ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ

Греческое чудо

От математики древнего Востока до нас дошли отдельные задачи с решениями и таблицы. В древней Греции мы наблюдаем уже совершенно новое явление — рождение науки, основанной на строгих доказательствах. Этот важнейший скачок в истории науки относится к тем же VI—V вв. до н. э., которые отмечены такими бессмертными творениями греческого гения, как создание демократического государства и появление трагедии и комедии. Каждого из них было бы достаточно, чтобы считать это время важнейшей вехой в истории человечества, а появление всех трех граничит с чудом.

Помимо материковой Греции, островов и малоазиатского побережья, греки с давних пор стали селиться и в других странах. Греческие колонии в Италии получили название «Великой Греции» (об этих колониях напоминает греческое название Неаполя).

В VI в. до н. э. в большинстве греческих государств происходят восстания, результатом которых явилась смена господства рабовладельческой аристократии правлением народа — демократией, конечно также рабовладельческой. «Они первые и единственные в то время,— говорил Лисий о греках,— изгнали бывших у них царей и установили у себя демократию, полагая, что свобода всех производит величайшее единодушие... Властвовать друг над другом путем насилия, думали они, свойственно диким зверям, а люди должны законом определить справедливое, словом убедить, делом повиноваться тому и другому; закон должен быть царем, слово — наставником» [1].

Конечно, с нашей точки зрения античная демократия была весьма ограниченна, а экономические основы античного общества — весьма несовершенны. В управлении государством могли принимать участие только свободные граждане, и притом только мужчины,— из общественной жизни исключались женщины, уроженцы других областей и тем более рабы. Но даже такая ограниченная демократия принесла на первых порах совершенно удивительные плоды.

В начале V в. до н. э. на молодые города-государства Греции обрушился страшный враг — персы.Первым завоеванием персов было ионийское побережье (VI в. до н. э.). После потери Ионии на первое место выдвигается Аттика в материковой Греции и ее столица Афины. Аттика и становится во главе сопротивления персам и сплачивает вокруг себя греческие государства. «Неисчислимые, необозримые слала Азия полчищ тучи против Эллады»,— писал Эсхил. Греки никогда не видели столь многочисленного войска. Объединившись, они выступили против персов и дважды одержали победы — в 490 г. при Марафоне и десять лет

[1] *Лисий.* Речи. Перевод С. И. Соболевского. М.—Л., 1933, стр. 47.

спустя при Саламине. Последняя битва и решила исход войны. И поэты и историки античности, обдумывая вопрос о том, почему маленькая Греция сумела дать отпор намного ее превосходящим по численности ордам захватчиков, единодушно приписывали свою победу возникшему у них новому демократическому строю. В трагедии Эсхила «Персы» мать персидского царя Дария Атосса спрашивает у хора: «Кто ж погонщик властный войска, самодержец кто у них?» — и с удивлением выслушивает ответ: «Не рабы они, владыка, не подвластны никому». В греко-персидских войнах свободные граждане Эллады одержали верх над бесправными рабами персидского царя.

Такую же величайшую победу они одержали и в науке.

После победы над персами Афины становятся политическим и культурным центром Греции. Происходит реконструкция города, который был почти полностью сожжен, строится Парфенон, все скульптуры которого создаются знаменитым Фидием и его учениками. Афины украшаются многочисленными храмами, заново отстраивается военный и торговый порт — Пирей.

Конец V — начало IV в. до н. э.— это золотой век Афин. Сюда стекаются замечательные люди со всех сторон античного мира: Анаксагор из Клазомен, Демокрит из Абдер, Гиппий из Элиды, Феодор из Кирены, врач Гиппократ из Косса, Аристотель из Стагиры. Их привлекает интенсивная интеллектуальная жизнь, кипящая в Афинах, где Сократ умел будить мысль своих слушателей и помогал ее рождению, где была создана знаменитая Академия Платона, а затем и не менее знаменитый Ликей Аристотеля — прообраз будущих университетов.

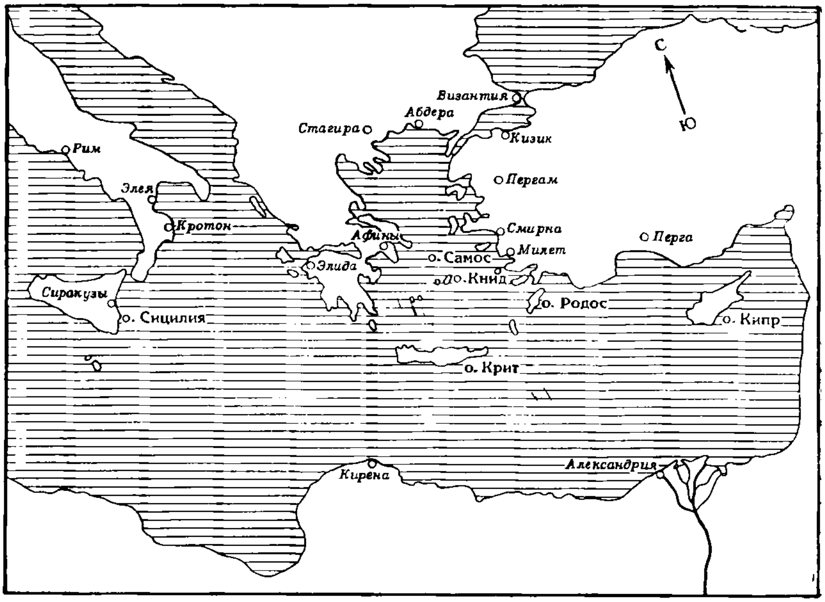
Однако уже в конце V в. разражается затяжная Пелопоннесская война, которая подрывает мощь Афин. В последней трети IV в. на политическую арену древнего мира выступает Македония. В 337 г. Филипп разбил объединенные силы греческих городов, а его сын Александр (356—323 гг. до н. э.), закрепив гегемонию Македонии в Греции, начал завоевание Востока.

После походов Александра Македонского во всех покоренных им странах получают широкое распространение греческий язык и греческая культура, которая сплавляется с культурой покоренных народов в так называемую эллинистическую культуру.

Греческая наука

Мы видели, что в странах древнего Востока были накоплены математические факты, методы решения задач, примеры приближенных вычислений. Однако математики как науки в нашем теперешнем понимании, т. е. развитой дедуктивной системы предложений, не было. Изложение в дошедших до нас сборниках задач было догматическим, без обоснования правильности предлагаемых правил. Напомним еще, что математика на древнем Востоке развивалась крайне медленно. На протяжении веков и даже тысячелетий не было заметно никакого прогресса.

Примерно на таком же (или более низком) уровне были и математические знания в Греции VIII—VII вв. до н. э. Но вот в VI в. положение резко меняется. Математика с поражающей быстротой преобразуется в абстрактную дедуктивную науку, в которой основным методом установления истины и исследования связи между предложениями становится



Древнее Средиземноморье

логическое доказательство. Как писал Аристотель, доказательство выявляет сущность вещей. При этом вторая функция доказательства (выяснение связей) не менее важна, чем первая, т. е. установление истины. Часто бывает, что в истинности некоторого предложения никто не сомневается (как это было около двух тысяч лет с постулатом о параллельных), но все-таки упорно ищут для него доказательства, чтобы установить, от каких предложений оно зависит, к какому классу свойств или отношений принадлежит. Иногда случается и так, что предложение уже доказано, но математики ищут новых доказательств, потому что старое кажется им искусственным или основанным на излишних посылках или еще потому, что они предугадывают связи рассматриваемого предложения с другими частями математики и хотят более точно выявить эти связи. Так было, например, с квадратичным законом взаимности — одной из центральных теорем теории чисел (см. т. III, гл. 3), для которой Гаусс нашел восемь различных доказательств (а теперь их известно уже около 40), с основной теоремой алгебры (см. т. III, гл. 2) и рядом других предложений.

Таким образом, доказательства служат в математике средством упорядочения предложений, исследования их взаимных зависимостей или, если угодно, средством организации системы и понижения ее энтропии. Слова Аристотеля показывают, что греки поняли эту сторону дедуктивного метода.

В VI в. до н. э. были построены не только первые математические теории, но и первые математические модели мира. В это время ученые пришли к мысли, к которой возвращались затем не раз, что математика является универсальным языком для выражения законов природы, что «все есть число».

В течение следующих трех веков создаются теории, тонкость и глубина которых были поняты и оценены только в XIX в., а иногда лишь в XX в. Приведем для примера теорию отношений Евдокса, которая по существу совпадает с обоснованием действительного числа, предложенным в конце прошлого века Дедекиндом. Формальная логика Аристотеля подверглась исчерпывающему анализу только в наши дни. При этом стиль математических произведений того времени не отличался от современного. Теория строилась исходя из конечного числа посылок, и ее положения выводились из них с помощью конечной цепочки логических умозаключений или эффективных конструкций. Такой метод изложения греки нашли впервые, показав, как можно и как нужно строить науку.

В настоящее время мы присутствуем при проникновении математических методов в химию, биологию, психологию, экономику и языкознание. Но даже теперь такое преобразование новых областей науки является весьма нелегким делом, не говоря уже о той инерции умов, которую всякий раз приходится преодолевать. Можно себе представить, как трудно было впервые проделать этот путь.

Как же это произошло? Почему стал возможен такой скачок?

По-видимому, он не мог быть вызван внутренними потребностями самой математики, находившейся еще на невысокой ступени развития. Он не мог быть вызван и потребностями техники, потому что техника античной Греции мало чем отличалась от той, которая была в древнем Вавилоне или Египте, а несколько позднее в Риме. В своей книге «История эмбриологии» Нидэм отмечает, что в древнем Египте уже со времен Среднего царства применялись инкубаторы, но не было эмбриологии, в Греции же, наоборот, не было инкубаторов, но была эмбриология.

С другой стороны, аналогичные изменения в то время произошли не только в математике. Догматы религии были поколеблены. Появились первые натурфилософские школы, которые создали модели мира, основываясь на наблюдениях и логических рассуждениях. Греческие мыслители пытались так же, как это делали математики, вывести строго логически всю систему мира из конечного числа положений, принимаемых без доказательства. А теории и возражения своих противников они старались опровергнуть, найдя в их рассуждениях логическое противоречие или показав, что следствие из выдвигаемых ими положений ложно (доказательство от противного!). Научная полемика очень характерна для этого времени. Столь же характерны и политические дебаты, и публичные выступления в судах. Причем и здесь, и там стороны стремятся обосновать свои положения с помощью безупречной аргументации и показать логическую шаткость утверждений противника. Проходит немного времени, и начинается исследование законов самой логики, что находит блестящее завершение в системе Аристотеля.

Естественно для такого общего явления искать и общие основания. Так делали и сами греки. Свои успехи они приписывали возникшему у них новому демократическому строю. Согласно Аристотелю, демократия есть такое государственное устройство, которое в наибольшей степени способствует проявлению всех возможностей, заложенных в каждом из сограждан [1].

[1] Бóльшая часть нашей современной терминологии, связанной с государственным устройством, как-то: аристократия, демократия, тирания, олигархия, демагогия, была создана греками и употреблялась в основном в том же смысле, что и теперь. Аристотель описал 157 различных демократических государственных устройств (конституций).

Аристотель придавал большое значение и досугу граждан. Дело в том, что наукой занимались тогда еще не профессионалы, специально оплачиваемые за это обществом, а, как мы бы сказали теперь, любители, располагавшие возможностью ту или иную часть своего времени уделять размышлениям, не связанным с повседневными заботами. Впрочем, уже тогда были платные учителя, а несколько позднее в Александрии возникла своего рода высшая школа наук, финансируемая государством. Появление досуга объясняется не высокой производительностью труда и применением машин, как это имеет место в нашем обществе, а применением труда рабов.

Греческие нумерации

Первоначально греки пользовались так называемой аттической нумерацией, которую называют также геродиановой по имени описавшего ее грамматика Геродиана (II в. н. э.). Аттическая нумерация была основана на аддитивном принципе и очень близка к римской нумерации. Основными знаками этой нумерации были I, Γ, Δ, Γ^{Δ}, H, Γ^{H} и X, означавшие соответственно 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000. Цифры аттической (геродиановой) нумерации и цифры римской нумерации изображены в восьмом и девятом столбцах таблицы (см. стр. 22). Знаки I и Γ, как и римские цифры I и V, были вначале обозначениями пальца и руки, впоследствии знак Γ стали воспринимать как первую букву слова πέντε — пять (эта буква в современном греческом алфавите имеет вид П, но первоначально она имела вид Γ, что ясно из вида происшедшей от нее латинской буквы P). Поэтому 10 стали обозначать буквой Δ — первой буквой слова δέκα (десять), 100 — буквой H — первой буквой слова ἡκατον (ἑκατον) (сто), а 1000 — буквой X — первой буквой слова χιλιάς (тысяча). Цифры Γ^{Δ} и Γ^{H} — соединения знаков Γ, Δ и H; образование этих цифр основано на мультипликативном принципе.

Аттическая нумерация была тесно связана со счетной доской — абаком. Абак разграфлялся на столбцы, соответствующие десятичным разрядам. Числа на абаке обозначались камешком. Аттическая нумерация представляла собой запись результатов вычисления на абаке, причем камешки в различных столбцах изображались знаками I, Δ, H, X, а пятерки камешков — знаками Γ, Γ^{Δ} и Γ^{H}. Вычисление с помощью камешков на абаке было заимствовано у греков римлянами: от латинского слова calculus (камешек) и происходит наш термин «калькуляция». Позже абак перестали разграфлять, а для обозначения пустого разряда, т. е. нуля, стали применять особый круглый камешек с отверстием посередине. Греки называли его ψῆφος (камешек), римляне — rotula (круглячок).

Аттическая нумерация была вытеснена у греков более компактной буквенной нумерацией, быть может, по примеру финикиян, алфавит которых, содержавший 22 знака для выражения согласных, положил начало почти всем известным буквенно-звуковым системам письма, в том числе еврейского, греческого, латинского, арабского и т. д. В финикийском алфавите, как и в происшедшем от него еврейском, 22 буквы. Из них первые девять букв обозначали единицы от 1 до 9, следующие девять букв — десятки от 10 до 90, остальные четыре буквы — сотни от 100 до 400. Финикияне обозначали сотни от 500 до 900 комбинациями последних четырех букв алфавита, числовые значения которых в сумме равны этим

	Греческое 1	Славянское: Кириллицей 2	Славянское: Глаголицей 3	Еврейское 4	Сирийское 5	Арабское 6	Грузинское 7	Армянское 8
1	$\bar{\alpha}$	а҃	Ⰰ	א	ܐ	ا	ა	Ա
2	$\bar{\beta}$	в҃	Ⰱ	ב	ܒ	ب	ბ	Բ
3	$\bar{\gamma}$	г҃	Ⰲ	ג	ܓ	ج	გ	Գ
4	$\bar{\delta}$	д҃	Ⰳ	ד	ܕ	د	დ	Դ
5	$\bar{\epsilon}$	є҃	Ⰴ	ה	ܗ	ه	ე	Ե
6	$\bar{ϛ}$	ѕ҃	Ⰵ	ו	ܘ	و	ვ	Զ
7	$\bar{\zeta}$	з҃	Ⰶ	ז	ܙ	ز	ზ	Է
8	$\bar{\eta}$	и҃	Ⰷ	ח	ܚ	ح	ჱ	Ը
9	$\bar{\theta}$	ѳ҃	Ⰸ	ט	ܛ	ط	თ	Թ
10	$\bar{\iota}$	і҃	Ⰹ	י	ܝ	ي	ი	Ժ
20	$\bar{\kappa}$	к҃	Ⰻ	כ	ܟ	ك	კ	Ի
30	$\bar{\lambda}$	л҃	Ⰼ	ל	ܠ	ل	ლ	Լ
40	$\bar{\mu}$	м҃	Ⰽ	מ	ܡ	م	მ	Խ
50	$\bar{\nu}$	н҃	Ⰾ	נ	ܢ	ن	ნ	Ծ
60	$\bar{\xi}$	ѯ҃	Ⰿ.М	ס	ܣ	س	ჲ	Կ
70	$\bar{o}$	о҃	Ⱀ	ע	ܥ	ع	ო	Հ
80	$\bar{\pi}$	п҃	Ⱁ	פ	ܦ	ف	პ	Ձ
90	$\bar{ϙ}$	Ч.Ч	Ⱂ	צ	ܨ	ص	ჟ	Ղ
100	$\bar{\rho}$	р҃	Ⱃ	ק	ܩ	ق	რ	Ճ
200	$\bar{\sigma}$	с҃	Ⱄ	ר	ܪ	ر	ს	Մ
300	$\bar{\tau}$	т҃	Ⱅ	ש	ܫ	ش	ტ	Յ
400	$\bar{\upsilon}$	ѵ҃	Ⱆ	ת	ܬ	ت	ჳ	Ն
500	$\bar{\phi}$	ф҃	Ⱇ.Ф	תק		ث	ფ	Շ
600	$\bar{\chi}$	х҃	Ⱈ	תר		خ	ქ	Ո
700	$\bar{\psi}$	ѱ҃	Ⱉ	תש		ذ	ღ	Չ
800	$\bar{\omega}$	ѡ҃	Ⱋ	תת		ض	ყ	Պ
900	$\bar{ϡ}$	ц҃	Ⱌ	ץ		ظ	შ	Ջ
1000	$͵\bar{\alpha}$	҂а	Ⱍ	א̈		غ	ჩ	Ռ
2000	$͵\bar{\beta}$	҂в				بغ	ც	Ս
3000	$͵\bar{\gamma}$	҂г				جغ	ძ	Վ
4000	$͵\bar{\delta}$	҂д				دغ	წ	Տ
5000	$͵\bar{\epsilon}$	҂є				هغ	ჭ	Ր
6000	$͵\bar{ϛ}$	҂ѕ				وغ	ხ	Ց
7000	$͵\bar{\zeta}$	҂з				زغ	ჴ	Ւ
8000	$͵\bar{\eta}$	҂и				حغ	ჯ	Փ
9000	$͵\bar{\theta}$	҂ѳ				طغ	ჰ	Ք
10000	$\overset{\alpha}{M}$	(а)				يغ	ჵ	Օ
20000	$\overset{\beta}{M}$	(в)				كغ		Ֆ

Алфавитное обозначение чисел

числам; евреи впоследствии для этих сотен использовали начертания пяти букв, применявшихся в конце слов.

