ПЯТАЯ ГЛАВА

ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИЕ СТРАНЫ И РИМСКАЯ ИМПЕРИЯ

Наука в эллинистических странах

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского. После завоевания городов-государств материковой Греции его отцом Филиппом Александр переносит войну за пределы Греции и за 332—323 гг. до н. э. покоряет Египет, Вавилон, Персию, среднеазиатские государства Согдиану и Бактрию, а также часть Индии до реки Инда. После смерти Александра его империя распалась на несколько больших частей — эллинистических монархий, правящие династии которых были основаны полководцами Александра. Важнейшими из этих государств были царства Птолемеев в Египте и Селевкидов в Азии. Государственным языком в эллинистических государствах становится греческий, на этом же языке начинает развиваться наука. Столица Птолемеев Александрия, основанная в 331 г. до н. э., вскоре становится торговым, культурным и научным центром всего древнего мира. Птолемей I основал в Александрии Мусейон — дом Муз, в который были приглашены крупнейшие ученые мира.

Условия развития науки в птолемеевском Египте были совершенно иными, чем в городах-государствах древней Греции. В Афинах и других городах Эллады гражданам было обеспечено только «среднее» образование, никаких государственных учреждений, аналогичных современным академиям или университетам, там не было. Молодые люди, желающие пополнить свои знания, собирались вокруг знаменитого ученого или философа, который вел преподавание устно. Книга в классической Греции была большой редкостью и стоила очень дорого. В IV в. до н.э. были организованы Академия Платона, а затем Ликей Аристотеля, где впервые читались систематические лекции. Аристотель также впервые начал собирать библиотеку. Все эти школы не поддерживались государством и были независимы от него.

Напротив, в Александрии Мусейон субсидировался государством и ученые получали жалованье. При Мусейоне была собрана богатейшая библиотека, в основу которой, по преданию, была положена библиотека Аристотеля. К I в. н. э. библиотека насчитывала более 700 000 рукописей. Сюда стекались для учебы молодые люди со всего мира, приезжали работать видные ученые. Итак, основой обучения становится книга. Вместе с тем Мусейон лишился той самостоятельности, которой обладала Академия Платона и Ликей Аристотеля, главный жрец (директор) Мусейона назначался Птолемеем.

В древней Греции научные проблемы пользовались большой популярностью: о задаче удвоения куба, как мы видели, была сложена легенда, задача квадратуры круга была настолько известна, что остроты о ней по-пали в комедию Аристофана «Птицы». В Александрии положение изменилось: основная масса населения — египтяне — даже не понимала языка, на котором писались научные и литературные произведения. Такая изоляция губительно сказалась на художественной литературе, которая ограничивалась в основном подражанием классическим образцам. Ничего сравнимого с трагедиями Эсхила, Софокла и Еврипида или с комедиями Аристофана здесь создано не было, зато развивались филология, критические и исторические исследования. Но особенный расцвет в III—II вв. до н. э. получили точные науки.

Прежде всего следует отметить успехи астрономии, обусловленные синтезом науки Греции и Востока, главным образом Вавилона. В Вавилоне издавна велись астрономические наблюдения, составлялись каталоги звезд, вычислялись подробные астрономические таблицы. При этом вавилонские ученые пользовались удобной шестидесятиричной системой счисления. В Греции, как мы видели, возникли первые астрономические теории и были созданы первые модели солнечной системы. Астрономы Александрии объединили в своем творчестве и то и другое направление: они продолжали вести точные наблюдения и составлять подробные таблицы и одновременно разрабатывали теории, обобщавшие эти более точные наблюдения. Так, Аполлоний для объяснения видимого движения планет построил теорию эпициклов и эксцентрических окружностей, на основе которой Гиппарх и Клавдий Птолемей создали «птолемееву» систему мира. Именно с астрономией было связано развитие плоской и сферической тригонометрии, сферической геометрии, а также существенное развитие приближенных вычислений, в которых была использована шестидесятиричная система дробей.

Математические методы в эту эпоху проникли не только в астрономию. Архимед построил с их помощью начала статики и гидростатики. Евклид, Архимед и Аполлоний развивали геометрическую оптику, Евклид занимался теорией музыки.

Большие успехи сделала и география. Ученый-энциклопедист Эратосфен из Кирены — математик, географ, историк, филолог и поэт (его называли «пентатлосом», т. е. пятиборцем) — предпринял новое измерение длины градуса меридиана, что позволило ему установить более точные размеры Земли. Эратосфену принадлежат и интересные математические исследования: он предложил новое механическое решение задачи удвоения куба, занимался теорией чисел, где прославился изобретением «решета Эратосфена» для «отсеивания» простых чисел.

В III в. до н. э. одновременно с ним жили и работали такие гении, перед трудами которых меркнут все просто хорошие или даже очень хорошие работы. Мы имеем в виду Евклида, Архимеда и Аполлония.

