помощью соответствующих алгоритмов, и разработка приемов сводится к этим классам других задач, по внешнему виду отличных. Вероятно, с развитием методов решения квадратных уравнений задачи, приводящие к линейным уравнениям и особенно к их системам, стали решать алгебраически в более широком объеме. В целом математическое мышление поднялось на новый, значительно более высокий уровень общности и отвлеченности и приобрело большую силу.

Но откуда появились трехчленные квадратные уравнения? Обыкновенные задачи практической геометрии не нуждались в их решении; при рассмотрении подобных фигур достаточно было пропорциональной зависимости, и разве только отыскание гипотенузы прямоугольного треугольника по катетам (если такая задача привлекла бы интерес писцов, знавших уже теорему Пифагора) приводит к извлечению квадратного корня. По всей вероятности, квадратные уравнения появились в результате развития самой науки, из обращения задач, поставленных практикой.

Схематически можно представить себе постановку простейших вопросов подобного рода следующим образом. Зная стороны прямоугольника

x, y, легко подсчитать его площадь xy и периметр $2x + 2y$. Но если спросить, каковы стороны прямоугольника данного периметра $2p$ и площади q, то возникает каноническая система (I). Точно так же отыскание катетов по площади прямоугольного треугольника и гипотенузе приводили к системе

$$xy = a,$$
$$x^2 + y^2 = b.$$

Такого рода задачи встречаются также в текстах эпохи Селевкидов; они могли возникнуть и ранее. Взаимно обратные задачи, одна из которых линейная, а две другие второй степени, причем все три с одними и теми же числовыми значениями, были обнаружены К. Фогелем и в древневавилонских текстах. Возникающие при таком обращении системы могли быть затем сведены к трехчленным квадратным уравнениям. Во всяком случае, при постановке и решении подобного рода проблем абстрагирующая математическая мысль одержала один из своих первых замечательных триумфов.

Вавилоняне решали также некоторые задачи, выражающиеся кубическими уравнениями. Ставился вопрос об определении ребер прямоугольного параллелепипеда по данной сумме объема и площади одной грани, т. е. $xyz + xy$, и некоторым условиям, наложенным на ребра. В зависимости от этих условий получаются уравнения первой, второй и третьей степеней, последнее, например, в случаях

$$\left.\begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ y &= 0;40\,x, \\ z &= 12\,x \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ x + y &= 0;50, \\ z &= 12\,x. \end{aligned}\right\}$$

В первом случае задача приводится к уравнению

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 4;12$$

и была решена, скорее всего, с помощью таблицы чисел $n^3 + n^2$, о которой упоминалось ранее ($x = 0;30$ и т. д.). Во-втором случае проводился подбор тех же самых значений неизвестных с помощью искусного разложения на множители.

В сузских текстах обнаружено даже уравнение восьмой степени, которое, впрочем, является квадратным относительно x^4 и приводится к виду

$$(x^4)^2 + 20{,}0^2\,(x^4) = 14{,}48{,}53{,}20^2.$$

Приближенное вычисление корней

В задачах на квадратные и высшие уравнения корни всегда являются рациональными. Однако в геометрических приложениях вавилоняне встретились и с проблемой извлечения квадратных корней из неквадратных чисел. Тексты ничего не сообщают о том, приблизились ли математики древнего Двуречья к идее иррационального числа. Они лишь содержат неоднократно встречающееся затем и у других народов правило

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(здесь a^2 — наибольший целый квадрат, меньший $N = a^2 + r$) с объяснением, основанным на том, что

$$\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 = a^2 + r + \left(\frac{r}{2a}\right)^2,$$