Так как классический греческий алфавит содержит 24 буквы, греки использовали в буквенной нумерации три «архаические» буквы: вау, коппу и сампи, к VI в. до н. э. вышедшие из употребления. Для отличия букв, представляющих числа, над ними ставилась черточка. Попытки записать в алфавитной системе числа, большие 1000, привели к обозначениям, которые можно рассматривать как зачатки позиционной системы. Так, для обозначения 1000 применялась та же буква, что и для единицы, но снабженная черточкой слева внизу: $1 = \bar{\alpha}, 1000 = {}_{,}\bar{\alpha}$. Аналогично этому: $2000 = {}_{,}\bar{\beta}, \ldots, 9000 = {}_{,}\bar{\theta}$. Таким образом греки могли обозначать числа до 10^4-1, число 10^4 обозначалось знаком $\overset{\alpha}{M}$, $2 \cdot 10^4 = \overset{\beta}{M}$ и т. д. Однако окончательного перехода к позиционной системе счисления в Греции сделано не было. Впоследствии Архимед (см. стр. 128) дал способ наименования сколь угодно больших чисел, существенно дополнив тем самым ионийскую нумерацию.

В таблице (стр. 63) приведены алфавитные изображения чисел у греков, славян, евреев, сирийцев, арабов, грузин и армян.

Фалес

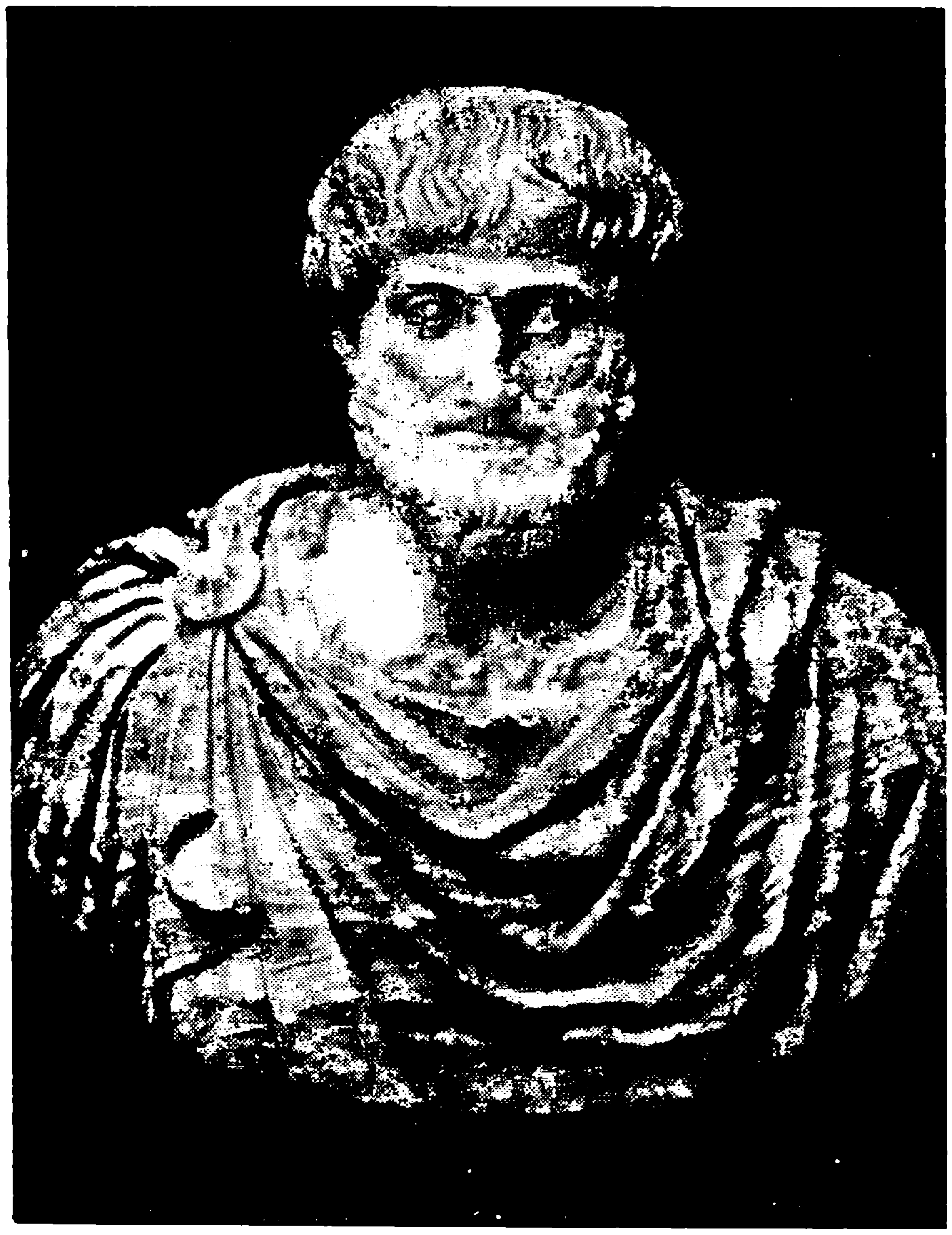
До нас дошли лишь отдельные фрагменты сочинений греческих ученых VI в. до н. э. О развитии науки в этот период можно судить по произведениям позднейших ученых, главным образом Платона и Аристотеля, и по «Началам» Евклида, в которых подведен итог основным математическим теориям трех предшествующих веков. Комментарии к «Началам» и некоторые небольшие отрывки из сочинений Гиппократа Хиосского и Архита Тарентского, переданные через третьи руки, позволяют воссоздать первые шаги нашей науки.

VI век до н. э. был временем знаменитых натурфилософских школ: ионийской и пифагорейской. Несколько позднее сложились не менее знаменитые учения Парменида, основателя элейской школы, Гераклита из Эфеса и Демокрита из Абдер, о которых мы еще будем далее говорить.

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии (первая половина VI в. до н. э.). Основателем ее был «отец греческой науки» Фалес — купец, политический деятель, философ, астроном и математик, живший в Милете — богатой греческой колонии в Малой Азии. К этой школе принадлежали также ученики Фалеса — Анаксимен и Анаксимандр.

Ионийцы, стоя на наивно материалистических позициях, пытались объяснить все многообразие мира, исходя из единого материального начала. Сам Фалес первоосновой всего сущего считал воду.

Неотъемлемой частью натурфилософии ионийцев были астрономия и математика. В этой школе впервые была высказана гипотеза, что Земля имеет форму цилиндра и висит посередине Вселенной (Анаксимандр). Фалес много путешествовал и был, по-видимому, знаком с астрономическими наблюдениями вавилонян. По сообщениям Геродота и Ксенофана, он предсказал солнечное затмение, которое и произошло во время битвы



Аристотель
(Рим. Национальный музей у Терм)

при Галисе между лидийцами и мидянами. Оба войска были настолько напуганы затмением, что поспешили заключить мир. Как теперь полагают, речь шла о солнечном затмении 585 г. до н. э. Анаксимандру приписывают составление первой географической карты и введение солнечных часов (гномона).

По сообщению Прокла (V в. н. э.; см. стр. 185), который сам опирался на не дошедшую до нас историю геометрии ученика Аристотеля Евдема Родосского (ок. 320 г. до н. э.), ионийцы первые среди эллинов занялись геометрией, причем Фалес 1) доказал, что диаметр делит круг пополам; 2) нашел предложение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; 3) открыл, что при пересечении двух прямых получаются равные углы; 4) доказал теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла. Последнюю теорему Евдем приписывает Фалесу на том основании, что она необходима для обоснования предложенного Фалесом способа определения расстояний до кораблей на море. По-видимому, способ заключался в следующем (рис. 10). Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B строился треугольник ABC с доступной точкой C, после чего прямые AC и BC продолжались по ту сторону точки C, и строился треугольник CDE такой, что $CD = AC$, $\angle ACB = \angle DCE$ и $\angle CDE = \angle CAB$. Тогда по теореме 4 $AB = DE$.

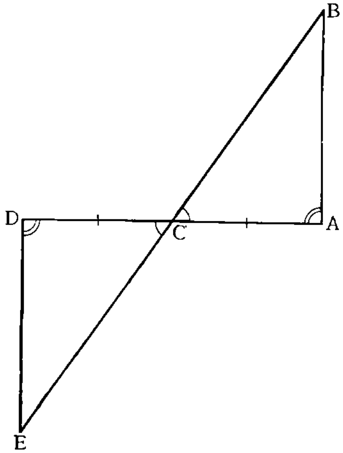


Рис. 10

К сожалению, мы ничего не знаем о доказательствах Фалеса. Видимо, он широко пользовался перегибанием и наложением фигур. Это подтверждается и словами Прокла: «Иногда он (Фалес. — *И. Б.*) рассматривал вопрос несколько общо, иногда более опираясь на наглядность» [1].

Школа Пифагора

Коренное преобразование математики по традиции единодушно приписывают Пифагору. Вот что пишет об этом Прокл: «Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений. Он открыл теорию иррациональных (или пропорций) и построение пяти космических тел»[2], (т. е. правильных многогранников). Итак, Пифагору принадлежит первое построение геометрии как дедуктивной науки. К сожалению, до нас не дошли не только отрывки из математических сочинений Пифагора, но даже их переложения другими авторами.

Вот то немногое, что мы знаем о самом Пифагоре, личность которого уже в древности стала полулегендарной. Он родился на богатом торговом острове Самос и около 530 г. до н. э. переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз, который преследовал не только научные, но и религиозно-этические и политические цели. Деятельность союза была окружена тайной, и все научные открытия, сделанные пифагорейцами, приписывались самому Пифагору. В начале V в. до н. э. после неудачного выступления на политической арене пифагорейцы были изгнаны из городов Южной Италии и союз прекратил свое существование.

Однако и после этого в Сибарисе, Кротоне, Таренте и других городах Великой Греции встречались замечательные ученые, которые называли себя пифагорейцами, и среди них такие, как Архит из Тарента и Феодор из Кирены.

Что касается творчества ранних пифагорейцев (до разгрома союза), то в настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором

---

[1] *Proclus Diadochus.* In primum Euclidis Elementorum librum commentarii, 1873, p. 65.
[2] Там же, p. 65—66.

от работ его учеников, поэтому мы будем просто говорить о математике пифагорейцев. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли и существовании множественности миров.

Мы не знаем, какие геометрические предложения пифагорейцы выбрали в качестве исходных и насколько велика была эта первая система аксиом. Содержание их геометрии сводилось в основном к планиметрии прямолинейных фигур (изучались свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, сравнивались их площади и т. д.). Венчало их систему доказательство знаменитой «теоремы Пифагора», которая до этого была известна только для частных случаев. Трудно переоценить значение этой теоремы, обобщение которой и до сих пор лежит в основе определения всех метрических пространств. Об этой части учения пифагорейцев можно судить по первой книге «Начал» Евклида, в которой как раз и излагается весь перечисленный материал. Сообщение, что пифагорейцы открыли построение правильных многогранников (как теперь установлено, они знали три правильных тела из пяти; икосаэдр и октаэдр были, по-видимому, открыты Теэтетом), позволяет заключить, что они значительно продвинулись и в стереометрии.

Мы могли бы сомневаться в столь стремительном развитии геометрии, если бы до нас не дошли отрывки из сочинения замечательного математика середины V в. до н. э. Гиппократа Хиосского о квадрируемых луночках. Труд Гиппократа написан в том же стиле, в котором писали позднее Евклид и Архимед. При этом все планиметрические свойства прямолинейных фигур предполагаются хорошо известными (например, теорема о стороне треугольника, лежащей против тупого угла, и т. п.), тогда как свойства круга и хорд подробно обосновываются. Поскольку никакой другой математической школы, кроме пифагорейской, до Гиппократа не существовало, то все положения, которые Гиппократ считает общеизвестными, естественно приписать пифагорейцам.

Первоначально пифагорейцы полагали, что все отрезки соизмеримы, т. е. что отношение любых двух отрезков (а значит, и площадей прямолинейных фигур) можно выразить отношением целых чисел; таким образом, метрическая геометрия сводилась, по их мнению, к арифметике рациональных чисел.

Занимаясь гармонией, пифагорейцы пришли к выводу, что и качественные отличия звуков обусловливаются чисто количественными различиями длин струн или флейт. Так, если длины струн относятся, как $1:2$; $3:2$ и $4:3$, т. е. разница в тонах будет октавой, квинтой или квартой, музыкальные интервалы благозвучны (консонантны), в других же случаях эти интервалы неблагозвучны (диссонантны). Таким образом, здесь дело сводилось к целым числам и их отношениям.

Это привело пифагорейцев к мысли, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел, что «элементы чисел являются элементами всех вещей и что весь мир в целом является гармонией и числом» [1]. Отсюда исключительный интерес пифагорейцев к основе основ — арифметике, с помощью которой можно выразить все отношения между вещами и построить модель мира.

---

[1] *Аристотель.* Метафизика. Перевод и примечания А. В. Кубицкого. М.—Л., 1934, стр. 26—27.

Пифагореец Архит писал: «Арифметика, по [моему] мнению, среди прочих наук весьма выделяется совершенством знания; да и геометрии [она совершеннее, так как] она яснее, чем геометрия, рассматривает любой [предмет]» [1].

Арифметика целых чисел

Число для пифагорейцев — это собрание единиц, т. е. только целое положительное число. Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических тел, получая ряды «треугольных», «квадратных», «пятиугольных» и других «фигурных» чисел. Каждый такой ряд представляет последовательные суммы арифметической прогрессии с разностями 1, 2, 3 и т. д.

На рис. 11 изображены «треугольные» числа 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ (общее выражение этих чисел $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$).

На рис. 12 показаны «квадратные» числа 1, $1+3=4$, $1+3+5=9$ (общее выражение этих чисел $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$; наше выражение «квадрат» для числа n^2 является пережитком пифагорейской терминологии).

На рис. 13 изображены «пятиугольные» числа 1, $1+4=5$, $1+4+7=12$ (общее выражение этих чисел $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$).