Евклид

Мы почти ничего не знаем о Евклиде. Неизвестно, откуда он был родом, где и у кого учился. Такое беспрецедентное отсутствие сведений побудило даже одного историка науки (речь идет о Ж. Итаре) предположить, что имя Евклида служило псевдонимом для группы александрийских математиков, что Евклид был Никола Бурбаки древности.

Все же у нас нет оснований сомневаться в существовании Евклида, тем более что в этом не сомневались и позднейшие греческие ученые, кое что рассказывавшие о его характере. Папп сообщает, что он был очень доброжелателен ко всем тем, кто сделал хоть какой-нибудь вклад в математику, корректен, в высшей степени порядочен и совершенно лишен тщеславия. Большую принципиальность Евклида подчеркивают и два следующих анекдота о нем. Как-то царь Птолемей I спросил Евклида, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем штудирование «Начал». На это Евклид смело ответил, что «в геометрии нет царской дороги». Другой исторический анекдот повествует о том, что один из юношей, изучив первое предложение «Начал», спросил у Евклида: «А что я могу заработать, выучив все это?» Евклид позвал раба и сказал: «Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением».

Гораздо больше мы знаем о математическом творчестве Евклида. Прежде всего Евклид является для нас автором «Начал», по которым учились математики всего мира.

В дальнейшем мы будем говорить о «Началах», теперь же посмотрим, что еще интересовало Евклида.

Его глубоко занимали вопросы логических основ математики, и одно из его сочинений, которое до нас не дошло, называлось «Ложные заключения». В книге «Данные» Евклид исследовал вопрос о том, каково должно быть минимальное число заданных величин, чтобы сделать некоторую задачу определенной. Он еще до Аполлония написал трактат о конических сечениях — наиболее полное и систематическое изложение учения об этих кривых.

Евклид, как и другие великие греческие геометры, занимался астрономией, оптикой и теорией музыки. До нас дошли его сочинения, посвященные прикладным вопросам: «Феномены» (элементарная сферическая астрономия), «Оптика» (учение о перспективе) и «Сечение канона» (теория музыки). Это были первые прообразы будущих исследований по математической физике: в них теория выводилась строго дедуктивно из явно сформулированных физических гипотез и математических постулатов.

«Начала» Евклида

Эта удивительная книга пережила более двух тысячелетий, но до сих пор не утратила своего значения не только в истории науки, но и в самой математике. Созданная там система евклидовой геометрии и теперь изучается во всех школах мира и лежит в основе почти всей практической деятельности людей. На геометрии Евклида базируется классическая механика, ее апофеозом было появление в 1687 г. «Математических начал натуральной философии» Ньютона, где законы земной и небесной механики и физики устанавливаются в абсолютном евклидовом пространстве.

Содержание «Начал» далеко не исчерпывается элементарной геометрией — это основы всей античной математики. Здесь подводится итог более чем 300-летнему ее развитию и вместе с тем создается прочная база для дальнейших исследований. Последующие математики ссылались на предложения «Начал», как на нечто окончательно установленное. Какие же области математики выбрал Евклид в качестве элементов? Это планиметрия и стереометрия, геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений, теория чисел, учение об отношениях чисел и отношениях величин, классификация квадратичных иррациональностей, метод исчерпывания.

В «Начала» не вошли ни учение о конических сечениях, ни исследования, связанные со знаменитыми задачами древности, ни квадрируемые луночки Гиппократа Хиосского. Там не рассматриваются также вопросы приближенных вычислений. Таким образом, «Начала» не являются энциклопедией античной математики. Видимо, цель Евклида при написании тринадцати книг «Начал» была близка к той, которой в наши дни руководствовался Н. Бурбаки при создании своих многотомных «Элементов математики», а именно: дать описание тех основных элементов, на основе которых могут быть развиты все разделы современной ему математики; кстати, название трактата Н. Бурбаки непосредственно указывает на связь с Евклидом (по-французски книга Евклида называется «Les éléments»).

Посмотрим, как решает эту задачу Евклид.

Заметим, что идея составления «Начал» не принадлежит самому Евклиду. Как сообщает Прокл, и до Евклида были сочинения такого рода. Первые «Начала» были написаны Гиппократом Хиосским, а затем Леоном и Фейдием, принадлежащими к школе Платона. Несомненно, что и до Евклида сложились определенные традиции, определенные схемы, по которым писались такие книги. Но «Начала» Евклида оказались, по-видимому, настолько совершеннее своих предшественников, что полностью затмили их и вытеснили из обихода. Во всяком случае, последующие античные математики ссылались только на «Начала» Евклида.

Аксиоматика

«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. Каждая книга начинается с определений; кроме того, первой книге предшествует пять постулатов и пять аксиом (в некоторых списках приводятся еще четыре аксиомы).

Определения «Начал» можно разбить на две группы: рабочие определения, которые используются при построении теории (например, определение равенства двух отношений или определения прямого угла), и описательные, которые далее не употребляются (например, «точка есть то, что не имеет частей» или «линия же — длина без ширины»). Последние, быть может, были попыткой ввести размерность величин: точки — как нульмерной величины, линии — как одномерной.