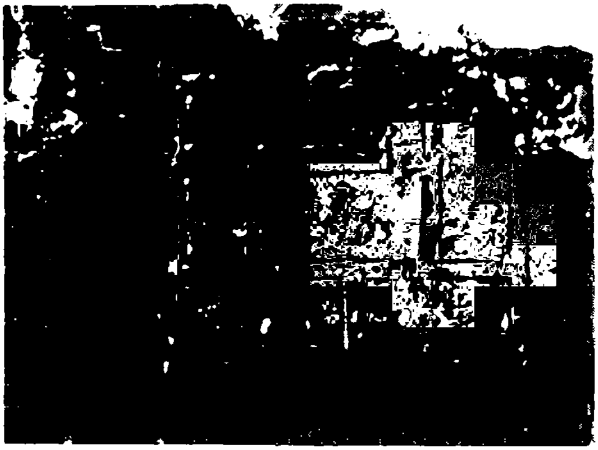
а $(r/2a)^2$ мало и им можно пренебречь, и некоторые приближенные значения, например $\sqrt{2} = 1;25$, $\sqrt{3} = 1;45$, $\sqrt{10} = 3;10$ и еще $\sqrt{2} = 1;24,51,10$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0;42,30$. Найдя некоторое приближение по указанному правилу или же непосредственно подбором, его умели улучшить, по-видимому, при помощи следующего итерационного приема. Если первое приближение с недостатком есть a, то $b = N/a$ будет приближением с избытком. Второе приближение образуется как среднеарифметическое $a_1 = (a + b)/2$ (заметим, что если $N = a^2 + r$, то $a_1 = a + \frac{r}{2a}$), и этому избыточному приближению соответствует недостаточное $b_1 = N/a_1$. Дальнейшие приближения следуют по тому же закону, т. е. $a_2 = (a_1 + b_1)/2$, $b_2 = N/a_2$ и т. д.

Приближение $\sqrt{2} = 1;25$ можно получить в качестве a_2, отправляясь от $a = 1$, $b = 2$ (или сразу от $a_1 = 1;30$, $b_1 = 1;20$), приближение же $\sqrt{2} = 1;24,51,10$ можно получить в качестве a_3; любопытно, что оно требует деления на «неправильное» число 17 $\left[\text{так как } a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right)\right]$. Это приближение a_3 имеет все знаки верные, т. е. дает пять верных десятичных знаков. На клинописной табличке, хранящейся в Йельском университете, изображен квадрат со стороной 30 и диагоналями; вдоль одной из них указано отношение диагонали к стороне, равное 1;24,51,10, а ниже — длина диагонали 42;25,36.

Геометрия у вавилонян

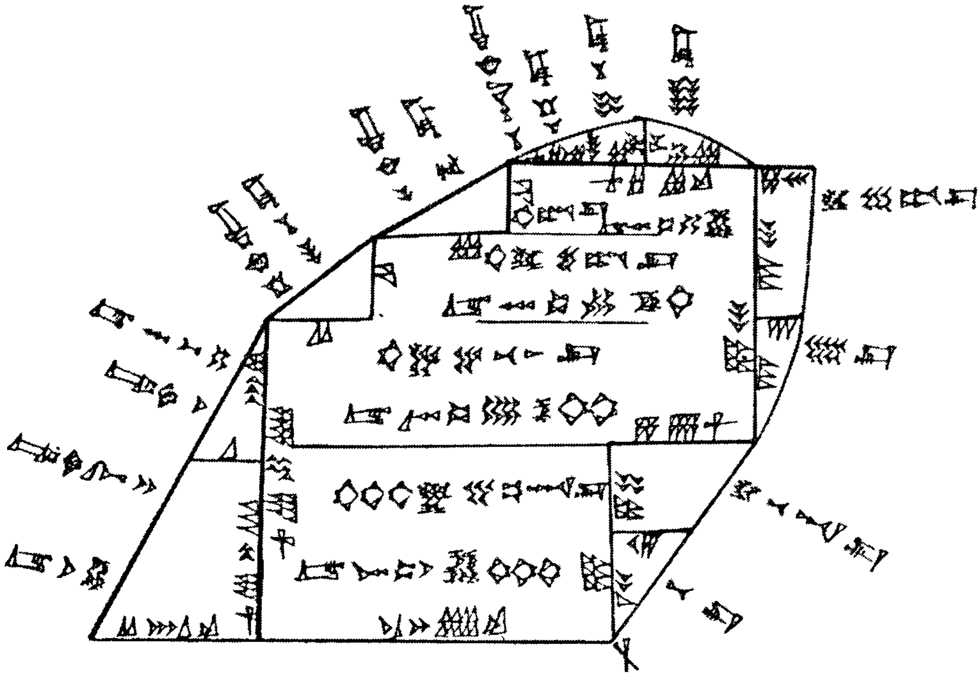
Геометрические знания вавилонян, как и египтян, относились большей частью к измерению простейших фигур, встречающихся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин и каналов и т. п. Сохранилось немало планов земельных угодий, разделенных на прямоугольники, трапеции и треугольники, а также планов различных строений, свидетельствующих, что вавилонский землемер или архитектор должен был хорошо чертить и проводить геометрические расчеты. Но, как и в алгебре, вавилоняне значительно дальше продвинулись в разработке более общих и отвлеченных отделов геометрии. Об этом мы судим опять-таки по их задачам, так как тексты не содержат ничего, кроме задач, их решения и, в виде редкого исключения, формулировки общих правил, теорем или определений. Область рассматриваемых плоских и телесных объектов в главном совпадала с египетской, но была расширена: изучению были подвергнуты некоторые правильные многоугольники, сегмент круга, усеченный конус.