Пифагорейцы определили также «кубические» числа 1, 8, 27,...(откуда наше выражение «куб» для n^3); «пирамидальные» числа — суммы треугольных чисел

$$1,\ 1+3=4,\ 1+3+6=10, \ldots, 1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

Изучая свойства чисел, пифагорейцы первые обратили внимание на законы их делимости. Они разбили все числа на четные и нечетные и, что очень важно, на простые и составные. Пифагорейцы называли составные числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, «плоскими числами» и изображали их в виде прямоугольников, а составные числа, представимые в виде произведения трех сомножителей,— «телесными числами» и изображали их в виде параллелепипедов. Простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, они называли «линейными числами». Пифагорейцы создали так называемое учение о четных и нечетных числах, которое с современной точки зрения является теорией делимости на 2. Построенная ими теория была впоследствии воспроизведена Евклидом в 21—34-м предложениях IX книги «Начал» [2]. Она представляет одну из наиболее архаичных частей «Начал», причем помещена там уже после того, как в VII книге была построена общая теория делимости, содержащая как частный случай и теорию делимости на 2. Включение в «Начала» этого чужеродного тела, очевидно,— дань уважения к наиболее древней теоретико-числовой теории.

[1] *А. О. Маковельский.* Досократики, вып. III. Казань, 1915, стр. 57.
[2] Далее при ссылках на предложения «Начал» номер книги указывается римскими цифрами, а номер предложения — арабскими.

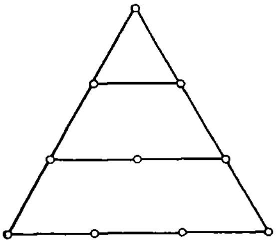


Рис. 11

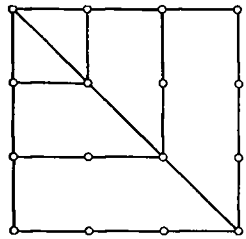


Рис. 12

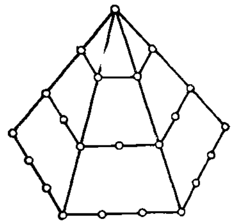


Рис. 13

Основной результат учения о четных и нечетных числах можно сформулировать так: произведение двух чисел делится на 2 (т. е. четно) тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на 2. Отсюда следует, что любое целое число N можно однозначно представить в виде $N = 2^k N_1$, где N_1 — нечетно. Удивительно, что предложение, которое и в наши дни большинству людей представляется очевидным, было так рано обосновано. Еще удивительнее, что была понята необходимость его обоснования.

Нам известно и несколько теоретико-числовых задач, которыми занимались пифагорейцы. Это, прежде всего, задача о нахождении совершенных чисел, т. е. таких, которые равны сумме своих делителей (исключая само число), как, например, $6=1+2+3$ или $28 = 1+2+4+7+14$.

После изложения учения о четных и нечетных числах в «Началах» доказывается (IX,36), что если $1+2+\ldots+2^n = p$ — простое число, то $2^n p$ будет числом совершенным. Доказательство этого предложения можно провести, опираясь только на учение о четных и нечетных. Вполне вероятно, что оно восходит к пифагорейцам. Эйлер в XVIII в. доказал, что никаких других четных совершенных чисел, кроме указанных в теореме Евклида, не существует. Однако вопрос о том, имеется ли конечное или бесконечное число совершенных чисел, до сих пор не решен, а также не найдено ни одного нечетного совершенного числа и не доказано, что таких чисел не существует.

Пифагорейцы исследовали неопределенное уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

целые решения которого поэтому называют «пифагоровыми тройками», и нашли бесконечно много таких троек, имеющих вид

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \; y = m, \; z = \frac{1}{2}(m^2 + 1).$$

Правила, которые мы записываем формулами

$$x = \zeta^2 - \eta^2, \quad y = 2\zeta\eta, \quad z = \zeta^2 + \eta^2$$

и которые охватывают всю совокупность решений этого уравнения, встречаются у Диофанта, но должны были быть известны задолго до него.

Ранние пифагорейцы связывали с целыми числами и различные мистические спекуляции. Так, особенно совершенным представилось им число 10 — декада, так как $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, но 1 есть единица (монада), матерь всех чисел, 2 выражает линию, 3 — треугольник, а 4 — пирамиду. Это древнее рассуждение замечательно тем, что числа 2, 3 и 4 связываются с размерностью геометрических образов. Две точки определяют прямую — это одномерный образ, три точки (не лежащие на одной прямой) — треугольник или плоскость — двумерный образ; наконец, 4 точки (не лежащие в одной плоскости) — пирамиду — трехмерный образ. Кроме того, среди чисел, меньших 10, столько же простых, сколько составных, и т. д. Исходя из замечательных свойств декады, пифагорейцы считали, что число небесных сфер должно быть равно 10, а так как их насчитывали только 9 (сферы неба, Солнца, Луны, Земли, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна), то была придумана новая планета — Противоземлие, которая вращалась по десятой сфере. Аналогичные мистические спекуляции с числами были распространены и среди ученых XV—XVI вв., и вообще они характерны для ранних стадий развития науки.

Арифметика дробей и первая теория отношений

Об учении пифагорейцев о рациональных числах нам известно еще меньше, чем об их теории целых чисел. Мы можем только с уверенностью утверждать, что такое учение существовало: на нем основывалась вся теория подобия, и им широко пользовался в своих работах Гиппократ Хиосский. Это раннее учение не могло совпадать с тем, которое изложено в VII—IX книгах «Начал» Евклида, потому что последнее опиралось на общие законы делимости целых чисел, особенно на теорему о том, что произведение двух целых делится на простое число тогда и только тогда, когда на него делится по крайней мере один из сомножителей. Но эта теорема была, вероятнее всего, установлена только Теэтетом, о чем мы будем говорить дальше. При этом VII книга принадлежит, по-видимому, самому Теэтету, а VIII, как показал ван дер Варден,— Архиту. Поскольку восстановить сейчас раннее учение о рациональных числах невозможно, мы изложим его, следуя Евклиду.

Важнейшим свойством рациональных чисел, в отличие от целых, является то, что в области рациональных чисел деление всегда возможно, т. е. уравнение $ax = b$, где a и b — рациональные и $a \neq 0$, всегда имеет решение. Области, в которых беспрепятственно выполнимы все четыре действия арифметики, называют теперь полями. Наши рациональные числа образуют поле. Посмотрим, какие числовые области рассматривались в древности.

Хотя в догреческой математике и была развита техника вычисления с дробями, однако никакого поля построено не было. Действительно, египтяне оперировали только с основными дробями вида $1/n$ (и $2/3$). Но очевидно, что сумма и частное таких дробей уже не являются основной дробью. Результат деления двух чисел представлялся, вообще говоря, не основной дробью, а суммой конечного числа таких дробей. В Вавилоне оперировали с шестидесятеричными дробями, поэтому может показаться, что здесь дело обстояло так же, как и у нас, когда мы применяли десятичные дроби. Однако вавилоняне оперировали только с конечными шестидесятеричными дробями, а в такой области деление не всегда выполнимо, например $1/7$ уже нельзя представить в таком виде. Таким образом, в системе вавилонян величина $1/7$ была столь же «невыразимой», как и $\sqrt{7}$.

Только в Греции начали оперировать с дробями вида m/n, причем умели производить с ними все действия арифметики с тем ограничением, что вычитать можно было лишь из большего меньшее. Сложение и вычитание производились путем приведения к общему знаменателю, дроби умели сокращать, умножать и делить.

Не позднее V в. до н. э. появились и первые теоретические исследования, посвященные этим новым объектам. Что следует понимать под m/n? Точнее, как определить в общем случае равенство или неравенство двух таких объектов и как ввести для них арифметические операции? В настоящее время способ построения таких новых объектов хорошо известен. Описание его имеется в любом полном курсе алгебры, но тогда ученые столкнулись с такой проблемой впервые. Тем более замечательно, что они нашли для ее решения именно те пути, которым мы следуем до сих пор.

Греки исходили из того, что единица E неделима, поэтому они говорили не о долях единицы $\frac{m}{n}E$, а об отношениях целых чисел $\frac{mE}{nE}=\frac{M}{N}$, т. е. в сущности имели в виду пары целых чисел. На этом и было основано применение теории отношений к теории музыки: всякому музыкальному интервалу, т. е. паре звуков, ставили в соответствие отношение высот этих звуков, т. е. пару (A, B) целых чисел, измеряющих эти высоты звуков. Согласно VII книге «Начал» две пары чисел (A, B) и (C, D) пропорциональны или имеют одинаковое отношение, если у A и B существует такой общий делитель F, а у C и D — делитель G, что

$$A = mF, \qquad C = mG,$$
$$B = nF, \qquad D = nG.$$

В частности, одно из чисел, m или n, могло равняться единице.

Разумеется, уже пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно, т. е. из пропорциональности пар (A, B) и (C, D) и пропорциональности пар (C, D) и (E, F) вытекает пропорциональность пар (A, B) и (E, F), и, следовательно, отношение пропорциональности является отношением типа равенства. Этим пользовались и Гиппократ Хиосский и Архит. Однако вряд ли это было обоснованно, даже в «Началах» соответствующее доказательство отсутствует. Это тем более странно, что для пропорциональности отношений величин транзитивность строго доказывается («Начала», предложение — V,11).

Итак, все пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одно и то же отношение:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = \dots$$

С нашей точки зрения, каждому такому классу можно поставить в соответствие новый объект — рациональное число. Древние выражали это иначе: они не вводили понятия класса, а выбирали из множества пар, имеющих одинаковое отношение, наименьшую пару A_0, B_0, относительно которой доказывали:

1) если $A : B = A_0 : B_0$, то $A = kA_0$, $B = kB_0$ (предложение VII,20);

2) если A_0, B_0 взаимно просты, то они составляют наименьшую пару из всех, имеющих с ней одинаковое отношение (предложение VII, 21);

3) если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они между собой взаимно просты (предложение VII,22).

Отсюда видно, что наименьшая пара полностью характеризовала класс, к которому принадлежала. Заметим еще, что понятие наименьшей пары в точности соответствует нашему понятию несократимой дроби.

Как видно, вся эта теория пар основывается на понятиях из общей теории делимости — общий делитель двух чисел, взаимная простота двух чисел и т. п. В основе всех этих понятий и большей части доказательств лежит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел, называемый в настоящее время алгоритмом Евклида.

В «Началах» над отношениями целых чисел производится только одна операция — составление отношений, которая соответствует умножению дробей. Отношение $A:C$ называется составленным из отношений $A:B$ и $B:C$, что мы будем далее записывать в виде $(A:B)\otimes(B:C)=(A:C)$. Это название объясняется, вероятно, тем, что при составлении музыкальных интервалов, т. е. при переходе от интервалов, представляющих собой пары звуков с высотами A, B и B, C, к интервалу, представляющему пару звуков с высотами A, C, происходит составление соответственных отношений. В предложении VII,14 «Начал» доказывается, что если $A:B=F:G$ и $B:C=G:H$, то $A:C=F:H$, т. е. результат составления зависит не от того, каких представителей мы выбираем в классах пар, к которым принадлежат $A:B$ и $B:C$, а только от самих этих классов. Таким образом, операция составления определена для классов пар, имеющих одинаковое отношение. (Это, пожалуй, первый известный нам пример фактор-закона композиции, перенесенного с элементов на классы.)

В VIII книге «Начал» показывается, как составить любые отношения $A:B$ и $C:D$. Для этого строятся такие наименьшие числа F, G, H, что $A:B=F:G$ и $C:D=G:H$, тогда

$$(A:B)\otimes(C:D)=(F:G)\otimes(F:H)=(F:H)$$

(предложение VIII, 4—5). Кроме того, операция составления отношений связывается с операцией умножения целых чисел, а именно в предложении VIII, 5 доказывается, что $(A_1A_2:B_1B_2)=(A_1:B_1)\otimes(A_2:B_2)$.

Заметим еще, что в «Началах» дается алгоритм нахождения общего наименьшего кратного (предложения VII,34 и VII, 36), что, очевидно, необходимо для операции, соответствующей сложению дробей, но сама эта операция в теоретических сочинениях греков не употребляется.

Мы видим, с какой удивительной строгостью, общностью и глубоким пониманием существа проблемы была построена древними первая теория пар и введен закон композиции для этих новых объектов.

Мы очертили основные контуры первоначальной математической системы пифагорейцев, которая одновременно была первой математической моделью мира. Однако в самой пифагорейской школе вскоре было сделано открытие, которое показало несостоятельность этой модели.

Несоизмеримость

Открытие несоизмеримых отрезков явилось поворотным пунктом в развитии математики. Оно разрушило раннюю систему пифагорейцев и привело к созданию новых, очень тонких и глубоких теорий. Значение этого

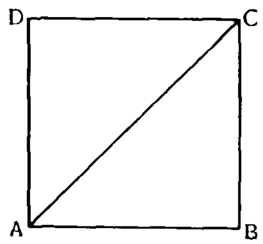


Рис. 14

открытия можно, пожалуй, сравнить только с открытием неевклидовой геометрии в XIX в. или теории относительности в начале XX в. Так же как и эти теории, проблема несоизмеримости получила громкую известность среди широких кругов образованных людей. Платон и Аристотель неоднократно обсуждали вопросы, связанные с несоизмеримостью. Это-то и помогает нам восстановить, как и когда было сделано это замечательное открытие.

В «Первой аналитике» Аристотель писал, что если допустить соизмеримость диагонали и стороны квадрата, то нечетное число было бы равно четному. Из этой фразы ясно, что доказательство проводилось методом от противного. Такое доказательство, опирающееся только на учение о четных и нечетных числах, имеется в некоторых списках в самом конце X книги «Начал» Евклида. Есть все основания предполагать, что это и есть древнее пифагорейское доказательство. Вот оно. Допустим, что диагональ квадрата AC и его сторона AB соизмеримы (рис. 14), т. е. их отношение равно отношению двух целых чисел:

$$AC : AB = m : n. \qquad (1)$$

Предполагается, что числа m и n не являются оба четными, иначе дробь можно было бы сократить на два. Из (1) следует, что

$$AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2.$$

Но по теореме Пифагора $AC^2 = 2AB^2$; следовательно, и

$$m^2 = 2n^2. \qquad (2)$$

Значит, m^2 — четно. Из учения о четных и нечетных числах следует, что в этом случае и m — четно (так как произведение двух нечетных чисел нечетно). Но тогда n — нечетно. Поскольку m — четно, то $m = 2t$. Подставляя в (2), получим

$$4t^2 = 2n^2,$$

или $n^2 = 2t^2$, т. е. n^2 — четно, следовательно и n должно быть четным, что приводит к противоречию.

Открытие несоизмеримости означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений любых двух отрезков, что с помощью одних только рациональных чисел нельзя строить метрическую геометрию.

Это поразило греков. В диалоге Платона «Законы» Афинянин говорит, что поздно узнал о несоизмеримости и что до этого он был подобен неразумному животному. Аристотель писал в «Метафизике»: «... все начинают с изумления, обстоит ли дело именно так, как „недоумевают", например, про загадочные самодвижущиеся игрушки, или „сходным образом" в отношении солнцеворотов, или несоизмеримости диагонали; ибо у всех, „кто еще не рассмотрел причину", вызывает удивление, если что-нибудь нельзя измерить самою малою мерою» [1].

Первые иррациональности

Вскоре обнаружилось, что диагональ и сторона квадрата не составляют исключения. Согласно диалогу Платона «Теэтет», пифагореец Феодор из Кирены доказал, что стороны квадратов с площадями 3, 5, 6, 7,..., 17 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. Нам неизвестно, как проводил доказательства Феодор, но ясно, что он рассматривал каждый случай отдельно.