В настоящее время, следуя Д. Гильберту, такие основные понятия, как «точка», «прямая», «плоскость», определяются системой оксиом в целом, причем под «точками» можно понимать не только те геометрические образы, которые мы с ними связываем, но и, например, пару действительных чисел (x, y), под прямой — множество пар, удовлетворяющих уравнению $Ax + By + C = 0$, и т. д.

Постулаты «Начал» таковы:

«1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.

2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.

4. Все прямые углы равны между собой.

5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограничен-

но эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»[1].

Первые три постулата описывают простейшие построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки. Четвертый постулат обеспечивает единственность продолжения прямой. Наконец, пятый постулат — знаменитый постулат о параллельных[2]. На первый взгляд, он не имеет отношения к построениям, однако на деле обеспечивает существование точки пересечения у двух прямых, удовлетворяющих сформулированным условиям.

Аксиомы «Начал» описывают общие свойства равенства и неравенства величин,— мы привели их выше (стр. 96). Все аксиомы, кроме четвертой, относятся не только к геометрическим величинам, но и к числам вообще, ко всем величинам, подчиняющимся аксиомам Евдокса. Четвертая аксиома — «совмещающиеся равны» — является единственной, в которой говорится о возможности движения — совмещения.

Выбор постулатов и аксиом очень удачен. Почти все они вошли в современную аксиоматику. Однако постулатов и аксиом «Начал» недостаточно для дедуктивного построения геометрии. Евклид не сформулировал многого из того, чем он пользуется в дальнейшем. Так, в «Началах» нет стереометрических постулатов. За исключением четвертой аксиомы, там нет и аксиом движения. Между тем в геометрии Евклида изучаются по существу инварианты движений твердого тела.

При построении геометрии необходимо поэтому либо определить, какие допускаются движения, либо ввести аксиомы конгруэнтности, с помощью которых определяется равенство фигур, и тогда движениями будут точечные взаимно однозначные преобразования, которые переводят прямые в прямые и не нарушают равенства фигур. У Евклида нет ни того, ни другого. Между тем, в доказательствах он пользуется перемещением фигур (например, в предложении I, 4 при доказательстве признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними), а в определениях шара, конуса и цилиндра — вращением (соответственно полукруга, треугольника и прямоугольника). Заметим, что формулировка аксиом движения в то время представляла почти непреодолимые трудности. Недостаток этих аксиом, видимо, ощущался Евклидом, и он старался как можно меньше пользоваться движением.

У Евклида имеется только одно из предложений (оно дано в виде 4-го определения V книги), относящееся к тому, что теперь называют аксиомами непрерывности,— это аксиома Евдокса — Архимеда, о которой

---

[1] *Евклид.* «Начала», т. I, стр. 14—15.

[2] Пятый постулат удивлял ученых сложностью своей формулировки. Он походил более на теорему, чем на постулат. Уже в древности его пытались заменить другим, более очевидным предложением. Так, у Прокла (V в. н. э.) встречается формулировка постулата о параллельных, которая вошла теперь во все школьные курсы: через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую заданной. Евклиду безусловно должны были быть известны различные формы постулата о параллельных. Почему же он выбрал из них такую сложную? Совсем недавно все эти вопросы получили новое освещение. В 1966 г. И. Тот на основании анализа нескольких текстов Аристотеля пришел к заключению, что в античной математике до Евклида изучались геометрические системы, в которых сумма углов треугольника не равна двум прямым углам, а больше или меньше этой величины. Такие системы в XIX в. получили название неевклидовых. Согласно И. Тоту, греки знали многие предложения неевклидовой геометрии (см. литературу в конце книги).

мы уже говорили. Второй из аксиом этой группы могла бы быть аксиома о существовании общей точки у последовательности вложенных один в другой стягивающихся отрезков или аксиома полноты Дедекинда. Этих аксиом не только нет в «Началах», но они нигде не используются в тексте. Создается впечатление, что точка зрения непрерывности чужда Евклиду. В его геометрии нельзя доказать существования квадрата, равновеликого кругу, потому что такой квадрат не может быть построен циркулем и линейкой. Этому нисколько не противоречит то обстоятельство, что задачи на построения Евклид решает, находя точки пересечения прямых и окружностей, т. е. как будто пользуется непрерывностью этих линий. На самом деле, как мы видели, каждое такое построение эквивалентно решению нормальной цепочки квадратных уравнений. Все построения Евклида выполнимы пад минимальным полем, в котором разрешимо любое уравнение $x^2 = a^2 + b^2$. Такое поле в настоящее время называют пифагоровым и обозначают Ω. Построение такого поля Ω намечено Евклидом в X книге; разница, по существу, состоит лишь в том, что Евклид рассматривает только положительные числа. Поэтому ему приходится разбирать различные частные случаи, зависящие от взаимного расположения точек на прямой.