Наряду с точными правилами вавилоняне употребляли и приближенные. К числу последних относятся, например, выражение площади четырехугольника общего вида произведением полусумм противолежащих сторон и вычисление объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями через произведение полусуммы оснований на высоту $\left(V = \frac{a^2 + b^2}{2} h\right)$;



Вавилонский план дома из Уммы (Берлин, Переднеазиатский музей)

Вавилонский план поля
(*B. Meissner*. Babylonien und Assyrien, Bd. II. Heidelberg, 1925, S. 390)



точно так же находили объем усеченного конуса. Впрочем, по всей вероятности, было известно и точное правило для усеченной пирамиды в той форме, в какой оно имеется у Герона Александрийского в I в. н. э.

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h.$$

Длину окружности вычисляли, утраивая диаметр; с таким же значением $\pi = 3$ определяли площадь круга. Однако эта площадь S выражается не непосредственно через диаметр, а через длину окружности C по правилу $S = C^2/12$. Если приближение $\pi = 3$, встречающееся также в библии, было довольно грубым, то вавилонское правило вычисления площади круга впервые связывало эту величину с длиной окружности. Быть может, этот замечательный результат нашли, рассматривая круг как правильный многоугольник ($S = Cd/4$, где $d = C/3$)? Позднее такое же правило употребляли в Китае и Индии. В одном тексте вавилонский вычислитель пользуется лучшим приближением: $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$.

Не останавливаясь на других правилах приближенного измерения площадей и объемов, мы рассмотрим теперь одно из лучших открытий, сделанных в Вавилоне: в клинописных текстах впервые появляется, и притом для общего случая, теорема Пифагора.

Теорема Пифагора

Открытие и доказательство этой теоремы греки связывали с именем только что названного философа VI в. до н. э., которую китайцы знали, быть может, несколькими столетиями ранее. В клинописных текстах она восходит еще к эпохе Хаммурапи.

Мы уже упоминали, что вавилоняне знали числовое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Нельзя не подчеркнуть фундаментальное значение этого предложения, лежащего в основании метрики евклидовой геометрии и в XIX в. оказавшегося прототипом метрик неевклидовых пространств.

Как пришли вавилоняне к теореме Пифагора, неизвестно. Быть может, они сначала заметили, что некоторые треугольники с целочисленными сторонами a, b, c, удовлетворяющими равенству $a^2 + b^2 = c^2$, прямоугольны, а потом распространили такое свойство на все прямоугольные треугольники? Во всяком случае, еще в древневавилонскую эпоху знали множество троек целых «пифагоровых чисел». До нас дошла одна таблица, содержащая 15 строк чисел вида $\frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{c^2}$, b и c. Если вычислить соответствующие значения катета a, то оказывается, что в таблице, помимо весьма простых по структуре троек, как 60, 45, 75, т. е. 4·15, 3·15, 5·15, имеются гораздо более сложные, например 72, 65, 97 или 3456, 3367, 4825 и т. д.,— мы записали их в десятичной системе. О происхождении этой таблицы высказаны две гипотезы. О. Нейгебауер и А. Сакс полагают, что вавилоняне составляли ее по правилу, которое затем встречается у Евклида