Существует несколько гипотез (по крайней мере четыре) о том, как доказывал Феодор и почему он остановился на $\sqrt{17}$. Ж. Итар недавно показал, что все доказательства Феодора можно провести с помощью одного только учения о четных и нечетных числах и что первое число, для которого этот способ не проходит, и есть как раз 17. Поясним (в современных терминах) суть дела. Будем говорить, что два целых числа a, b сравнимы по целому модулю, а писать $a \equiv b \pmod m$, если разность $a - b$ делится на m нацело. Если найдется такое рациональное число $\frac{p}{q}$, что $\frac{p^2}{q^2} = N$, то возможно равенство $p^2 = Nq^2$; значит, тем более будет разрешимо сравнение $p^2 \equiv Nq^2$ по любому модулю. Если же это сравнение или равносильное ему сравнение $z^2 \equiv N$ не разрешимо по какому-нибудь модулю, то отсюда следует невозможность равенства $p^2 = Nq^2$. Метод древних, согласно Итару, был эквивалентен рассмотрению сравнений $z^2 \equiv N$ по модулям 2, 4 и 8 (легко показать, что если сравнение $z^2 \equiv N$ разрешимо по модулю 2^k при $k = 1, 2, 3$, то оно будет разрешимым и при любом k). Феодор мог без труда показать, что при $N = 3, 5, \ldots, 15$ сравнение $z^2 \equiv N$ не разрешимо по одному из модулей 2, 2^2 или 2^3. Однако при $N = 17$ этот метод оказывался недостаточным, так как сравнение $z^2 \equiv 17 \pmod{2^k}$ разрешимо при любом k и никакого заключения относительно возможности равенства $p^2 = 17\, q^2$ сделать нельзя.

Как бы то ни было, учение о четных и нечетных числах могло иметь гораздо более широкое применение, чем это казалось раньше.

Классификация иррациональностей Теэтета

Согласно Платону, первое общее учение об иррациональностях принадлежит юному ученику Феодора — Теэтету. Беседуя о нем с Сократом, Феодор говорит: «Из всех молодых людей, с которыми мне когда-либо приходилось встречаться (а их довольно много бывало у меня), я не знал ни одного такой удивительной одаренности. Легко воспринимает учение,

---

[1] *Аристотель.* Метафизика, стр. 22.

как редко кто другой, при этом необыкновенной мягкости характера и вместе с тем мужествен, как никто...» [1]. Далее, мы узнаем, что Теэтет сумел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где N—целое число, не являющееся полным квадратом. Ему принадлежит, по-видимому, следующая замечательная теорема: если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на основное предложение теории делимости: произведение двух целых чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на P. На основании этого предложения иррациональность $\sqrt{N}$, если N не является полным квадратом, доказывается точно так же, как и иррациональность $\sqrt{2}$. Если бы Феодор владел общей теорией делимости, он без труда смог бы провести доказательство для любого N и ему не нужно было бы перебирать одно число за другим вплоть до $N = 17$ и придумывать новый, отнюдь не более легкий способ доказательства.

Таким образом, можно почти точно датировать возникновение общей теории делимости. Она была уже создана в год смерти Сократа (399 г. до н. э.) и творцом ее, по-видимому, был Теэтет.

Охарактеризовав «отрезки, соизмеримые в степени» (т. е. в квадрате), Теэтет показал, что точно так же можно выделить класс отрезков, соизмеримых только в кубе с основной единицей ($\sqrt[3]{N}$). Метод Теэтета может быть распространен для доказательства иррациональности $\sqrt[k]{N}$, если N не является k-й степенью никакого целого числа.

Теэтет продолжил исследование несоизмеримых отрезков, образовав классы биномиалей $\sqrt{N} + \sqrt{M}$ или $N + \sqrt{M}$, апотом («вычетов») $\sqrt{N} - \sqrt{M}$, $N - \sqrt{M}$ или $\sqrt{N} - M$ и медиалей («средних») $\sqrt{\sqrt{M} \cdot \sqrt{N}}$.

Дальнейшая классификация иррациональностей и изложение результатов Теэтета содержится в X книге «Начал» Евклида.

Теория делимости

Общая теория делимости дошла до нас в изложении Евклида (книга VII и часть книги IX). В основе ее лежит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида). Если A и B — целые ($A > B$), то этот алгоритм состоит в представлении A в виде

$$A = nB + B_1,$$

где $0 \leqslant B_1 < B$, затем B в виде

$$B = n_1 B_1 + B_2,$$

где $0 \leqslant B_2 < B_1$, и т. д. Процесс не может быть бесконечным, так как существует лишь конечное число целых чисел, меньших B. Таким образом,

---

[1] *Платон.* Теэтет. Перевод В. Сережникова. М.—Л., 1936, стр. 12—13.

через конечное число шагов мы придем к такому остатку B_k, что $B_{k-1} = n_k B_k$; B_k и будет общим наибольшим делителем чисел A и B.

Заметим, что, так как

$$\frac{A}{B} = n + \frac{1}{\frac{B}{B_1}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\frac{B_1}{B_2}}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{B_2}{B_3}}}} = \ldots,$$

в ходе этих делений получаются последовательные неполные частные $n; n_1, n_2, \ldots, n_m$ разложения рационального числа $\frac{A}{B}$ в непрерывную дробь

$$\frac{A}{B} = n; n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \ldots + \frac{1}{n_m} + \ldots}}.$$

Это замечание нам пригодится в дальнейшем. Однако сами древние не выделили понятия непрерывной дроби, это произошло лишь в Новое время.

После введения этого алгоритма, можно уже вполне строго доказать основную теорему теории делимости.

Произведение двух чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда на P делится по крайней мере один из сомножителей. Это и есть предложение VII,30 «Начал». В предложении VII,32 доказывается, кроме того, что любое число или просто, или делится на какое-нибудь простое. Отсюда следует, что любое A представимо в виде

$$A = P_1 P_2 \ldots P_k,$$

где P_i — простые. Наконец, в предложении IX, 14 доказывается, что если все сомножители различны, то такое представление единственно. Случай $A = P_1^{\alpha_1} \ldots P_k^{\alpha_k}$, где не все α_i равны 1, в «Началах» не рассматривается, вероятно, потому, что без алгебраической символики разбор этого случая был бы весьма громоздким.

Закон однозначности разложения на простые множители является основой всей арифметики целых чисел.

В XIX в. при попытках построить арифметику целых чисел поля $K = Q(\theta)$, где Q — поле рациональных чисел, а θ — корень неприводимого над Q алгебраического уравнения с целыми коэффициентами и коэффициентом 1 при старшем члене, математики столкнулись с большими трудностями. Дело в том, что закон однозначности разложения на простые множители для этих чисел не выполнялся! Поясним сказанное на примере целых чисел поля $Q\ (\sqrt{-5})$, которые имеют вид $m + n\sqrt{-5}$, где m, n — целые рациональные. Легко видеть, что они образуют кольцо $Z[\sqrt{-5}]$, где Z — кольцо целых рациональных чисел. Число α этого кольца назовем простым, если его нельзя представить в виде произведения двух чисел $\beta\gamma$ того же кольца, отличных от единицы. Но при таком, казалось бы, естественном определении закон однозначности не выполняется. Действительно,

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

причем 2, 3, $1+\sqrt{-5}$ и $1-\sqrt{-5}$ являются в $Z[\sqrt{-5}]$ простыми в определенном выше смысле.

Это обстоятельство, не позволявшее построить в кольцах целых алгебраических чисел арифметику, аналогичную обычной, побудило Куммера, Золотарева, Дедекинда, Кронекера и других математиков по-новому определить само понятие простого числа. Они пришли к мысли, что основным, определяющим свойством простого числа является не то, что оно не разлагается в произведение двух множителей, а то, что доказали и древние греки: произведение двух чисел делится на простое число в том и только том случае, если на него делится хотя бы один из сомножителей. В частности, раз произведение $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ делится на 3, хотя ни один из сомножителей на 3 не делится, то 3 не может рассматриваться как простое число кольца $Z[\sqrt{-5}]$. Для восстановления закона однозначности в кольца алгебраических чисел были введены новые элементы: идеальные множители, по терминологии Куммера и Золотарева, или идеалы Дедекинда. Только после этого стало возможным строить арифметику таких колец. Тем более удивительно, что в античной Греции, в которой рассматривались только целые рациональные числа, теория делимости была построена с безупречной строгостью. Эта теория — одно из наиболее выдающихся достижений греческой математики.

Первый критерий несоизмеримости

По-видимому, к Теэтету восходит идея применить алгоритм Евклида (мы будем продолжать называть его этим именем) в качестве критерия для установления несоизмеримости двух отрезков. Если отрезки a и b соизмеримы, то можно показать, что, применяя к ним алгоритм Евклида, мы найдем в конечное число шагов их наибольшую общую меру. Значит, если алгоритм окажется бесконечным, то отрезки не могут иметь никакой общей меры. Этот критерий доказывается в предложении X, 2 «Начал».

Обычно некоторый отрезок выбирался в качестве единичного e и все остальные рассматривались по отношению к нему. Критерий эффективен, если он применяется к отрезку b, квадрат на котором соизмерим с единичным квадратом, т. е. в наших обозначениях b имеет вид $\sqrt{n}$. Действительно, в этом случае после применения конечного числа раз алгоритма Евклида мы приходим к двум таким отрезкам a' и b', что $b' : a' = b : e$, и последовательные остатки будут повторяться. Это соответствует тому, что непрерывная дробь, в которую раскладывается отношение $b : e$, периодична. Возможно, что данный критерий был известен еще до Теэтета и что Феодор как раз с его помощью доказывал несоизмеримость сторон квадратов с площадями 3, 5,..., 17 со стороной единичного квадрата. Как бы то ни было, Теэтет первый заметил в этом критерии нечто большее и, как мы увидим, попытался с его помощью обосновать общую теорию отношений.

Интересно отметить, что и впоследствии непрерывные дроби служили орудием для установления иррациональности некоторых чисел. Именно с их помощью Ламберт установил иррациональность e^x, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$ для рациональных x и, в частности, иррациональность чисел e и π (см. т. III, гл. 3).

Геометрическая алгебра

Открытие несоизмеримости явилось причиной того, что в греческой математике, и притом в самой пифагорейской школе, обратили внимание на соотношение между геометрией и арифметикой. Арифметика, как мы говорили, базировалась на понятии целого числа. Рациональные числа мыслились, как пары целых. После того как выяснилось, что отношение двух отрезков, вообще говоря, не может быть выражено с помощью отношения целых чисел, математическая система пифагорейцев была разрушена.

Естественно, что начались интенсивные поиски путей выхода из кризиса. Для этого априори представлялось несколько возможностей: 1) расширить понятие числа так, чтобы с помощью новых чисел можно было характеризовать отношение любых двух отрезков; 2) строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии, определив непосредственно для геометрических величин все операции алгебры; 3) отказаться от строго логического построения учения о несоизмеримых величинах и перейти к нестрогому оперированию с иррациональными (как это делалось впоследствии в Индии и в средневековой Европе).

Третий путь был неприемлем для греков — он означал отказ от основной идеи дедуктивного построения математики.

Первый путь на столь ранней стадии развития представлял громадные трудности. Даже те первые попытки, которые были сделаны в конце V и начале IV в., окончились неудачей. Практически он был закрыт для ранних пифагорейцев.

И они пошли по второму пути. Это была ошибка в стратегии, хотя на первых порах античная математика получила большие тактические преимущества. Построение алгебры на основе геометрии впервые позволило обосновывать общим образом некоторые теоремы и правила алгебры, однако при дальнейшем развитии геометрическое облачение, как панцирь, сковало живое тело античной математики. Оно мешало гармоничпому развитию отдельных частей математики, делало ее громоздкой и малоподвижной. Геометрическая броня античной математики походила на внешний скелет панцирных животных, который при дальнейшей эволюции был заменен внутренним скелетом.

Уже в самой пифагорейской школе началось построение алгебры на основе геометрии — так называемой геометрической алгебры. Вслед за тем геометрический язык стал применяться в теории чисел: изображение чисел точками, расположенными в виде правильных фигур, было оставлено, теперь все числа представлялись отрезками, полученными повторением конечное число раз отрезка, принятого за единицу. Наконец, на этой же основе получил развитие и «математический анализ» древних.

Основными объектами геометрической алгебры были отрезки и прямоугольники, а также параллелепипеды. Сложение отрезков осуществлялось путем приставления одного к другому, вычитание — путем выкидывания из большего отрезка части, равной меньшему. Операция вычитания была возможна лишь тогда, когда вычитаемое не превосходило уменьшаемого.

Произведением двух отрезков назывался построенный на них прямоугольник. Разумеется, не имело смысла говорить о сложении прямоугольников и отрезков. Поэтому исчисление, определенное в геометрической алгебре, было ступенчатым.

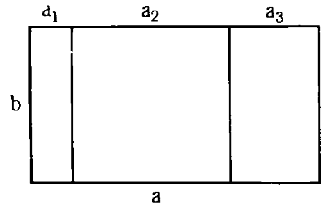


Рис. 15

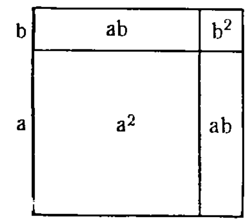


Рис. 16

Мы знаем геометрическую алгебру по ее изложению во II книге «Начал» Евклида и по произведениям Архимеда и Аполлония, которые пользовались ею так же, как мы теперь пользуемся буквенной алгеброй.

В первом же предложении II книги «Начал» доказывается, что прямоугольник, заключенный между двумя отрезками, будет равен сумме прямоугольников, заключенных между одним из этих отрезков и частями, на которые рассечен второй (рис. 15), т. е. если $a = a_1 + a_2 + a_3$, то

$$b(a_1 + a_2 + a_3) = ba_1 + ba_2 + ba_3.$$

С нашей точки зрения, это предложение устанавливает дистрибутивность умножения по отношению к сложению. Уже здесь видно преимущество геометрической алгебры. Доказательство происходит независимо от того, будут ли отрезки a, b или части a_1, a_2, a_3 соизмеримыми или несоизмеримыми, и независимо от конкретных величин этих отрезков. Геометрическая алгебра позволила, таким образом, впервые доказать, и притом совершенно общим образом, некоторые свойства алгебраических операций. Она позволила также установить важные тождества, как-то (предложение II,4) (рис. 16):

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Однако все эти тождества устанавливались только для величин двух измерений. Для представления произведения трех величин нужно было пользоваться пространственными фигурами, а произведение четырех и более отрезков уже не могло быть представлено аналогичным образом в рамках трехмерного пространства.

Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представлявшей собой геометрию циркуля и линейки. Поэтому она была максимально приспособлена для исследования тождеств, обе части которых являются квадратичными формами, и для решения квадратных уравнений. Этим и ограничивалось, по существу, поле ее приложений.

Задачи, эквивалентные квадратным уравнениям, легко формулируются геометрически. Древние рассматривали три типа таких задач.

1. Преобразовать заданный прямоугольник в квадрат (т. е. решить уравнение $x^2 = ab$).

2. Приложить к заданному отрезку a прямоугольник данной площади S так, чтобы «недостаток» был квадратом. Это значит, что нужно построить на отрезке AB прямоугольник AA_1C_1C, равный S, так, чтобы «недостаток» CBB_1C_1 был квадратом (рис. 17).

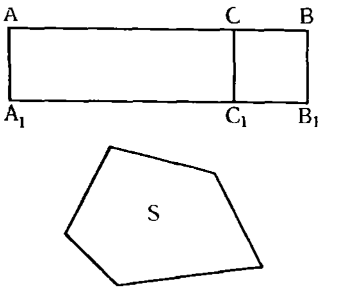


Рис. 17

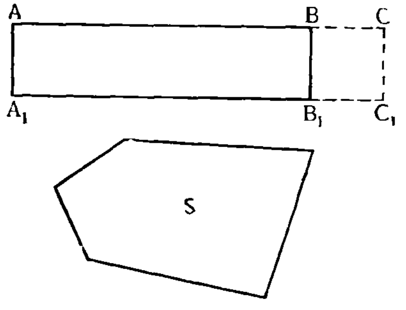


Рис. 18

Если обозначить CB через x, то мы снова придем к квадратному уравнению

$$x(a - x) = S.$$

В древности эта задача получила название эллиптической от слова ἔλλειψις — недостаток. В «Началах» отмечается, что задача возможна при $S \leqslant a^2/4$, поскольку $S \leqslant \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant a} x(a - x) = \frac{a^2}{4}$.