В V и VI книгах Евклид оперирует отношениями любых величин — он строит там, по существу, теорию действительного числа и теорию меры. В XII книге он находит отношения площадей двух кругов, конуса и цилиндра, пирамиды и призмы, наконец, двух сфер. При этом ему как будто приходится выйти из поля Ω: площадь круга, например, не принадлежит этому полю. Однако Евклид и здесь рассматривает только такие отношения, которые лежат в Ω. Так, он не рассматривает отношения площади круга к квадрату диаметра (т. е. $\pi/4$), но показывает, что отношение площадей двух кругов равно отношению квадратов их диаметров, т. е. лежит в Ω, если сами диаметры есть величины из Ω. В остальном все построения Евклида проводятся над пифагоровым полем Ω, для их выполнения по самому существу дела континуум математического анализа является излишним. С этой точки зрения «Начала» можно интерпретировать как глубоко алгебраическое произведение.

Однако предложения самого Евклида допускают выход за пределы пифагорова поля. Так как, например, из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ вытекает пропорция $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, то из теоремы о пропорциональности кругов квадратам, построенным на их диаметрах, следует, что можно говорить об отношении круга к описанному квадрату, а оно равно $\pi/4$. Во всяком случае, все преемники Евклида понимали евклидову геометрию как геометрию непрерывных образов и движений. В такой геометрии одной аксиомы Евдокса — Архимеда было недостаточно, на что впервые указал еще Лейбниц.

Тринадцать книг «Начал»

Первые четыре книги «Начал» посвящены планиметрии и геометрической алгебре. Особенность их в том, что не применяется учение о подобии, т. е. они строятся без действительных чисел.

В I книге излагается планиметрия прямолинейных фигур; в ней устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников, трапеций и доказывается, например, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и т. д. Венчает книгу теорема Пифагора и обратное ей предложение. Поскольку книга строится без общей теории отношений, все теоремы о площадях формулируются как предложения о равновеликости. Так, вместо привычного нам предложения о том, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, доказывается, что треугольник равновелик половине прямоугольника, имеющего с ним равные основания и высоту.

Во II книге излагаются элементы геометрической алгебры. Произведение двух отрезков здесь понимается как построенный на них прямоугольник. Уже упоминалось, что в этой книге устанавливаются основные тождества и доказывается закон дистрибутивности умножения по отношению к сложению.

Обе первые книги восходят к пифагорейцам.

В III книге рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд. Эти вопросы были исследованы еще Гиппократом Хиосским или ранее.

Наконец, в IV книге строятся правильные n-угольники при $n = 3$, 4, 5, 10, 15, причем исключительно изящное построение правильного 15-угольника принадлежит, по-видимому, самому Евклиду.

V книга посвящена общей теории отношений величин Евдокса. Она отличается особенной стройностью и логической завершенностью.

В VI книге Евклид строит учение о подобии и прилагает его к задачам, равносильным решению квадратных уравнений вида

$$\frac{b}{c} x (a \pm x) = S.$$

В этих книгах вводится новый закон композиции — составление отношений — и устанавливаются его свойства; об этом подробно говорилось ранее.

В VI книге Евклид связывает составление отношений с операцией умножения отрезков, а именно: если $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — равноугольные параллелограммы, то в предложении VI, 23 доказывается, что

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A'B'C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right) \otimes \left(\frac{CD}{C'D'}\right).$$

В частности, если эти параллелограммы прямоугольны, то

$$\frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right) \otimes \left(\frac{CD}{C'D'}\right).$$

Книги VII—IX посвящены арифметике, т. е. теории целых и рациональных чисел. Каждое целое число изображается отрезком, полученным повторением единичного. Сложение чисел сводится к сложению изображающих их отрезков.

Для чисел-отрезков вводится новый (третий по счету) закон композиции: произведением числа $A = aE$ (где a показывает, сколько раз была повторена единица E для получения A) на $B = bE$ называется число $C = bA$. При таком несимметричном определении закона композиции, естественно, Евклиду приходится доказывать, что

$$AB = BA,$$

т. е.

$$bA = aB.$$

Четвертый закон композиции, аналогичный второму, определяется на множестве отношений целых чисел. Мы будем обозначать его, как и прежде, символом $\otimes$. Евклид устанавливает его связь с умножением целых чисел. Он доказывает, что

$$(AA_1) : (BB_1) = (A : B) \otimes (A_1 : B_1),$$

где AA_1 и BB_1 — произведения целых чисел.

Таким образом, Евклид выявляет тесные связи между всеми введенными им законами композиции.

В арифметических книгах, помимо изучения сложения и умножения целых чисел и умножения их отношений, рассматриваются вопросы теории чисел: вводится «алгоритм Евклида», доказываются основные теоремы теории делимости целых чисел, наконец, доказывается знаменитая теорема Евклида о том, что существует бесконечно много простых чисел.