$$a = 2pq,\ b = p^2 - q^2,\ c = p^2 + q^2$$

(p, q — взаимно простые, $p > q$). Э. М. Брейнс считает, что принимали

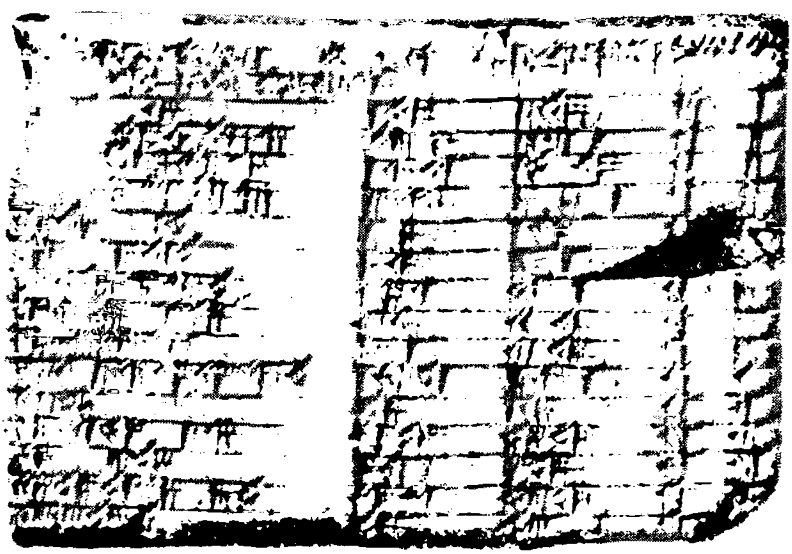
$$a = 1,\ b = \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right),\ c = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

и пользовались таблицей обратных значений, после чего приводили все к целым числам. Как бы то ни было, невероятно, чтобы таблица была составлена простым подбором без некоторого общего приема.

Впрочем, решение неопределенного уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых или рациональных числах относится уже к теории чисел, о которой еще будет идти речь далее (вопрос о назначении имеющихся в таблице чисел вида b^2/a^2 мы оставим в стороне). Вернемся к геометрическим задачам. Теорема Пифагора находила в Вавилоне разнообразные применения. С ее помощью, например, вычисляли диагональ квадрата и радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, по боковой стороне b и основанию $2a$. В последней задаче теорему приходилось применять дважды: сначала для нахождения высоты, опущенной на основание $h = \sqrt{b^2 - a^2}$ (в примере $h = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$), и затем для вычисления радиуса x из уравнения $(h - x)^2 + a^2 = x^2$ (в примере $x = 31;15$). Сохранился, хотя и не полностью, древневавилонский чертеж, на котором видны аккуратно проведенная циркулем дуга описанной окружности и числовое значение радиуса.

Выше говорилось о тексте эпохи Селевкидов, содержащем серию задач на квадратные уравнения, в которых основную роль играет эта теорема. Одна из таких задач, приводящаяся, впрочем, к уравнению первой степени,

Клинописная числовая таблица
(Нью-Йорк. Плимптоновский фонд Колумбийской библиотеки)



особенно любопытна. В ней требуется найти длину шеста (x), сначала вертикально прислоненного к стене, а затем смещенного так, что его верхний конец опускается на 3 локтя, причем нижний конец отступает от стены на 9 локтей. Уравнение $x^2 = 9^2 + (x - 3)^2$ дает $6x = 90$, $x = 15$. Позднее эта задача вновь появляется в математике древнего Китая и Индии.