3. Третья задача двойственна второй: к данному отрезку a требовалось приложить прямоугольник с заданной площадью S так, чтобы «избыток» (ὑπερβολή) был квадратом (рис. 18). Нетрудно видеть, что задача эквивалентна уравнению

$$x(a + x) = S.$$

Напомним, что при построении геометрической алгебры учение об отношениях не предполагалось известным, т. е. первую из задач нельзя было решать путем вставки среднего пропорционального между отрезками a и b:

$$a : x = x : b.$$

Поэтому задачи 1—3 решались путем преобразования произведений ab, $x(a - x)$ и $x(a + x)$ в разность квадратов, для чего применялось тождество

$$ab = \frac{(a + b)^2}{2} - \frac{(a - b)^2}{2},$$

которое, разумеется, устанавливалось геометрически. После такого преобразования неизвестная величина находилась по теореме Пифагора. Для первого случая, например,

$$x^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2,$$

т. е. x есть катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $(a + b)/2$, а другой катет $(a - b)/2$. Аналогично решались и задачи 2, 3. Насколько хорошо греки овладели методами геометрической алгебры, видно из сочинений Архимеда и Аполлония, с которыми нам еще предстоит познакомиться.

Алгебра древних и геометрия циркуля и линейки

Мы видели, что задачи, эквивалентные квадратным уравнениям, в античной математике решались с помощью циркуля и линейки. Нетрудно показать, что и, наоборот, все задачи на построение с помощью циркуля и линейки алгебраически эквивалентны решению конечной цепочки квадратных уравнений. Действительно, все такие построения состоят из следующих элементов: 1) проведение прямой через две точки, 2) нахождение точки пересечения двух прямых, 3) прямой и окружности, 4) двух окружностей. Все эти точки пересечения можно найти решением либо линейного, либо квадратного уравнения.

Пусть исходные величины лежат в некотором поле K. Решение линейного уравнения не выведет нас из этого поля. При решении квадратного уравнения

$$x^2 + ax = b \tag{1}$$

мы получим, вообще говоря, величины, не принадлежащие исходному полю

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + b} = p \pm \sqrt{q}.$$

Наименьшим полем, содержащим корни уравнения (1), будет поле, состоящее из величин $a + b\sqrt{q}$, где a, b принадлежат полю K. Будем обозначать такое поле $K_1 = K(\sqrt{q})$ и называть его расширением поля, полученным присоединением к нему элемента $\sqrt{q}$.

При дальнейших построениях мы будем оперировать уже с элементами из K_1. Если нам снова придется решать квадратное уравнение

$$x^2 + a_1x = b_1, \tag{2}$$

где a_1, b_1 из K_1, то корни его

$$x_{1,2} = p_1 \pm \sqrt{q_1} = r + s\sqrt{q} \pm \sqrt{\bar{r} + \bar{s}\sqrt{q}}, \quad \text{где } r, s, \bar{r}, \bar{s}, q \in K$$

уже, вообще говоря, не лежат в K_1. Присоединяя $\sqrt{q_1}$ к K_1, получим новое минимальное поле $K_2 = K_1(\sqrt{q_1})$, в котором лежат корни (2), и т. д. Таким образом, каждому построению в геометрии Евклида будет отвечать конечная цепочка квадратных уравнений (линейные можно не учитывать):

$$\begin{array}{ll} x^2 + ax = b, & a, b \in K, \\ x^2 + a_1x = b_1, & a_1, b_1 \in K_1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ x^2 + a_nx = b_n, & a_n, b_n \in K_n, \end{array}$$

причем коэффициенты каждого последующего уравнения принадлежат полю, содержащему корни предыдущего. Мы предполагаем, кроме того, что корни всех уравнений действительны. Будем называть такую цепочку нормальной.

К нормальным цепочкам сводится построение ребер всех правильных многогранников, а также сторон правильных n-угольников при $n = 3$, $3 \cdot 2^k$, 4, $4 \cdot 2^k$, 5, $5 \cdot 2^k$, 15, рассмотренных в «Началах». Таким образом, между алгеброй квадратных уравнений и геометрией циркуля и линейки существует глубокая связь.

Можно ли любую задачу, сформулированную в терминах геометрии Евклида, решить с помощью циркуля и линейки, или, что то же, можно ли свести ее к нормальной цепочке квадратных уравнений? Скоро появились первые задачи, для которых это сделать не удавалось.

Первые неразрешимые задачи

В V в. до н. э. были поставлены три задачи, сразу же получившие большую известность. Это удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Все они имеют очень длинную историю: первые две были решены только в 30-х годах прошлого века, а третья — в конце его. Все три оказались неразрешимыми средствами классической геометрической алгебры, и их исследование потребовало создания новых методов. Первая из них формулируется так: построить куб, объем которого был бы вдвое больше объема заданного куба.

Если обозначить ребро заданного куба через a, а искомого — через x, то задача эквивалентна уравнению

$$x^3 = 2\ a^3.$$

Задача эта была настолько популярной, что о ней сложили легенду. Рассказывалось, что на острове Делос вспыхнула чума. Оракул, спрошенный о том, как избавиться от этого бедствия, ответил, что надо увеличить вдвое жертвенник, имевший форму куба. Поэтому задача об удвоении куба носит еще название делосской.

Естественно, что удвоение куба пытались осуществить с помощью построений циркулем и линейкой. В переводе на язык алгебры это означало, что $\sqrt[3]{2}$ пытались представить в виде конечной комбинации квадратных радикалов. Это не удавалось. Тогда началось тщательное исследование задачи. Гиппократ Хиосский обобщил ее и свел к вопросу об отыскании двух средних пропорциональных между заданными величинами. Пусть задан прямоугольный параллелепипед a^2b (всегда можно предполагать, что основание уже преобразовано в квадрат), требуется преобразовать его в куб

$$x^3 = a^2b.$$

Решение задачи, как показал Гиппократ, эквивалентно нахождению таких двух величин x и y, что

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

При $b = 2a$, x и равняется ребру удвоенного куба.

Вскоре Архит Тарентский показал, что величину x можно найти, рассмотрев пересечение трех поверхностей — конуса, цилиндра и поверхности, полученной вращением окружности вокруг касательной к ней (так как поверхность, полученную вращением окружности вокруг прямой, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, называют тором; тор имеет форму баранки, отверстие которой называют внутренним кругом тора,— данную поверхность можно назвать тором, внутренний круг которого имеет нулевой радиус). В существовании поверхностей, полученных вращением окружностей и скольжением прямых по окружности, древние не сомневались. Пересечение таких поверхностей и давало решение. Таким образом, решение Архита доказывало существование двух средних между любыми двумя величинами, однако оно не давало удобного способа их нахождения. Дальнейшие попытки ученых были направлены к нахождению других способов построения двух средних между двумя заданными величинами. Для этого обратились к тем геометрическим местам — кривым, которые получаются из пропорции Гиппократа:

$$ay = x^2 \text{ и } xy = ab \quad \text{или } y^2 = bx.$$

Построение координат x, y точки пересечения таких двух «мест» и давало решение задачи (в случае выбора «мест» $ay = x^2$ имеется в виду точка, отличная от начала координат). Однако исследование «мест» было делом отнюдь не легким. Прежде всего надо было установить, являются ли эти «места» непрерывными кривыми (тогда можно говорить о точке их пересечения). Только Менехму во второй половине IV в. до н. э. удалось представить эти «места» как плоские сечения конусов вращения. Менехм рассмотрел три рода конусов вращения: прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Проводя сечения плоскостью, перпендикулярной к образующей, он получил три рода кривых, которые мы теперь называем соответственно параболой, гиперболой и эллипсом. Эти названия кривым дал Аполлоний, о чем мы скажем ниже; до этого их называли сечениями прямоугольного, тупоугольного и остроугольного конуса. После такого стереометрического определения Менехм переходил к выводу планиметрических свойств полученных сечений и в дальнейшем оперировал только с этими планиметрическими свойствами, равносильными нашим уравнениям (например, $ay=x^2$ для параболы). Для чего же нужно было это стереометрическое определение? По-видимому, как и в решении Архита, оно служило для доказательства существования и непрерывности рассматриваемых геометрических мест.

Именно исследование задачи удвоения куба, которая сама по себе является весьма частной, привело, вероятно, к введению в математику новых чрезвычайно важных кривых — конических сечений. Возможно, что внимание к этим линиям привлекло и то обстоятельство, что конец тени шеста солнечных часов описывает на Земле в течение дня дугу конического сечения. Кривые были многосторонне изучены уже в древности и являлись основными геометрическими объектами наряду с прямыми и окружностями. Архимед изучал тела, полученные вращением конических сечений, и определял их объемы. Он же систематически применял конические сечения для решения задач, эквивалентных кубическим уравнениям. Однако широкое применение этих кривых к астрономии и механике относится только к XVI—XVII вв.

Ко времени деятельности Евклида и его школы (конец IV в. до н. э.) сложилось убеждение, что задача удвоения куба не разрешима циркулем и линейкой. Примерно в это же время (или несколько позже) была проведена первая классификация задач: к первому классу отнесены плоские задачи, т. е. те, которые могут быть решены с помощью циркуля и линейки; ко второму — телесные, решение которых можно осуществить с помощью конических сечений; наконец, к третьему — линейные, т. е. все остальные. Папп (III в. н. э.) считал немалой ошибкой, когда плоскую задачу решали с помощью конических сечений. Эта классификация свидетельствует об уверенности древних в неразрешимости (в общем случае) задач, эквивалентных кубическим уравнениям, с помощью циркуля и линейки.

Первая попытка доказать неразрешимость кубического уравнения в частном случае

$$x^3 + 2x^2 + 10\ x = 20$$

с помощью квадратных иррациональностей X книги «Начал» Евклида принадлежит Леонардо Пизанскому (см. стр. 267). Прошло еще около четырех веков, пока Декарт не сформулировал в общем виде, что корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами могут быть построены циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда это уравнение приводимо, т. е. имеет по крайней мере один рациональный корень. Он молчаливо предполагал, что все корни действительны. Декарт нашел аналогичный критерий и для уравнения четвертой степени, однако не обосновал этих утверждений. Первые строгие доказательства их были даны в 1837 г. П. Ванцелем.

Задача трисекции угла, в которой требуется разделить данный угол на три равные части, не была сведена древними к кубическому уравнению (с помощью тригонометрии задачу можно свести к решению уравнения $3x - 4x^3 = a$, где $a = \sin\alpha$, $x = \sin\frac{\alpha}{3}$, что удалось математикам стран ислама). В истории античной математики эта задача замечательна тем, что для ее решения были применены «вставки» и введена первая трансцендентная кривая — квадратриса.

Метод вставки заключался в том, чтобы поместить отрезок определенной длины между двумя данными линиями так, чтобы концы его находились на этих линиях, а сам он или его продолжение проходили через данную точку. Обычно рассматривались вставки между прямыми и окружностями. Однако если задача решена посредством вставки, то природа ее остается неясна. Действительно, если двигать отрезок заданной длины a так, чтобы конец его находился на заданной кривой, а продолжение проходило через данную точку A, то второй конец отрезка опишет некоторую кривую L. Осуществление вставки эквивалентно нахождению пересечения L со второй из заданных линий. Но какова природа кривой L? Она может быть и очень сложной. В случае, если первая кривая есть прямая, то в качестве L получим конхоиду. Одни вставки могут быть произведены с помощью конических сечений, другие относятся к линейным задачам. Поэтому Апполоний в не дошедшем до нас сочинении предпринял классификацию вставок, поэтому же древние старались по возможности их избегать.

В V в. до н. э. для трисекции угла Гиппий из Элиды ввел новую кривую, позднее названную Лейбницем квадратрисой, которая определялась механически. Пусть отрезки OA и AB (рис. 19) начинают двигаться одновременно, причем OA равномерно вращается по часовой стрелке вокруг точки O, а AB равномерно опускается вниз, оставаясь параллельным самому себе, так что оба они достигают положения OC одновременно. Геометрическое место точек M пересечения обоих отрезков и образует квад-

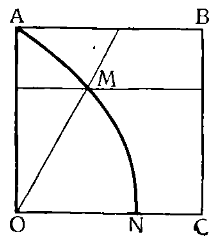


Рис. 19

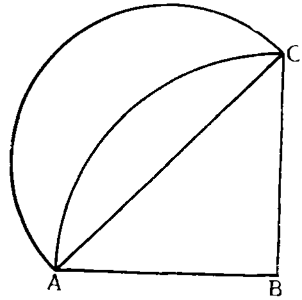


Рис. 20

ратрису. Из определения следует, что ординаты кривой пропорциональны соответствующим углам

$$y : y_1 = \varphi : \varphi_1.$$

Кривая, как нетрудно видеть, может быть применена для деления угла на любое число равных частей.

Название «квадратриса» объясняется тем, что с помощью этой же кривой можно решить и задачу о квадратуре круга, т. е. о построении квадрата, равновеликого данному кругу. Если удвоение куба и трисекция угла сводятся к кубическим уравнениям, то эта задача, равносильная построению отрезка, равного π, как было строго доказано только Ф. Линдеманом и Ш. Эрмитом в XIX в., не может быть сведена к алгебраическому уравнению (π не может быть корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, т. е., по современной терминологии, является трансцендентным числом). Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) пытался подойти к квадратуре круга, разыскивая квадрируемые луночки, т. е. фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, для которых можно построить равновеликие квадраты. Гиппократ нашел три вида таких луночек, в частности луночку, ограниченную четвертью окружности ABC и полуокружностью, построенной на хорде AC этой четверти окружности как на диаметре (рис. 20): если $AB = R$, то $AC = R\sqrt{2}$ и площадь четверти большого круга и половины малого круга равна $\pi R^2/4$, поэтому площадь луночки равна площади треугольника ABC. Такие квадрируемые луночки получили название гиппократовых луночек. Однако их открытие не приблизило Гиппократа к квадратуре круга; как выяснили в 30—40-х годах нашего века Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов, имеется пять видов квадрируемых луночек и ни одна из них не квадрируема вместе с кругом. Решение квадратуры круга с помощью квадратрисы, основанное на том, что в случае, когда на рис. 19 стороны квадрата $OABC$ равны R, отрезок ON равен $2R/\pi$, было предложено в IV в. до н. э. Диностратом.

К алгебраическим уравнениям сводится еще одна классическая геометрическая задача — о построении правильных многоугольников. Еще пифагорейцы умели с помощью циркуля и линейки вписать в круг равносторонний треугольник, квадрат и правильный пятиугольник, а также все те n-угольники, которые получаются из них удвоением числа сторон. В «Началах» Евклида строится еще правильный 15-угольник. Проблема состояла в выяснении того, при каких n соответствующий n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки. В частности, древних интересовал случай $n=7$. До нас дошло в арабском переводе построение Архимеда. Вставка, которую он для этого применил, может быть осуществлена с помощью конических сечений. Алгебраически эта задача, как показали математики стран ислама, эквивалентна решению кубического уравнения.

Однако выяснить вопрос, какие же правильные многоугольники можно построить, удалось только в конце XVIII в. молодому Гауссу (см. т. III, гл. 3).

Кубические уравнения

Более систематическое исследование задач, эквивалентных кубическим уравнениям, относится только к эпохе эллинизма. Архимед в сочинении «О шаре и цилиндре» (книга II, предложение 4) свел задачу о рассечении шара плоскостью на два сегмента, объемы которых имели бы заданное отношение $m:n\,(m>n)$, к нахождению высоты x большего сегмента из пропорции

$$4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n}\, a, \tag{1}$$

где a — радиус шара.

Архимед обобщает задачу: рассечь заданный отрезок a на две части x и $a—x$ так, чтобы

$$(a - x) : c = S : x^2, \tag{2}$$

где c и S — заданные отрезок и площадь.

Заметив, что при такой общей постановке задача не всегда разрешима (имеются в виду только положительные действительные решения), Архимед приступает к ее исследованию с тем, чтобы наложить ограничения на c и S. Он говорит, что изложит полное решение задачи «в конце», однако соответствующее место не сохранилось. Жившие на столетие позже Архимеда греческие геометры Диокл и Дионисодор уже не знали его. Они предложили собственные, гораздо более сложные решения, но никто из них не сумел провести анализ общего случая.