Приведем последнее доказательство. Допустим, что существует только конечное число простых чисел: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Оно является либо простым, и тогда мы получаем новое простое число $q \neq p_1, \ldots, p_n$, либо составным, и тогда делится на некоторое простое q, которое, как легко видеть, не может совпадать ни с одним из p_i.

В X книге на основании учения о целых и рациональных числах Евклид, следуя Теэтету, проводит классификацию квадратичных иррациональностей, которые возникают при решении цепочек квадратных уравнений. Здесь намечается построение того пифагорова поля, о котором уже говорилось. В этой же книге доказывается, что соизмеримые величины относятся, как число к числу. В сущности, этим множество рациональных чисел вкладывается в множество всех действительных.

Иногда Евклида упрекают за то, что он изложил теорию отношений дважды: для любых величин в V книге и для целых чисел в VII—IX книгах. Г. Цейтен объяснял это тем, что «общая теория пропорций, изложенная в пятой книге, была еще слишком нова и недостаточно поэтому развита»[1]. Он считал, что «сохранившееся в седьмой книге учение о пропорциях представляет образец более старого подхода к вопросу». Между тем такое «повторение» вовсе не нуждается в специальных объяснениях: оно диктуется со строгой необходимостью нуждами самой математики. Конечно, построив общую теорию отношений, Евклид тем самым охватил и отношения соизмеримых величин, однако для изучения самого множества рациональных чисел необходимо было дать ему отдельное *независимое* определение. Это и сделал Евклид, это же делаем и мы. Только таким путем и можно изучать рациональные числа и их алгебраические расширения, получаемые присоединением к рациональным числам корней алгебраических уравнений, что и делается (для частного случая) в X книге. Эта книга наиболее длинна и трудна для понимания. Здесь больше всего ощущается недостаток в удобной символике.

XI книга посвящена стереометрии. Она содержит основные предложения о прямых и плоскостях в пространстве, задачи на построение (например, опустить из данной точки на данную плоскость перпендикуляр), а также предложения о равновеликости параллелепипедов и призм.

---

[1] *Г. Г. Цейтен.* История математики в древности и в Средние века. Перевод П. С. Юшкевича. М.—Л., 1938, стр. 108.

В XII книге с помощью метода исчерпывания доказано, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров, объемы пирамид и конусов сравниваются с объемами соответствующих призм и цилиндров, и, наконец, выводится, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров.

XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников — тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра, выражению их ребер через радиус описанной сферы с помощью иррациональностей X книги и доказательству того, что других правильных тел не существует. Основные результаты этой книги принадлежат Теэтету.

Позднее к «Началам» стали нередко присоединять еще две книги — XIV и XV. Первая из них была написана во II в. до н. э. Гипсиклом и посвящена сравнению объемов и поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу. Вторая была составлена в школе Исидора Милетского в VI в. н. э. и содержит некоторые предложения о правильных многогранниках.

Мы постарались здесь дать хотя бы самое общее представление о замечательном богатстве содержания, стройности и монолитности «Начал». В заключение приведем слова Альберта Эйнштейна о «Началах»: «Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением» [1].