Несколько иной вариант этой же задачи имеется в древневавилонских текстах: даны высота стены и равная длина шеста, а также отрезок, на который опускается его верхний конец; требуется найти, насколько отступит нижний конец от стены. Следует упомянуть еще одну задачу, в которой даны периметр $a + b + c = p$ и площадь треугольника $ab = q$ и для c приведено значение $\dfrac{\frac{1}{2}(p^2 - 2q)}{p}$. Она интересна тем, что, в отличие от других известных нам задач, где приводятся лишь сами выкладки, здесь высказано общее правило: «Умножь длину, ширину и диагональ на длину, ширину и диагональ. Умножь площадь на 2 и вычти это» и т. д. Можно полагать, что именно такие общие правила изучались в школах писцов.

Теорема Пифагора применялась и для вычисления стягивающей сегмент круга хорды (u) по стреле сегмента ($t = 2$) и длине окружности (60), т. е. по стреле и диаметру ($d = 20$). Выкладки можно представить формулой $u = \sqrt{d^2 - (d - 2t)^2} = 12$. Вряд ли этот результат мог быть получен без знакомства с предложением, что вписанный в полукруг треугольник — прямоугольный.

Наконец, теорема Пифагора несомненно была использована вавилонскими учеными, когда они рассматривали правильные многоугольники.

Правильные многоугольники

Более строгая теория правильных многоугольников явилась одним из выдающихся достижений пифагорейской школы.

Как уже говорилось, в некоторых клинописных текстах были обнаружены таблицы констант, которыми пользовались в хозяйственных расчетах. Эти таблицы содержат константы $1{,}40 = S_5$, $2{,}37{,}20 = S_6$, $3{,}41 = S_7$, причем они соотнесены с правильными пяти-, шести- и семиугольниками соответственно. Э. М. Брёйнс разъяснил значение этих чисел: они дают площади названных многоугольников, если сторона принята за единицу. Вычисление основано на приближенном равенстве $a_n \approx C/n$, где C — длина окружности, в которую вписан многоугольник со стороной a_n (рис. 5). Тогда

$$S_n = n\frac{a_n h_n}{2} = \frac{n}{2} a_n \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}.$$

Здесь d — диаметр круга, который считается равным $C/3$. Пусть $a_n = 1$, тогда $S = \frac{n}{12}\sqrt{n^2 - 9}$. При $n = 5, 6, 7$ получаются указанные значения S_5, S_6, S_7.

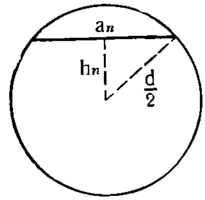
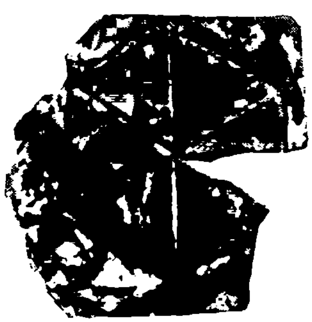


Рис. 5

Вавилонские чертежи равнобедренного треугольника и дуги описанного круга (*а*), шестиугольника (*б*), семиугольника (*в*) (*E. M. Bruins, M. Rutten.* Textes mathématiques de Suse. Paris, 1961, tables I, II, III)

а



б

в

Конечно, вавилоняне могли и не пользоваться общей формулой, а каждый раз в отдельности подсчитывать эти значения. Например, для пятиугольника будет следующий алгоритм:

$$C = 1 \cdot 5 = 5,$$

$$d = \frac{1}{3} \cdot 5 = 1;40,$$

$$\frac{d}{2} = 0;50,$$

$$h_5 = \sqrt{0;50^2 - 0;30^2} = 0;40,$$

$$\frac{1}{5} S_5 = \frac{1}{2} \cdot 0;40 \cdot 1 = 0;20,$$

$$S_5 = 0;20 \cdot 5 = 1;40.$$

Эти вычисления, как и решение квадратного уравнения, требовали извлечения квадратного корня. При вычислении площади семиугольника нужно было извлечь $\sqrt{10} = 3;10$, а для шестиугольника $\sqrt{3} = 1;45$.

Зная постоянные S_5, S_6, S_7, вавилоняне могли найти площади одноименных многоугольников при любом другом числовом значении стороны a_n; для этого требуется лишь умножить S_n на a_n^2. Дело в том, что им, по-видимому, были известны некоторые свойства подобных фигур, хотя ни понятие подобия, ни эти свойства в их текстах нигде не высказаны.