Только в VI в. н. э. комментатор Архимеда Евтокий нашел утраченное место. Архимед решает задачу с помощью двух конических сечений: параболы

$$y = \frac{x^2}{p} \tag{3}$$

и гиперболы

$$y = \frac{cb}{a - x} \tag{4}$$

(здесь положено $S = pb$). Оба уравнения легко получить из пропорции (2). Для выяснения необходимых условий Архимед переходит от пропорции (2) к кубическому уравнению

$$x^2(a - x) = Sc, \tag{5}$$

которое он выражает словесно как соотношение между объемами. Ясно, что уравнение (5) может иметь положительные корни, если

$$Sc \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant a} x^2 (a - x).$$

Итак, проблема сводится к нахождению экстремума x^2 $(a - x)$.

Оставим пока в стороне вопрос о методе экстремумов Архимеда, мы вернемся к этому, когда будем говорить об инфинитезимальных методах древних. Скажем только, что Архимед полностью исследовал условия существования положительных вещественных корней уравнения (5), а именно:

1) если $Sc < 4a^3/27$, то на участке $(0, a)$ имеются два таких корня;

2) если $Sc = 4a^3/27$, то имеется один корень (как сказали бы мы,— двукратный);

3) если $Sc > 4a^3/27$, то корня нет.

Здесь $4a^3/27$ есть максимум x^2 $(a - x)$, достигаемый при $x = 2a/3$.

В конце письма, предпосланного книге «О коноидах и сфероидах» (греки называли сфероидами эллипсоиды вращения, прямоугольными коноидами — параболоиды вращения, а тупоугольными коноидами — полости двуполостных гиперболоидов вращения), Архимед пишет, что с помощью доказанных в книге теорем можно решить ряд задач, как, например: от данного сфероида или коноида отсечь сегмент плоскостью, проведенной параллельно заданной, так, чтобы отсеченный сегмент был равен данному конусу, цилиндру или шару. Перечисленные задачи, так же как и задачи о делении шара, сводятся к кубическим уравнениям, причем в случае тупоугольного коноида уравнение будет иметь вид

$$x^2(a + x) = Sc.$$

Из текста Архимеда можно заключить, что он проанализировал и решил это уравнение. Таким образом, Архимед рассмотрел кубические уравнения вида $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b и дал метод их решения. Однако исследование кубических уравнений оставалось для греков трудной задачей, с которой, в ее общем виде никто, кроме Архимеда, не мог справиться. Решение отдельных задач, эквивалентных кубическим уравнениям, греческие математики получали с помощью нового геометрического аппарата конических сечений. Этот метод впоследствии восприняли математики стран ислама, которые сделали попытку провести полный анализ всех уравнений третьей степени.

Но еще до этого, и притом греческими математиками, был сделан новый решительный шаг в развитии алгебры: геометрическая оболочка была сброшена, и началось построение буквенной алгебры на основе арифметики. Это произошло в первые века нашей эры, о чем мы будем говорить позже.

Парадоксы бесконечного

Вместе с открытием несоизмеримых величин в математику вошло понятие бесконечности. Разумеется, и до этого математические теоремы относились к бесконечным множествам объектов: ко всем равнобедренным треугольникам, ко всем вертикальным углам и т. д. Но теперь дело шло уже об изучении свойств самих бесконечных множеств и об исследовании бесконечных последовательностей. К этим вопросам приводили две основные проблемы, стоявшие перед античной математикой,— проблема действительного числа и проблема меры.

До открытия несоизмеримости в основу определения отношения двух отрезков был положен алгоритм Евклида. С его помощью находили общую меру f этих отрезков, и если $a = mf$, $b = nf$, то $a : b = m : n$. Однако если отрезки a и b несоизмеримы, то алгоритм переставал быть конечным, и было неясно, можно ли с его помощью определить равенство или неравенство двух отношений.

Неясным становился и вопрос о строении отрезка и других непрерывных величин. Существовало учение, согласно которому непрерывные величины состоят из бесконечного множества неделимых частиц. Благодаря этому начали оперировать с актуально бесконечными множествами. Первоначально полагали, что они подчиняются тем же законам, что и конечные величины (например, что целое больше части), свободно применяли к ним закон исключенного третьего и т. п. Это вскоре привело к обнаружению первых парадоксов.

С бесконечными процессами ученые встретились и при определении площадей криволинейных фигур или объемов различных геометрических тел. Наиболее популярной из этих задач в то время была задача квадратуры круга. Вот какое решение этой проблемы, основанное на некритическом оперировании с актуальной бесконечностью, было предложено Антифоном в V в. до н. э. Впишем в круг многоугольник (например, треугольник или квадрат); для него, как и для каждой прямолинейной фигуры, можно построить с помощью циркуля и линейки равновеликий квадрат. Будем теперь вписывать в круг многоугольники, удваивая число их сторон. Для каждого такого многоугольника тоже можно построить равновеликий ему квадрат. Но круг есть многоугольник с бесконечным числом сторон, значит, и для него можно построить равновеликий квадрат. Таким образом, предложение, верное для любого многоугольника с конечным числом сторон, Антифон перенес на многоугольник с бесконечным числом сторон.

Уже в древности математики считали рассуждение Антифона некорректным. Аристотель в «Физике» приводит квадратуру Антифона в качестве примера такого заключения, которое исходит из ложных посылок, поэтому опровергать эту квадратуру — не дело геометров. Действительно, при квадратуре Антифона приходится либо предполагать, что круг является многоугольником с очень большим числом сторон, каждая из которых очень мала, либо считать, что число сторон у такого многоугольника бесконечно. Но тогда ниоткуда не следует, что свойство, справедливое для многоугольника с любым конечным числом сторон, останется справедливым и для многоугольника с бесконечным числом сторон. В обоих случаях рассуждение Антифона было неприемлемым.

Трудности, связанные с понятиями бесконечного и непрерывного, привели к глубокому кризису основ античной математики — первой большой буре, потрясшей еще неокрепшее здание науки. Ситуация, сложившаяся в V в. до н. э. в Греции, напоминает ту, которая имела место в современной математике в конце XIX — начале XX в. И здесь и там кризис основ был вызван проблемой действительного числа (новое название проблемы несоизмеримости) и меры и некритическим оперированием с бесконечными множествами. Как и в наше время, в Греции вопросы эти быстро вышли за пределы узкого круга математиков. Они занимали умы философов всех школ и направлений от элеатов до Анаксагора и от Демокрита до Аристотеля. Древнегреческие софисты, которых Платон называл мелкими торговцами истиной, сделали эти вопросы популярными. Они же, ловко жонглируя еще туманными понятиями бесконечного и непрерывного, пытались найти легкие решения по настоящему трудных и глубоких математических проблем.

Вскрыть действительные трудности, таящиеся в понятиях непрерывного и бесконечного, и тем самым показать, сколь еще не совершенны были представления о них, удалось Зенону Элейскому, жившему в V в. до н. э. Он придал своим рассуждениям острую и красочную форму парадоксов, которые уже более 25 веков не перестают привлекать внимание математиков и философов. Каждая эпоха предлагала свое решение этих парадоксов, или апорий (ἀπορία — трудность), интерес к ним не ослабел и в наши дни, о чем можно судить хотя бы по числу статей, которые посвящаются этому вопросу. Только один английский журнал «Analysis» с 1951 по 1953 г. опубликовал не менее семи статей об апориях Зенона.

Зенон был любимым учеником Парменида — главы школы элеатов, который первый начал строить философию на основе логических рассуждений. «Прежние же (до него мыслители.— *И. Б.*),— писал Симпликий опираясь на текст Евдема Родосского,— высказывали свое мнение без логических доказательств» [1]. Древние считали Парменида родоначальником логики. Платон, который называл его мыслителем «действительно необыкновенной глубины», оставил впечатляющий портрет Парменида в диалоге, названном его именем.

Парменид признавал «два естества»: «истинно сущее», которое постигается только разумом, и «мнимо существующее» или «существующее лишь во мнении», о котором мы составляем суждения на основании ощущений. Последние суждения носят вероятностный характер, в них не заключается «подлинной достоверности». «Истинно сущее» познается только с помощью логических рассуждений. Несколько модернизируя, можно сказать, что для элеатов существовать означало быть непротиворечивым. Именно Парменид впервые высказал логические законы тождества и исключенного третьего и применял их в своих доказательствах.

«Истинно сущее» элеатов — это то, что можно получить строгой дедукцией, и оно сильно отличается от видимого мира. В то время как «во мнении» существует множественность и движение, «истинно сущее» вечно, неподвижно, едино и неделимо. (Например, вечными и не зависящими от времени являются теоремы евклидовой геометрии, строго выведенные на основе постулатов.)

Хотя элеаты и пришли как будто к нелепости — отрицанию множественности вещей и движения, так что даже Аристотель, согласно Филону, порицал «приверженцев Парменида за их мнение, будто не следует обращать никакого внимания на фактическую действительность, но только на последовательность рассуждений» [2], но для развития дедуктивных наук необходимо было оторваться от непосредственно наглядного и попытаться мыслью постигнуть сущность вещей. Действительно, лишь путем отказа от непосредственных показаний органов чувств можно было прийти к гелиоцентрической системе в астрономии, а впоследствии и к неевклидовой геометрии.

---

[1] *А. О. Маковельский.* Досократики, вып. II. Казань, 1915, стр. 27.

[2] Там же, стр. 26. Следует обратить внимание, что Аристотель говорит здесь не о самом Пармениде, а о его последователях.

Элеаты систематически пользовались доказательствами путем приведения к абсурду: для обоснования предложения A они доказывали, что отрицание его $\bar{A}$ ложно. Так поступал и Зенон, прозванный за мастерское владение диалектикой «двуязыким». Чтобы логически обосновать утверждения элеатов, он предположил существование множественности и движения и показал, какие противоречия таятся в этих концепциях. В древности было известно более 40 его апорий. Из дошедших до нас апорий (их насчитывают девять) наиболее знамениты четыре апории движения и несколько отрывков из апорий множественности. Тексты этих последних менее ясны, чем четыре первых, которые формулирует и подробно обсуждает в своей «Физике» Аристотель Отрывки аргументов Зенона против множественности приводит комментатор Аристотеля Симпликий, отделенный от Зенона более чем десятью веками. Поэтому здесь весьма возможны искажения и неточности, хотя сам Симпликий и ссылается на недошедшие до нас сочинения Евдема Родосского — древнейшего известного нам историка математики (ср. стр. 65).

Одним из наиболее замечательных возражений против множественности является следующее: «Если сущее множественно, то оно одновременно должно быть большим и малым, и притом большим до безграничности и малым до исчезновения» [1].

Это рассуждение Зенона можно назвать «апорией меры» и перефразировать так. Пусть отрезок есть бесконечное множество «неделимых» частей; если величина отдельных «неделимых» равна нулю (т. е. «неделимые» — это точки), то и величина всего отрезка есть нуль; 2) если же каждое «неделимое» имеет некоторую величину (неявно предполагается, что эта величина для всех «неделимых» одинакова), то величина отрезка будет бесконечной.

Апория показывала, что нельзя определять меру отрезка, как сумму мер «неделимых», что понятие меры множества вовсе не является чем-то очевидно заключенным в самом понятии множества и что мера множества, вообще говоря, не равна сумме мер его элементов. Теперь мы определяем меру множества при помощи покрытий его системами интервалов, причем принимается, что интервалы уже имеют определенную длину (меру).

Рассмотрим апории движения.

«Дихотомия» (рассечение пополам). Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что оно должно сначала дойти до середины пути, затем до середины остатка и т. д. Пусть AB — отрезок длины 1 и точка M движется из A в B. Прежде чем дойти до B, она должна «отсчитать» бесконечное множество «середин» $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; значит, точка B никогда не будет достигнута.

Эта апория вовсе не разрешается тем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$. Г. Вейль, чтобы пояснить, в чем именно здесь состоит трудность, привел такой пример: представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию в $^1/_2$ минуты, вторую — в $^1/_4$ минуты, третью — в $^1/_8$ минуты и т. д. Такая машина могла бы к концу первой минуты «пересчитать» весь антуральный ряд чисел и решить, например, великую теорему Ферма или любую другую проблему теории чисел, связанную с вопросом существования. Ясно, что работа над конструкцией такой машины является без-

---

[1] *А. О. Маковельский.* Досократики, вып. II, стр. 85.

надежным делом. Так почему же тогда точка M достигает конца B, «отсчитав» счетное множество точек $A_1, A_2,...$?

Не касаясь пока более общего смысла этой апории, остановимся на ее математическом содержании. Один из математических вопросов, связанных с ней, состоит в следующем: допустимо ли пользоваться актуальной бесконечностью, допустимо ли, например, рассматривать весь натуральный ряд уже построенным и ввести некоторое новое, трансфинитное число, следующее за всеми натуральными? Теория множеств Г. Кантора (70-е годы XIX в.) отвечает на этот вопрос положительно. Кантор определяет порядковые трансфинитные числа. Если воспользоваться ими, можно сказать, что точка M достигает A_1 в момент t_1, A_2 — в момент $t_2,..., A_n$— в момент t_n, а точка B — в момент t_ω, где ω — первое число, следующее за всем натуральным рядом. Заметим, что Р. Бэр с помощью точно такой же конструкции ввел первый трансфинит ω, который и является порядковым типом множества натуральных чисел. Однако с введением теории множеств затруднения, связанные с актуальной бесконечностью, вовсе не были преодолены. Они приняли только другую форму и вновь выступили в виде парадоксов теории множеств. В одном из них, так называемом парадоксе Бурали-Форти, рассматривается порядковый тип множества всех порядковых типов. Приписывание ему порядкового номера приводит к противоречию. В настоящее время существует точка зрения, согласно которой свободное оперирование с актуально бесконечными множествами, даже счетными, неправомерно. Ниже мы подробнее будем говорить о том, как отвечали на тот же вопрос античные математики. Сейчас скажем только, что они отнюдь не встали на канторовскую точку зрения.

«Ахиллес и черепаха». Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепахи, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии впереди него. Действительно, пусть начальное расстояние есть a и пусть Ахиллес бежит в k раз быстрее черепахи. Когда Ахиллес пройдет расстояние a, черепаха отползет на a/k, когда Ахиллес пройдет это расстояние, черепаха отползет на a/k^2, и т. д., т. е. всякий раз между состязающимися будет оставаться отличное от нуля расстояние.

В этой апории, помимо того же затруднения отсчитанной бесконечности, имеется и еще одно. Предположим, что в некоторый момент времени t_ω Ахиллес догонит черепаху. Запишем путь Ахиллеса

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

и путь черепахи

$$S_ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

Каждому отрезку пути a/k^n, пройденному Ахиллесом, соответствует отрезок пути a/k^{n+1} черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти «столько же» отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, каждому отрезку a/k^n, пройденному черепахой, можно сопоставить равный ему по величине отрезок пути Ахиллеса. Но, кроме того, Ахиллес должен пробежать еще один отрезок длины a, т. е. он должен пройти на единицу больше отрезков, чем черепаха. Если количество отрезков, пройденное последней, есть α, то получаем

$$1 + \alpha = \alpha.$$

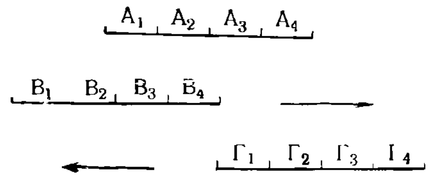


Рис. 21

Это последнее затруднение: «часть равна целому» — явилось впоследствии предметом размышления Галилея, Николая Кузанского и многих других, которые давали этому парадоксу различные интерпретации. Чешский ученый Б. Больцано в первой половине XIX в. установил, что любое бесконечное множество может быть приведено во взаимно однозначное соответствие со своей правильной частью. Теперь это свойство иногда принимается в качестве определения бесконечного множества.

«Стрела». Если время и пространство состоят из неделимых частиц, то летящая стрела неподвижна, так как в каждый неделимый момент времени она занимает равное себе положение, т. е. покоится, а отрезок времени и есть сумма таких неделимых моментов.

Эта апория направлена против представления о непрерывной величине как о сумме бесконечного числа неделимых частиц.