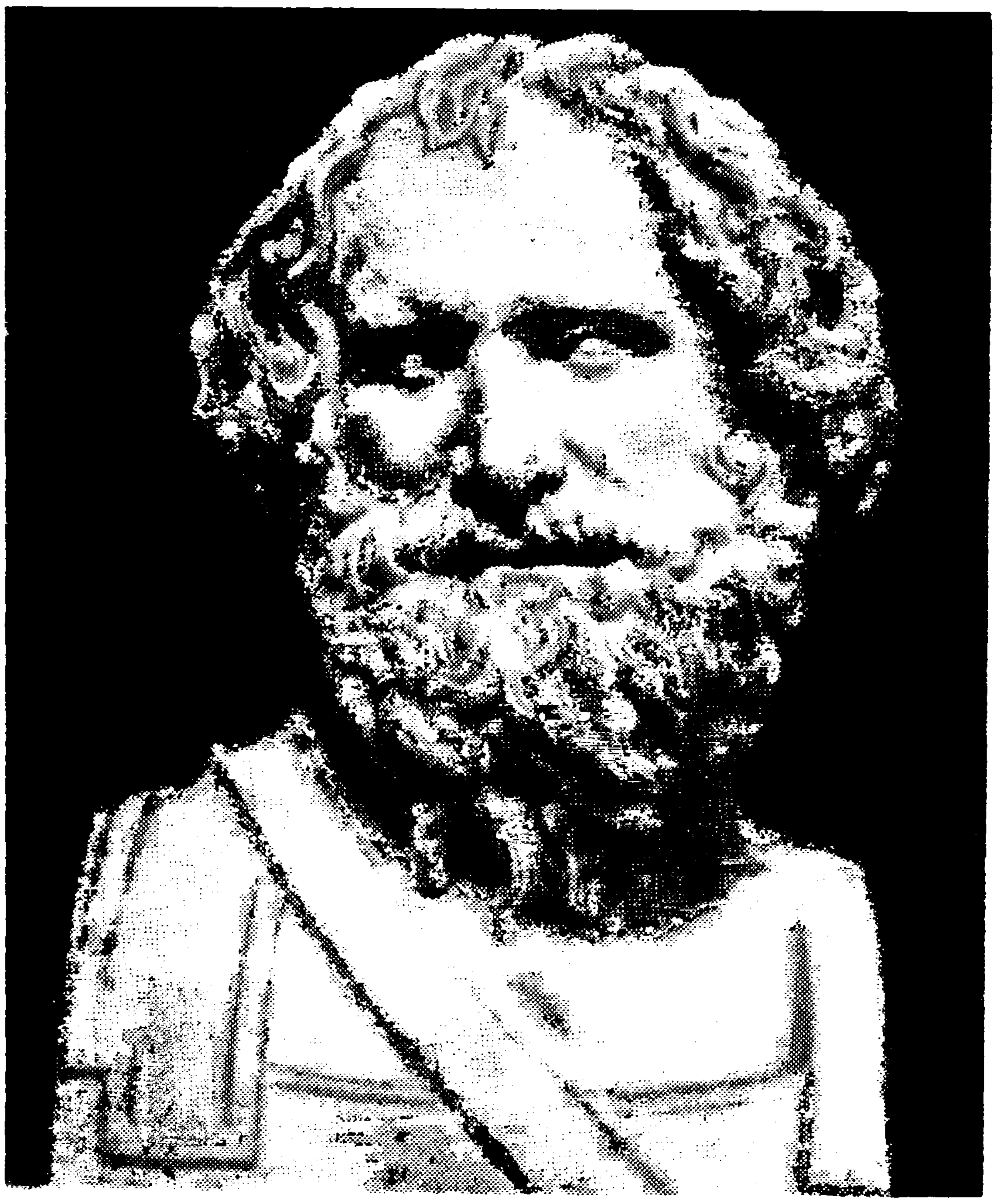
Влияние «Начал» на развитие математики было колоссальным. Мы уже говорили, что Архимед, Аполлоний и другие античные математики опирались на них при своих исследованиях по математике и механике. В конце VIII — начале IX в. появились первые переводы «Начал» на арабский язык, в первой четверти XII в. — на латинский язык. И в странах ислама, и в Европе Средних веков «Начала» служили настольной книгой каждого серьезного математика; их многократно переписывали, переиздавали печатно, комментировали, а также перерабатывали для преподавания.

Первое издание «Начал» на русском языке вышло в 1739 г., последнее — в 1948—1950 гг. В историко-математической литературе до сих пор не перестают появляться все новые толкования как отдельных мест «Начал» так и их общей структуры в целом. При этом с каждой эпохой в развитии нашей науки связано все более глубокое понимание великой книги Евклида.

Архимед

Архимед принадлежит к числу тех немногих гениев, творчество которых определило на долгие века судьбу науки, а тем самым и судьбу человечества. В этом он схож с Ньютоном. Между творчеством обоих великих гениев можно провести далеко идущие параллели. Те же области интересов: математика, физика, астрономия, та же невероятная сила ума, способная проникать в глубь явлений, наконец, та же популярность среди самой широкой публики. Действительно, среди всех математиков и физиков только имена Архимеда и Ньютона известны всему куль-

[1] *А. Эйнштейн.* Физика и реальность. М., 1965, стр. 62.



Архимед
(Неаполь, Национальный музей)

турному человечеству, только с ними связано такое количество легенд и анекдотов.

Архимед родился в 287 г. до н. э. в богатом торговом городе Сиракузы в Сицилии. Отец его был астроном Фидий, который, по-видимому, с детства привил сыну любовь к математике, механике и астрономии. Вероятно, Архимед ездил в Александрию и работал в ее знаменитой библиотеке. Там он познакомился с александрийскими учеными, с которыми потом переписывался до конца жизни. Он писал астроному Конону, а после смерти его — Досифею и Эратосфену. Эти письма напоминают современные научные мемуары. Каждое письмо обычно посвящено одной теме, в нем сообщаются только новые результаты, которые излагаются безупречно строго.

Иногда Архимед сообщал свои теоремы без доказательств, чтобы доставить математикам удовольствие самим обосновать их. Желая проверить действительные знания александрийцев, Архимед добавлял порой несколько ложных предположений для того, «чтобы тех, которые утверждают, что они все открыли, и не приводят никаких доказательств открытого можно было уличить и заставить согласиться с тем, что они открыли невозможное» [1].

[1] *Архимед.* Сочинения. Перевод И. Н. Веселовского. М., 1962, стр. 227.

Письма Архимеда показывают, как напряженно он работал по возвращении в Сиракузы. И не только как теоретик — об этой стороне его творчества мы скажем дальше. До нас дошли рассказы и о замечательных изобретениях и конструкциях Архимеда. Еще будучи в Египте, он изобрел так называемый бесконечный винт («улитка Архимеда») для вычерпывания воды, который и до сих пор употребляется во всей Северной Африке.