Подобие и пропорциональность

Некоторые задачи, которые мы бы решали, используя подобие треугольников, вавилоняне решали, видимо, по-иному. Такова, например, следующая задача (числовые данные в ней мы заменим буквенными). В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 6) даны катет $AC = h_1 + h_2$ и площадь S трапеции $ABED$, отсекаемая отрезком $DE = y$, перпендикулярным катету AC (т. е. параллельным другому катету $AB = x$). Для отыскания x и y сначала находят их полусумму и полуразность (с подобного рода приемом мы уже встречались). Действительно, легко видеть, что $(x + y)/2 = S/h_1$. Кроме того, согласно вычислениям, приведенным в тексте $(x - y)/2 = S/(2h_2 + h_1)$. Это равенство могло быть найдено из подобия треугольников с катетами h_2, y; $h_2 + h_1$, x и h_1, $x - y$. Но здесь не обязательно прибегать к подобию, и тот же результат нетрудно получить, если произвести сдвиг треугольника DEC в положение FBG. Это позволяет установить, что площади заштрихованных трапеций $ABED$ и $AFGC$ равны (ибо равновелики $FBEH$ и $DHGC$), и тогда

$$S = \text{пл. } AFGC = \frac{x - y}{2}(2h_2 + h_1).$$

Вполне возможно, что именно так поступал древневавилонский математик. Конечно, это предполагает, по существу, знакомство с некоторыми свойствами параллельных прямых ($\angle DEC = \angle ABC$) и случаем равен-

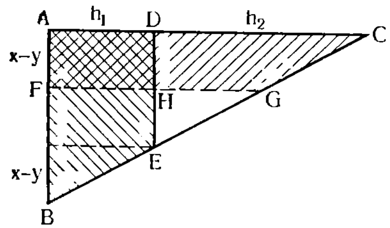


Рис. 6

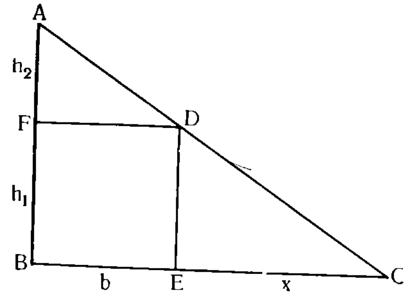


Рис. 7

ства прямоугольных треугольников (при равенстве двух катетов и прилежащих острых углов). Обо всем этом в тексте нет ни слова (как нет и термина для параллели, для проведения перпендикуляра он имеется). Однако мы вполне можем допустить наличие соответствующих наглядных представлений.

Но имеются и другие задачи, говорящие в пользу того, что вавилоняне уже пользовались подобием. В одной задаче даны стена высоты h_1 и толщины b, а также водруженный на ней шест длины h_2 (рис. 7). Спрашивается, на сколько (x) следует удалиться от стены, чтобы стала видна верхушка шеста. Ответ $x = \frac{h_1}{h_2} b$ проще всего следует из подобия прямоугольных треугольников AFD и DEC. Правда, его можно несколько сложнее получить, приравнивая площадь $ABC = \frac{(x+b)(h_1+h_2)}{2}$ сумме составляющих ее площадей $bh_1 + \frac{bh_2}{2} + \frac{xh_1}{2}$.

Многие другие задачи также говорят в пользу предположения, что подобием прямоугольных треугольников пользовались и в той или иной форме знали соотношения между соответственными линейными элементами и между площадями двух таких фигур: либо в виде пропорции $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ и $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$, либо в виде равенств произведений $a_1b_2 = a_2b_1$ и $S_1a_2^2 = S_2a_1^2$. К сожалению, имеющийся материал не позволяет выйти за пределы более или менее правдоподобных догадок. Несомненно лишь, что в древнем Вавилоне умели решать многие задачи, которые проще всего решать на основании подобия.

Нам остается сказать еще несколько слов о возникавших в области геометрии теоретико-числовых задачах.