«Стадион». Пусть по стадиону движутся по параллельным прямым равные массы с равной скоростью, но в противоположных направлениях. Пусть ряд A_1, A_2, A_3, A_4 означает неподвижные массы, ряд B_1, B_2, B_3, B_4— массы, движущиеся вправо, а ряд $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$ — массы, движущиеся влево (рис. 21). Будем теперь рассматривать массы A_i, B_i, $Г_i$ как неделимые. В неделимый момент времени B_i и $Г_i$ проходят неделимую часть пространства. Действительно, если бы в неделимый момент времени некоторое тело проходило более одной неделимой части пространства, то неделимый момент времени был бы делим, если же меньше, то можно было бы разделить неделимую часть пространства. Рассмотрим теперь движение неделимых B_i и $Г_i$ друг относительно друга: за два неделимых момента времени B_4 пройдет две неделимые части A_i и одновременно отсчитает четыре неделимые части $Г_i$, т. е. неделимый момент времени окажется делимым.

Этой апории можно придать и несколько другую форму. За одно и то же время t точка B_4 проходит половину отрезка A_1A_4 и целый отрезок $Г_1Г_4$. Но каждому неделимому моменту времени отвечает неделимая часть пространства, проходимая за это время. Тогда в некотором отрезке a и отрезке $2a$ содержится «одинаковое» число точек, «одинаковое» в том смысле, что между точками обоих отрезков можно установить взаимно однозначное соответствие. Этим впервые было установлено такое соответствие между точками отрезков различной длины. Если считать, что мера отрезка получается как сумма мер неделимых, то вывод является парадоксальным.

Мы коснулись здесь только некоторых математических вопросов, связанных с парадоксами Зенона. Но сам Зенон придал своим апориям ярко выраженный физический смысл: он направил их против возможности движения. Разбирая «дихотомию», мы уже говорили о возможности или, вернее, о невозможности построения такого автомата, который мог бы в течение одной минуты совершить счетное множество операций. Но ведь движение тел происходит ежедневно на наших глазах, значит, такие автоматы как будто легко осуществимы. В чем же здесь дело? Вопрос уже стоит о соотношении математической модели и реального физического пространства.

В апориях Зенона предполагается, что пространство в малом устроено так же, как и в большом, факты из области движения величин определенного порядка переносятся на все величины. Между тем согласно современным физическим взглядам физические величины вовсе не являются делимыми до бесконечности. Современная физика открывает все новые и новые замечательные факты о строении микромира. Д. Гильберт и П. Бернайс в своей книге «Основания математики» (1934) писали, что решение парадокса «дихотомия» состоит «в указании на то обстоятельство, что мы вовсе не обязательно должны верить в то, что математическое пространственно-временно́е представление движения имеет физическое значение для произвольно малых интервалов пространства и времени; скорее, мы имеем все основания предполагать, что эта математическая модель экстраполирует факты из некоторой области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который пока доступен нашему наблюдению, экстраполирует просто в смысле образования идей, подобно тому как механика сплошной среды совершает экстраполяцию, предполагающую непрерывное заполнение пространства материей... Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность непосредственного узрения (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса» [1].

В. И. Ленин дал глубокий анализ апорий Зенона в своем «Конспекте лекций Гегеля по истории философии». Касаясь вопроса об отображении движения в логике понятий, он писал: «Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление,— и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия» [2].

Мы видим, что апории Зенона затронули действительно глубокие и сложные вопросы. Как же ответила на них античная наука? В частности, как она разрешила вопрос о том, допустимо ли пользоваться в математике актуально бесконечно большими и актуально бесконечно малыми величинами? Мы можем судить о тех точках зрения, которые имели место в античной математике, и о тех дискуссиях, которые там велись, по косвенным данным, главным образом по сообщениям Аристотеля и других философов этого времени.

Демокрит

До нас дошли только отголоски тех великих споров, которые в то время впервые потрясли науку. Накал страстей был не менее интенсивным, чем в аналогичной ситуации в начале нашего века, а о разнообразии идей, которые выдвигались для преодоления кризиса, мы можем составить, увы,

[1] *С. Клини.* Введение в метаматематику. Перевод А. С. Есенина-Вольпина. Под ред. В. А. Успенского. М., 1957, стр. 55.
[2] *В. И. Ленин.* Философские тетради, 1947, стр. 243.

далеко не полное представление. Так, известно, что логические трудности, возникшие в математике, привели Протагора (V в. до н. э.) к отрицанию всех вообще математических абстракций. По его мнению, нельзя говорить о линиях без ширины и точках, не имеющих никаких размеров, потому что никто никогда их не видел. Круг и прямая касаются не в точке, а всегда по некоторому конечному отрезку и т. д. Но отказ от сложившихся математических абстракций означал отказ от науки, что хорошо понимали греческие ученые. Выражая их общее убеждение, Аристотель писал, что наука есть знание не индивидуального, а общего. Поэтому путь Протагора оказался неприемлемым.

Один из способов построения математики был предложен великим философом-атомистом древности Демокритом (V—IV вв. до н. э.). Мы, однако, очень мало знаем о его методах и можем судить о них только на основании косвенных данных. По свидетельству Архимеда, Демокрит установил, что пирамида равновелика $^1/_3$ призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту, а конус — $^1/_3$ соответствующего цилиндра, но доказательств не дал.

Основываясь на некоторых фрагментах из сочинений Демокрита, можно думать, что он перенес в математику свою натурфилософскую концепцию и начал составлять тела из конечного числа элементарных частей — атомов, объемы которых известны. Объем всего тела получался суммированием объемов этих элементарных частей. Но, как теперь доказано, пирамиду нельзя составить из конечного числа призм, тем более это относится к конусу и цилиндру, поэтому для строгого обоснования результатов, о которых пишет Архимед, необходим предельный переход, которым Демокрит, разумеется, не пользовался. Поэтому-то Архимед и считал его результаты недоказанными.

Путь Демокрита — путь построения «конечной математики» — был совершенно непригоден для исследования непрерывных величин, не говоря уже об отображении и изучении движения. И все же в концепции Демокрита содержалась чрезвычайно плодотворная мысль, которая была впервые по-настоящему оценена и развита только Архимедом. Мы имеем в виду принцип, вообще говоря, приближенного, но сколь угодно точного составления любых тел из большого числа элементарных частей, размеры которых известны. В этом можно видеть зародышевую форму интеграционных методов.

Евдокс

Впервые ту точку зрения, которая стала общепринятой в греческой математике, высказал философ Анаксагор (V в. до н. э.). Его основной тезис гласил: «В малом не существует наименьшего, но всегда есть еще меньшее». Иначе говоря, не отрицая бесконечной делимости величин, Анаксагор считал, что неправомерно мыслить бесконечный процесс законченным. В результате деления отрезка всегда будут получаться отрезки, которые будут вновь делимы, и таким путем мы никогда не дойдем до неделимых частиц. Эта концепция и получила развитие в греческой математике.

Новые основы математики — общее учение об отношениях и строгие методы предельных переходов — были созданы Евдоксом Книдским. При этом актуальная бесконечность была отвергнута. Вот что писал современник Евдокса Аристотель, выражая, по-видимому, идеи, сложившиеся в школе Евдокса: «Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного... не отнимает у математиков их теории; ведь они не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, какой им желательно, и в такой же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить в какую угодно другую» [1].

Евдокс был не только гениальным математиком, острота ума которого и до сих пор вызывает глубокое восхищение, но и выдающимся астрономом, географом, врачом, философом и оратором. Евдокс родился в Книде, на юго-западе Малой Азии, около 406 г. до н. э. В молодости он побывал в Сицилии, где учился медицине, и в Великой Греции, где изучал математику под руководством крупнейшего ученого того времени — Архита. И если Феодор и Теэтет были представителями алгебраического направления в классической греческой математике, то Архит и Евдокс, а затем ученики последнего представляли то направление, которое мы сейчас называем «математическим анализом».

Евдоксу было около 23 лет, когда он приехал в Афины — культурный центр Греции того времени. Его, как и многих других молодых людей, привлекала знаменитая Академия Платона, на дверях которой была высечена надпись: «Пусть сюда не входит не обученный геометрии». Там широко обсуждались основные проблемы науки и философии. Сейчас трудно восстановить, какие отношения установились между Евдоксом и Платоном. Известно, что Евдокс занялся задачей, поставленной Платоном, и успешно решил ее. До этого астрономия носила описательный характер. Платон предложил астрономам сконструировать модель, в которой видимые движения Солнца, Луны и планет получались бы путем комбинации равномерных круговых движений. Модель Евдокса состояла из 27 концентрических сфер, в центре которых находилась Земля. Каждая из сфер (кроме внешней, предназначенной для неподвижных звезд) совершала равномерное круговое движение, причем сферы делились на группы (три сферы — для описания движения Солнца, три — для Луны, по четыре — для каждой из пяти планет), движения которых были связаны между собой. Скьяпарелли в конце прошлого века на основании описаний Аристотеля и Симпликия сумел восстановить эту чрезвычайно остроумную модель.

Конструкция Евдокса, свидетельствовавшая о прекрасном пространственном воображении ее автора и знании им начал сферической геометрии, ознаменовала начало новой эры в истории астрономии и ее геометрического аппарата, развитых затем Аристархом Самосским, Гиппархом, Менелаем, Птолемеем и другими.

Однако не следует думать, что Евдокс сделался учеником и последователем Платона. До нас дошли сведения о расхождениях между ними и даже о том, что Платон завидовал Евдоксу. Последнее обычно справедливо считают малоправдоподобным. В действительности же Платон намного превосходил Евдокса в вопросах философии, но еще больше уступал ему в математике. Быть может, расхождения были связаны со взглядами на проблему существования в математике и на роль математического доказательства.

---

[1] *Аристотель.* Физика. Перевод В. П. Карпова. М.—Л., 1936, стр. 6.

Вскоре Евдокс основал собственную научную школу в Кизике на Мраморном море, там же была построена обсерватория, в которой впервые в Элладе систематически велись наблюдения. В Кизике был составлен первый в Греции звездный каталог. Евдокс пытался определить сравнительную величину небесных тел. Он знал уже, что Солнце больше Земли, но считал, что отношение их диаметров равно 9 : 1. Ему же приписывают первое определение длины земного меридиана.

Однако наиболее глубокие исследования Евдокса относятся к области, которую мы теперь называем введением в анализ бесконечно малых: он построил общую теорию отношений и создал «метод исчерпывания», позволивший вполне строго совершать предельные переходы.

Умер Евдокс около 355 г. до н. э., окруженный славой и почетом.

Теория Евдокса дошла до нас в изложении Евклида («Начала», V книга). В основе ее лежала новая, более общая концепция величины.

Известно, что и до этого были попытки обосновать общую теорию отношений. Одна из них, основанная на применении алгоритма Евклида, т. е., по существу, на сравнении непрерывных дробей, которыми выражаются отношения $a : b$ и $c : d$, принадлежала, по-видимому, Теэтету. Однако, как отмечает Аристотель, в «старой» теории отношений основные предложения приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей. Отсюда видно, что эта теория не опиралась на общее понятие величины, ее приходилось, по существу, отдельно строить для разных родов величин. Кроме того, в «старой» теории не удавалось определить общим образом операции над отношениями. Поэтому-то она и была оставлена.

Понятие величины, по Евдоксу, охватывает и числа и непрерывные величины: отрезки, площади, объемы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства. У Евклида эти аксиомы формулируются так:

«1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5. И целое больше части» [1].

Однако область величин, определяемых этими аксиомами, была еще слишком широкой, чтобы над ней можно было определить понятие отношения. Предварительно надо было изгнать актуально бесконечно малые и актуально бесконечно большие величины. Это Евдокс сделал, введя знаменитую аксиому, известную в математике также под именем аксиомы Архимеда:

«Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превозойти друг друга» («Начала», книга V, определение 4) [2]. Иначе говоря, если даны две величины a и b, то должны существовать такие целые числа n и m, что $na > b$ и $mb > a$. Величины, для которых выполняется эта аксиома, мы будем, следуя традиции, называть архимедовыми. В Греции во времена Евдокса были хорошо известны «неархимедовы» величины — так называемые роговидные углы, примером которых может служить угол, ограниченный дугой окружности и касательной в одном из ее концов: увеличивая такой угол в любое число раз, мы

---

[1] *Евклид.* Начала, т. I. Перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1948, стр. 14.
[2] Там же, стр. 142.

не сможем превзойти угол между касательной и любой прямой, пересекающей ее в точке касания[1].

Для определения того, когда две пары архимедовых величин a, b и c, d имеют одно и то же отношение, Евдокс пользуется сопоставлением кратных этих величин (na, mb, nc и md):

«Говорят, что величины находятся в том же отношении первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке» («Начала», книга V, определение 5)[2].

Итак, величины a, b имеют то же отношение, что и c, d, если для любых целых m и n: 1) либо $ma > nb$ и $mc > nd$, 2) либо $ma = nb$ и $mc = nd$, 3) либо $ma < nb$ и $mc < nd$.

Две пары величин, имеющих одно и то же отношение, в «Началах» называются пропорциональными. В предложении V,11 доказывается, что если отношения $a : b$ и $c : d$ пропорциональны одному и тому же отношению $e : f$, то они пропорциональны и между собой. Следовательно, пропорциональность отношений обладает свойством транзитивности, которое было отмечено в аксиоме 1 для равенства величин. Из определения пропорциональности вытекает и ее симметричность, т. е. из пропорциональности отношений $a : b$ и $c : d$ следует пропорциональность отношений $c : d$ и $a : b$. Поэтому пропорциональность есть отношение типа равенства, т. е. в случае пропорциональности отношений $a : b$ и $c : d$ мы можем записать $a : b = c : d$.

Таким образом, все пары величин разбиваются на классы пропорциональных друг другу пар, и новый объект — отношение выступает как то общее, что имеют все пары величин некоторого класса. Такое определение нового объекта получило название определения через равенство.

Отношения Евдокс упорядочивает по величине: $a : b$ больше $c : d$, если существуют такие целые m и n, что $ma > nb$ и одновременно $mc \leqslant nd$ (книга V, определение 7).

Хотя теория отношений Евдокса была безупречно строга и ею, по существу, пользовались до конца прошлого века, объявив вслед за Ньютоном отношения числами, однако вся глубина построения Евдокса была понята только после работ Р. Дедекинда, который во второй половине XIX в. ввел действительные числа как сечения в области рациональных чисел. Между теориями Евдокса и Дедекинда существует столь глубокая аналогия, что Р. Липшиц спрашивал Дедекинда в одном из писем, что же он сделал нового по сравнению с древним.

Остановимся подробнее на этой аналогии. Согласно Дедекинду, действительное число α определяется сечением во множестве рациональных чисел. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется сечением, если:

1) классы A и B не пусты;

2) каждое рациональное число принадлежит либо A, либо B, и притом только одному из них;

3) каждое число из A меньше любого числа из B.

---

[1] Об измерении и свойствах роговидных углов см. *Ф. Клейн*. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II. Перевод под ред. Д. А. Крыжановского. М.—Л., 1934, стр. 336—342.

[2] *Евклид*. Начала, т. I, стр. 142.

Если сечение произведено, то логически возможны четыре случая:
1) в классе A есть наибольший элемент, а в классе B нет наименьшего;
2) в классе A нет наибольшего элемента, а в классе B есть наименьший;
3) в классе A нет наибольшего элемента, а в классе B нет наименьшего;
4) в классе A есть наибольший элемент, а в классе B есть наименьший.
Легко показать, что четвертый случай невозможен, так как он противоречит требованиям, определяющим сечение. Третий случай вполне возможен: например, к классу A отнесем все отрицательные числа, нуль и положительные, квадрат которых меньше 2, а к классу B — все остальные. (В этом случае сечение определяет новое действительное число, не являющееся рациональным.)

Вернемся теперь к определению Евдокса. Пусть задана пара архимедовых величин a, b. Будем пару целых чисел m, n относить к классу A, если $ma > nb$, и к классу B, если $ma \leqslant nb$. Тогда все пары целых чисел (у Дедекинда — рациональные числа!) разобьются на два класса, которые, как нетрудно видеть, не пересекаются и не пусты. Можно показать, что выполняется и аналог свойства 3, если только упорядочить пары (m, n), но мы не будем на этом останавливаться. Если теперь задана пара величин c, d, то и она определит разбиение множеств пар целых чисел на два класса A' и B', которое также является сечением. Согласно определению Евдокса, $a:b = c:d$, если A совпадает с A', а B — с B', т. е., если оба отношения производят одно и то же сечение множества пар целых чисел.