Сохранилось предание, что Архимед построил машину, с помощью которой одним движением руки сдвинул с места тяжело нагруженный корабль и без труда протащил его по суше. Трудно поверить, что дело обстояло в точности так. Во всяком случае, с теорией рычага была связана приписываемая Архимеду крылатая фраза: «Дайте мне точку опоры — и я сдвину мир». Несомненно, что Архимед сконструировал также планетарий (или «небесную сферу»), в котором можно было наблюдать фазы Луны, движение планет, затмение Солнца и Луны. Планетарий этот, по-видимому, приводился в движение водой. Впоследствии его перевезли в Рим, где его видел и описал Цицерон.

Гений Архимеда как инженера и изобретателя особенно проявился во время осады Сиракуз римлянами. Архимед употребил все силы для защиты родного города. Изобретенные им мощные метательные машины забрасывали римлян каменными ядрами и стрелами. Думая, что они будут в безопасности у самых стен города, римляне кинулись туда, но в это время вступили в строй легкие метательные машины близкого действия и забросали их градом ядер. Мощные краны захватывали железными крюками носы кораблей, поднимали их кверху, а затем бросали вниз, так что корабли переворачивались и тонули. По рассказу Плутарха, римские солдаты были так напуганы, что «едва заметив на стене веревку или кусок дерева, они поднимали отчаянный крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них какую-то машину» [1]. Римляне вынуждены были отказаться от мысли взять город штурмом и перешли к его осаде. Знаменитый историк древности Полибий писал: «Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело... римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца» [2]. Только из-за измены Сиракузы были взяты римлянами осенью 212 г. до н. э. При этом был убит Архимед. Плутарх сохранил нам яркий рассказ о его смерти: «В тот час Архимед внимательно рассматривал какой-то чертеж и, душою и взором погруженный в созерцание, не заметил ни вторжения римлян, ни захвата города, когда вдруг перед ним вырос какой-то воин и объявил ему, что его зовет Марцелл. Архимед отказался следовать за ним до тех пор, пока не доведет до конца задачу и не отыщет доказательства. Воин рассердился и, выхватив меч, убил его» [3]. Согласно желанию Архимеда, на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. По этому признаку могила Архимеда была разыскана через полтора столетия Цицероном; разыскать ее теперь не смогли.

Большая широта научных интересов, характерная для всех великих геометров Греции, с особой силой проявилась в творчестве Архимеда. Наиболее тонкие математические методы своего времени он прилагал к исследованию задач теоретической механики и гидростатики. Наоборот, сами теоремы механики, особенно принцип рычага, служили ему для от-

[1] *Плутарх.* Сравнительные жизнеописания, т. I. М., 1961, стр. 393.
[2] *Полибий.* Всеобщая история в сорока книгах, т. II. М., 1895, стр. 127.
[3] *Плутарх.* Сравнительные жизнеописания, т. I, стр. 395.

крытия новых математических истин. Наконец, Архимед сумел строго теоретически исследовать приемы приближенных вычислений, применив к ним аппарат неравенств.

Мы не сможем здесь дать представление о работах Архимеда, относящихся к астрономии и механике. Скажем только несколько слов о некоторых из них.

Из механических работ Архимеда до нас дошла полностью только одна — «О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур». В этом сочинении, положившем начало статике как науке, Архимед, исходя из явно сформулированных физических посылок, с помощью общей теории отношений Евдокса — Евклида, выводит знаменитый закон рычага: величины (веса которых могут быть как соизмеримыми, так и несоизмеримыми) уравновешиваются, если расстояния их от точки опоры обратно пропорциональны весам. Этот закон он применил впоследствии для нахождения новых площадей и объемов.

В сочинении «О плавающих телах» Архимед сформулировал основной закон гидростатики, носящий ныне его имя, и нашел положения устойчивого равновесия прямого сегмента параболоида вращения. Он исходил при этом из очевидно необходимого условия равновесия, заключающегося в том, что центр тяжести вытесненного объема жидкости, к которому приложена равнодействующая давления жидкости, и центр тяжести всего тела лежат на одной вертикали (иначе сила тяжести и сила давления жидкости образовывали бы пару, которая вывела бы тело из исходного состояния). Для определения положений устойчивого равновесия, т. е. таких, в которые тело возвращается при небольших отклонениях, Архимед предпринимает дополнительные исследования. При этом он рассматривает, по существу, аналог так называемой поверхности центров, которая была введена Ш. Дюпеном в начале XIX в. Вплоть до работ Дюпена и А. Ю. Давидова эти глубокие исследования Архимеда не получили существенного развития, хотя определением положений устойчивого равновесия занимались такие ученые, как Стевин, Эйлер и Лагранж.