Теоретико-числовые задачи

Об одной подобной задаче — решении уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах уже говорилось. Такими целыми числами являются тройки «пифагоровых чисел». Другие проблемы теории чисел связаны с задачей деления прямоугольных треугольников и трапеций на равновеликие полосы с помощью прямых, параллельных основанию. При этом, естественно,

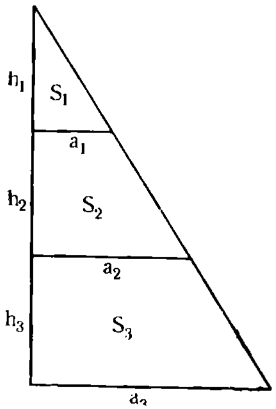


Рис. 8

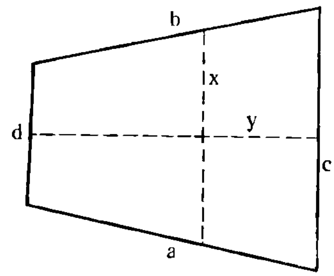


Рис. 9

предполагалось, что сторона фигуры, перпендикулярная основанию, делится на рациональные отрезки, а это значит, что рациональными должны быть и параллельные основанию отрезки.

Пусть прямоугольный треугольник (рис. 8) рассечен линиями a_1, a_2, параллельными основанию a_3, на части с площадями S_1, S_2, S_3 так, чтобы какая-либо пара частей была равновеликой. Есть три возможности такого раздела.

1. $S_1 = S_2$. Но тогда $2a_1^2 = a_2^2$ [ибо S_1: $(S_1 + S_2) = a_1^2 : a_2^2$] и значения a_1 и a_2 не могут быть одновременно рациональными. С точки зрения вавилонянина, задача не имеет решения, он ее и не рассматривал.

Зато в двух других случаях были найдены красивые теоретико-числовые закономерности.

2. $S_1 = S_3$. Тогда в силу таких же соображений $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2$. Решениями будут уже известные нам тройки пифагоровых чисел, точнее — пропорциональные им отрезки.

3. Пусть, наконец, $S_2 = S_3$. Такого рода деления прямоугольной трапеции на две равновеликие полосы — излюбленная задача вавилонян. В этом случае $2a_2^2 = a_3^2 + a_1^2$. Вавилонские математики нашли, что решениями будут: $a_1 = l\,(m - n)$, $a_2 = lk$, $a_3 = l\,(m + n)$, где n, m, k — пифагоровы числа, l — рациональный коэффициент. Если $l = 1$, то получаются тройки $a_1 = m - n$, $a_2 = k$, $a_3 = m + n$, которые исследовавший их А. А. Вайман назвал «вавилонскими».

Вавилонские числа a_1, a_2, a_3 располагаются в непрерывную цепочку, т. е. начало следующей тройки совпадает с концом предыдущей

n	m	k	a_1	a_2	a_3	
3	4	5	1	5	7	
5	12	13	7	13	17	
7	24	25	17	25	31	
9	40	41	31	41	49	и т. д.

Вавилонские ученые пытались обобщить эту задачу и решить ее в случае разделения трапеции на p равновеликих параллельных полос.

Удивительная закономерность вавилонских чисел дала повод к рассмотрению неких «приближенных», условных трапеций, представляющих собой произвольный четырехугольник (почти трапеция) со сторонами, близкими к параллельным (рис. 9). Площадь такого четырехугольника вычислялась по формуле $S = \frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2}$. Интересно, что иногда в задачах берется $S = 1$. Эта условная трапеция делится линиями x и y на равновеликие полосы, так что c, x, d и a, y, b пропорциональны тройкам вавилонских чисел.