Далее, по Дедекинду, $\alpha < \beta$, если существует такое рациональное число n/m, что $\alpha < \frac{n}{m} < \beta$. По Евдоксу, $a:b > c:d$, если существуют такие m и n, что $ma > nb$ и $mc \leqslant nd$, т. е. $a:b > \frac{n}{m} \geqslant c:d$. Следовательно, и здесь определения, по существу, совпадают.

Однако между обеими теориями имеются и весьма глубокие отличия, обусловленные различиями характеров античной и современной математики. У Евдокса отсутствовала аксиома непрерывности, которую ввел Дедекинд: в его теории любое сечение области рациональных чисел определяет некоторое действительное число. У Евдокса отношение задается парой архимедовых величин, а затем уже строится сечение пар целых чисел. Ниоткуда не следует, что, наоборот, произвольному сечению будет отвечать пара величин $a:b$, которая и определяет это сечение.

Второе различие состоит в том, что Дедекинд оперирует с областью рациональных чисел, а Евдокс — с парами целых, для которых не определены ни арифметические операции, ни отношения порядка.

Мы не можем здесь дать даже приблизительное представление о той захватывающей красоте, с которой Евдокс развивает теорию отношений, и отошлем желающих к V книге «Начал» Евклида. Остановимся еще лишь на вопросе об операциях над отношениями.

Отношения и числа

В «Началах» над отношениями величин производится только одна операция — составление отношений, которая соответствует нашему умножению. Евклид не дает прямого определения этой операции, но называет отношение $a:c$ составленным из $a:b$ и $b:c$, что мы будем записывать в виде

$$(a:b) \otimes (b:c) = a:c.$$

Если $a:b = b:c$, то $a:c$ называется двойным, если $a:c$ составляется из трех одинаковых отношений,— тройным, и т. д. Наконец, если надо составить отношения $a:b$ и $c:d$, то в «Началах» используется существование четвертой пропорциональной — принцип, доказанный Евклидом только для частного случая, именно для отрезков. Для отношения $c:d$ отыскивается равное ему, первый член которого есть b:

$$c:d = b:x.$$

Величина x и есть четвертая пропорциональная к величинам c, d и b. Тогда

$$(a:b)\otimes(c:d) = (a:b)\otimes(b:x) = (a:x).$$

Заметим, что для введения обратной операции не требуется никаких специальных определений. Евклид доказывает, что если $a = b$, то $a:c = b:c$ и $c:a = c:b$. Он свободно пользуется «обращением» отношений, замечая (следствие к предложению V, 7), что из $a:b = c:d$ следует $b:a = d:c$.

В «Началах» устанавливаются два основных свойства операции составления отношений. В предложении V, 22 доказывается, что если $a:b = f:g$ и $b:c = g:h$, то $a:c = f:h$, т. е. результат операции составления не зависит оттого, какие именно представители берутся из класса пар величин, имеющих одно и то же отношение (аналогичное предложение, как мы видели, доказывалось и для отношения чисел). Операция составления отношений определяется, таким образом, не для отдельных пар величин, а для классов пропорциональных друг другу пар величин.

В предложении V, 23 показывается, что если $a:b = g:h$ и $b:c = f:g$, то $a:c = f:h$. Это предложение устанавливает коммутативность операции составления. Действительно, по определению

$$f:h = (f:g)\otimes(g:h).$$

Но по доказанному

$$f:h = a:c = (a:b)\otimes(b:c) = (g:h)\otimes(f:g).$$

Итак,

$$(f:g)\otimes(g:h) = (g:h)\otimes(f:g).$$

В современной математике любое множество M объектов a, b, $c, \ldots$, в котором определен закон композиции $\otimes$, ставящий в соответствие любым двум элементам из M третий элемент из M:

$$a\otimes b = c,$$

называется группой, если этот закон удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых трех элементов a, b, c из M

$$(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c)$$

(закон ассоциативности);

2) существует такой элемент e, что для любого a из M

$$e\otimes a = a$$

(наличие единицы);

3) для каждого a из M существует такой элемент a^{-1}, что

$$a^{-1} \otimes a = e$$

(наличие обратного элемента).

Если, кроме того, для любых двух элементов a, b из M

$$a \otimes b = b \otimes a,$$

группа называется коммутативной или абелевой.

Все рациональные числа, отличные от нуля, образуют группу по умножению, причем единицей является число 1. Эта группа коммутативна. Другим примером группы могут служить все целые числа — положительные, отрицательные и нуль. Законом композиции здесь будет обычное сложение, роль единицы играет нуль, элементом, обратным к a, служит $-a$.

Доказанные Евклидом свойства операции составления отношений показывают, что рассматриваемые им отношения образуют группу и построенная группа коммутативна. Понятие группы позволяет дать более точное определение понятию поля, которым мы уже пользовались выше (см. стр. 70): множество M называется полем K, если в нем определены два закона композиции, которые мы будем называть условно «сложением» и «умножением» и обозначать соответственно $\oplus$ и $\otimes$, причем:

1) множество M является коммутативной группой по «сложению», и, следовательно, в нем существует элемент e, который мы будем называть «нулем»;

2) множество всех элементов из M, кроме «нуля», является коммутативной группой по «умножению»;

3) имеет место дистрибутивный закон «умножения» по отношению к «сложению»:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c.$$

Примерами поля могут служить множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел и множество всех комплексных чисел, а также различные расширения этих полей (например, расширение $Q(\sqrt{2})$ поля Q рациональных чисел).

Какую же функцию выполняли отношения в античной математике? Можно ли сказать, что они служили эквивалентном нашему понятию действительного числа?

Интересная точка зрения по этому поводу была недавно предложена Н. Бурбаки. По его мнению, над областью величин, которые образуют систему с одним внутренним законом композиции (сложением), Евдокс строит, по существу, систему операторов, которыми являются определенные им отношения. Эти операторы образуют коммутативную группу по умножению. При этом неявно предполагается, что если задано отношение $a : b$ и величина c, то существует величина d одного рода с c, и такая, что $a : b = c : d$. Это дает возможность отождествить области операторов, определенных для любых видов архимедовых величин, и прийти, таким образом, к универсальной области операторов.

Н. Бурбаки приходит к выводу, что греческие математики, имея *сложение* величин и *умножение* отношений величин, обладали по существу эквивалентом понятия *поля*, но только в менее удобной форме, чем мы.

Как бы то ни было, у Евдокса для отношений был определен лишь один закон композиции — составление, соответствующий умножению, так что система отношений образовывала не поле, а группу. В этом и состоит основное отличие отношений Евдокса от наших действительных чисел.

Второе отличие заключалось в том, что арифметико-вычислительная функция отношений в античной математике была развита слабо. Исключение составляют труды Архимеда, в которых проводятся виртуозные вычисления. Ситуация изменилась в первых веках нашей эры, когда в связи с развитием астрономии появляется необходимость в составлении таблиц хорд, соответствующих нашим таблицам синусов. В таких таблицах отношение хорды к радиусу $a:r$ выражалось с определенной степенью точности конечной шестидесятичной дробью, а операциям над отношениями соответствовало умножение таких дробей. Именно в эту эпоху ученые и начали рассматривать отношения как некие обобщенные числа. Явное расширение понятия числа произошло в математике стран ислама (XI—XIII вв.) и Европы (XVI—XVII вв.). В обоих случаях это находилось в непосредственной связи с грандиозным развитием вычислительной техники.

«Метод исчерпывания»

В основе «метода исчерпывания» Евдокса лежала следующая основная лемма: если даны две величины a и b, $a > b$, то, вычитая из величины a больше ее половины, из полученного остатка больше его половины и т. д., получим через конечное число шагов остаток $\alpha_n < b$. Эта лемма формулируется и доказывается в предложении X,1 «Начал» Евклида. Доказательство ее таково: на основании аксиомы Евдокса — Архимеда величину b можно повторить столько раз, что $Nb > a$. Повторим теперь N раз процесс выбрасывания из величины a и последовательных остатков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, частей, превышающих их половины:

$$\alpha_1 = a - a_1 < \frac{a}{2},$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - a_2 < \frac{\alpha_1}{2} < \frac{a}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_N < \frac{\alpha_{N-1}}{2^{N-1}} < \frac{a}{2^N},$$

$2^N\alpha_N < a$. Но тогда $N\alpha_N < 2^N\alpha_N < a$.

Итак, $N\alpha_N < a < Nb$, т. е. $\alpha_N < b$.

В этой лемме рассматривается не конкретная последовательность заданных величин, а *любая* последовательность, удовлетворяющая некоторым условиям.

На основе этой леммы проводились доказательства по следующей схеме (которая в общем виде нигде не формулировалась): для определения неизвестной величины A некоторой фигуры (или тела) в нее вписывали монотонно возрастающую последовательность величин

$$A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n, \ldots, \qquad A_n < A, \tag{1}$$

площади которых известны, так, чтобы

$$A - A_1 < \frac{A}{2},$$
$$A - A_2 < \frac{A - A_1}{2} < \frac{A}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A - A_n < \frac{A}{2^n}.$$

Тогда по основной лемме при достаточно большом n разность

$$A - A_n \qquad (2)$$

может быть сделана меньше любой заданной величины b.

Следующий шаг состоял в нахождении арифметического предела последовательности (1), т. е. такой величины B, что разность

$$B - A_n \qquad (3)$$

для достаточно больших n становится как угодно малой. Оговоримся сразу же, что понятие предела в явной форме не вводилось.

Последний шаг состоял в доказательстве того, что $A = B$. Это соответствует нашему доказательству единственности предела последовательности: если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = B$, то $A = B$.

Как и мы, древние доказывали это методом от противного. Если $A \neq B$, то либо $A < B$, либо $B < A$. В первом случае выбираем в качестве величины b разность $B - A$. По определению величины B при достаточно большом n $B - A_n < B - A$, но тогда $A_n > A$, что невозможно. Аналогично опровергается и предположение $A > B$.

Отличие приведенного рассуждения от современного состоит в том, что мы доказываем эту теорему для *любых* последовательностей, имеющих предел, древние же не выделили еще ни понятия последовательности, ни монотонно изменяющейся величины, ни предела. Они вынуждены были поэтому в каждой задаче для рассматриваемых конкретных величин A и B повторять все рассуждения заново, что, конечно, утяжеляло изложение.

С помощью своего метода Евдокс строго доказал следующие теоремы:

1) площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров (это предложение было известно еще Гиппократу Хиосскому);

2) объем пирамиды равен $^1/_3$ объема призмы с теми же основанием и высотой;

3) объем конуса равен $^1/_3$ объема цилиндра с теми же основанием и высотой. Напомним, что оба последних результата Архимед приписывает Демокриту, который, однако, не дал им строгого обоснования.

Евклид добавил к этому доказательство того, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров.

Однако только Архимед сумел с помощью метода Евдокса найти ряд новых площадей и объемов. При этом в своих ранних работах он придерживался той первоначальной схемы метода исчерпывания, о которой мы говорили. Приведем для иллюстрации метода знаменитую квадратуру параболы Архимеда.

Пусть дан косой сегмент параболы $ADBEC$ (рис. 22). Пусть в точке B касательная MN параллельна хорде AC. В качестве первой вписанной фигуры Архимед берет $A_1 = \Delta ABC$. В качестве второй — многоуголь-

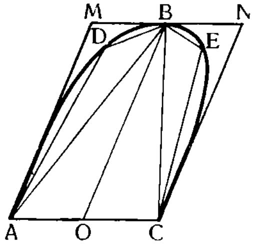


Рис. 22

ник $ADBEC$, являющийся суммой трех треугольников:

$$A_2 = \triangle ABC + \triangle ADB + \triangle BEC,$$

причем два последних вписаны в соответствующие сегменты параболы по тому же закону, что и треугольник ABC.

Архимед показывает, что

$$\triangle ADB + \triangle BEC = \frac{1}{4} \triangle ABC,$$

т. е.

$$A_2 = \triangle ABC + \frac{1}{4} (\triangle ABC) = A_1 + \frac{1}{4} A_1.$$

Продолжая вписывание, он получает

$$A_3 = \triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \frac{1}{16} \triangle ABC = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{16} A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} A_1.$$

Таким образом, вписанные величины являются последовательными суммами геометрической прогрессии со знаменателем $^1/_4$.

Следующий шаг Архимеда состоит в доказательстве того, что разность $A - A_n$, где A — искомая площадь, может быть сделана меньше любой наперед заданной величины. Для этого он показывает, что $\Delta\ ABC$ равен половине описанного параллелограмма $AMNC$, а значит, больше половины A. То же имеет место и при дальнейшем вписывании, так что условия леммы Евдокса выполнены. Только после этого Архимед переходит к суммированию геометрической прогрессии (1). Уже сама последовательность предложений показывает, что эта сумма ищется для определения площади сегмента параболы. Архимед доказывает, что

$$A_n = A_1 + \frac{A_1}{4} + \ldots + \frac{A_1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} A_1 - \frac{1}{3} \frac{A_1}{4^{n-1}},$$

т. е. устанавливает, что A_n с ростом n как угодно мало отличается от $\frac{4}{3} A_1 = B$.

Последний шаг заключается в доказательстве того, что $A = B$, методом от противного. Впоследствии Архимед существенно развил и усовершенствовал и сам метод, о чем мы будем говорить далее.

Заметим, что хотя «метод исчерпывания» и возник из задачи определения площадей и объемов, но элементы учения о пределах, которые в нем содержались, могли быть применены и для исследования других вопросов. Так, с его помощью, по существу, были доказаны некоторые теоремы о пределах. Например, было установлено, что если $a_n : b_n = k$, где k — постоянная и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad b \neq 0,$$

то

$$\frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} = k.$$

Доказательство этой теоремы содержится в XII книге «Начал» Евклида, в предложении XII, 12 о том, что площади двух кругов Q и q относятся, как квадраты их диаметров D^2 и d^2. Здесь, именно:

1) доказывается, что если A_n и B_n подобные многоугольники, вписанные соответственно в Q и q, то

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{D^2}{d^2};$$

2) с помощью леммы Евдокса устанавливается, что разности $Q - A_n$ и $q - B_n$ при достаточно большом n становятся как угодно малыми;

3) наконец, методом от противного доказывается, что

$$\frac{Q}{q} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Ученик Евдокса Динострат, исследуя квадратрису, имеющую в полярных координатах уравнение [1]

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \frac{\varphi}{\sin\varphi},$$

показал, что отрезок, который она отсекает на горизонтальной оси, равен $2r/\pi$, т. е., по существу, нашел, что

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1.$$

Наконец, Архимеду принадлежит доказательство следующего предложения теории пределов: если при любом n

$$u_n < z < v_n,$$

где z — некоторая постоянная величина, u_n — монотонно возрастающая, а v_n — монотонно убывающая последовательности величин, причем разность $v_n - u_n$ при достаточно большом n становится меньше любой наперед заданной величины, то

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = z.$$

[1] В явном виде полярные координаты, конечно, в то время введены не были и уравнения не писались.

Свое доказательство, имеющее вполне общий характер, Архимед проводит для конкретных величин и не употребляет никаких общих понятий теории пределов.

Итак, «метод исчерпывания» древних представляет первое учение о пределах. В основе его лежит лемма, которая позволяет находить предел широкого класса последовательностей. Однако общая схема рассуждения еще не была сформулирована, она повторялась всякий раз заново для рассматриваемых конкретных величин.

Такое явление часто наблюдается в истории нашей науки; то же имело место при возникновении теории групп, теории полей и многих других. Лагранж, Гаусс, Руффини и Абель доказывали совершенно общие теоремы теории групп и полей, но только для конкретных групп подстановок корней уравнения или групп классов квадратичных форм. При этом само понятие группы еще не было определено, доказательства одних и тех же теорем повторялись много раз, и всякий раз способ доказательства был намного более общим, чем формулируемый результат.