Значение математики древнего Вавилона

Насколько мы можем судить по известным до сих пор текстам, математика в древнем Вавилоне достигла более высокого уровня, чем в древнем Египте, хотя и она была далека еще от того идеала дедуктивной науки, который сформировался в Греции и классическим образцом которого стали «Начала» Евклида. Несмотря на гораздо больший объем фактических знаний, более совершенные приемы вычислений, возникновение целых новых направлений и очевидный рост элементов логической дедукции, в древневавилонской математике внутренние логические связи между многочисленными правилами были еще слабыми и отдельные цепочки выводов не объединялись в целостные системы. Догматический характер изложения не был просто педагогическим приемом, он отражал, как и в Египте, авторитарный склад мышления, господствовавший в строго иерархических и деспотических государствах древнего Востока. Математическому мышлению не было свойственно стремление к углубленному анализу применяемых идей, требующему прежде всего их четкого выделения, а ученым не требовалось убеждать ни других, ни самих себя в истинности правил и методов с помощью доводов разума. Мышление было обращено вовне, ему недоставало обращения на самого себя. Вероятно, поэтому древние математики Двуречья, блестяще решавшие задачу приближенного вычисления чисел, обратных неправильным, или значений встречавшихся им в геометрии квадратных корней из неквадратных чисел, прошли мимо открытия периодических шестидесятиричных дробей и иррациональных чисел.

При всем этом открытия, сделанные вавилонскими писцами, поражают своим размахом. Здесь впервые возникла система счисления, основанная на позиционном принципе и, позднее, на употреблении знака нуля (греки, в эпоху расцвета мало интересовавшиеся техникой вычислений, обходились гораздо менее совершенной нумерацией). Здесь впервые же была разработана алгебра линейных и квадратных уравнений и даже рассмотрены простейшие уравнения более высоких степеней. Если к этому добавить открытие теоремы Пифагора и начала учения о правильных многоугольниках в области геометрии и в самой тесной связи с задачами геометрии постановку и решение первых задач теории чисел, которые мы теперь относим к диофантову анализу, то значимость достижений математики древнего Вавилона не может вызывать сомнений.

Столь же несомненно, что вавилонская математика оказала существенное влияние на последующее развитие математики. Власть Вавилонской империи веками распространялась на обширнейшие земли Азии, и элементы сложившейся в ней культуры, естественно, включались в культуру народов, проживавших на этих землях,— народов, находившихся в торговых и политических связях с Вавилоном, и даже народов, подчинявших его себе. Мы не располагаем свидетельскими показаниями ученых о научных контактах тех отдаленных времен: авторы математических текстов не ссылались тогда на свои источники. Древние греки лишь в самых общих выражениях рассказывали о поездках своих первых ученых в Египет и Азию. Трудно думать, однако, что греческие колонисты в Малой Азии, где возникла ионийская школа натурфилософии, не были знакомы с научной традицией, складывавшейся здесь на протяжении долгих веков. Во всяком случае, древние греки начинали с исследований тех проблем, которые издавна занимали вавилонян,—со свойств прямоугольных треугольников и правильных многоугольников, теоремы Пифагора и пифагоровых чисел, задач на квадратные уравнения и прогрессии и т. д. Позднее, уже в эллинистическое время, контакт греческой и вавилонской науки принес особенно ценные плоды как в астрономии, так и в математике. Влияние вавилонской шестидесятиричной нумерации отразилось здесь на арифметике дробей и делении круга, которым пользуются до сих пор. История возникновения позиционной десятичной нумерации полна пробелов, но не исключено, что через эллинистическую культуру, а может быть и непосредственно, принцип поместного значения проник в Индию. С полной уверенностью можно говорить о плодотворном воздействии традиций, восходящих к вавилонской алгебре,— это ощущается у Герона, затем у великого Диофанта, а еще позднее у ал-Хорезми и других основателей алгебраической школы стран ислама.

В эпоху, когда египетское и вавилонское государства клонились к упадку, на исторической сцене появился новый народ — греки, которым предстояло вскоре поднять культуру на небывалую высоту во всех основных ее областях — формы политической жизни, изящных искусств, литературы, науки и философии. Как мы сказали, греки были обязаны многими начальными математическими знаниями ученым Востока. Но они вскоре далеко превзошли своих учителей и впервые начали развивать математику как точную науку в нашем современном смысле. Преобразование математики из совокупности отдельных расчетных правил и приемов построений в совокупность стройных дедуктивных систем предложений, в которой эти правила и приемы получают свое строгое обоснование, явилось делом древних греков.