Архимед занимался также геометрической оптикой. О его «Катоптрике» мы знаем со слов римского архитектора Витрувия, который сообщает, что там рассматривались вопросы об изображении предметов в плоских, выпуклых и вогнутых зеркалах, о зажигательных зеркалах, о причине радуги. Архимеду было известно, что угол падения светового луча равен углу отражения.

Несмотря на глубокий интерес Архимеда к вопросам механики и оптики, основным делом его жизни была математика. По словам Плутарха, Архимед был просто одержим ею. Часто он забывал о пище и совершенно не заботился о себе.

Остановимся прежде всего на исследованиях Архимеда по «математическому анализу».

Интегральные методы Архимеда

В сочинениях «О шаре и цилиндре», «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах» Архимед применил метод верхних и нижних интегральных сумм, которые мы теперь называем суммами Римана или Дарбу.

Пусть требуется найти величину V некоторой фигуры (это может быть объем или площадь). Архимед вписывает в эту фигуру и описывает вокруг нее ступенчатые фигуры, состоящие из элементарных частей, величины которых известны. Суммируя эти части, он получает объем или площадь описанной $\overline{S}$ и вписанной $\underline{S}$ фигур. Тогда

$$\underline{S} < V < \overline{S}.$$

Архимед устанавливает, что разность $\overline{S} - \underline{S}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточном увеличении числа элементарных частей и уменьшении их величин, и находит искомую величину как общий предел обеих сумм $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Хотя он и не отмечает это особо, однако во всех рассмотренных им случаях суммы $\underline{S}$ монотонно возрастают, а $\overline{S}$ монотонно убывают.

В сочинении «О коноидах и сфероидах», в котором определяются объемы сегментов эллипсоидов, параболоидов и двуполостных гиперболоидов вращения, Архимед доказывает следующую общую лемму (предложение XIX), заменившую ему основную лемму Евдокса: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой наперед заданной телесной величины» [1].

Архимед доказывает это, опираясь на лемму Евдокса.

Для нахождения площадей и объемов Архимед пользуется соотношениями, которые в современной записи имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu h = \frac{n(n+1)}{2} h, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\nu h)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} h^2, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta = \frac{(1-\cos n\theta)\cos\frac{\theta}{2} - \sin n\theta \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{4}$$

При этом формулу (2) он применил в трех случаях: для нахождения объемов сегментов эллипсоида и гиперболоидов вращения, а также площади первого витка спирали $\rho = a\varphi$. Во всех этих случаях Архимед пользовался неравенствами, вытекающими из (2), находя, по существу, нижнюю грань верхних сумм (площадей или объемов описанных фигур) и верхнюю грань нижних сумм (площадей или объемов вписанных фигур).

Так, при определении площади S первого витка спирали $\rho = a\frac{\varphi}{2\pi}$ Архимед делит центральный угол, равный 2π, на n частей и рассматривает

[1] *Архимед.* Сочинения, стр. 195.

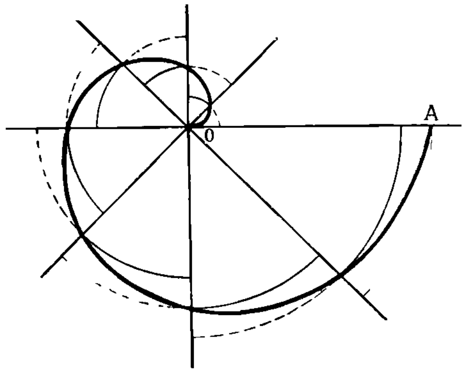


Рис. 23

описанную $\overline{S}$ и вписанную $\underline{S}$ фигуры, составленные из описанных и вписанных круговых секторов соответственно (рис. 23). Тогда

$$\overline{S} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu a}{n}\right)^2 \frac{\pi}{n} > \frac{n^3}{3} \frac{a^2}{n^2} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2\pi}{3},$$

$$\underline{S} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{\nu a}{n}\right)^2 \frac{\pi}{n} < \frac{n^3}{3} \frac{a^2}{n^2} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2\pi}{3}.$$

Архимед показывает, что разность $\overline{S} - \underline{S}$ может быть сделана как угодно малой, и так как

$$\underline{S} < S < \overline{S},$$

то он заключает, что $S = a^3\pi/3$. Это он доказывает методом от противного.

Во всех трех случаях Архимед вычисляет, по существу,

$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}. \qquad (5)$$

Н. Бурбаки поставил вопрос о том, «до какой степени Архимед осознавал те родственные связи, которые объединяют различные исследуемые им проблемы (связи, которые мы бы выразили, говоря, что один и тот же интеграл появляется во многих случаях в различных геометрических аспектах), и какое значение он им придавал» [1]. Мы не можем дать прямого ответа на этот вопрос, однако несомненно, что Архимед видел, что в основе всех трех случаев, о которых мы говорили, лежат одни и те же аналитические формулы и оценки. Но у него не было средств, чтобы ввести общее понятие определенного интеграла, и вряд ли он имел о нем четкое представление. Все же Архимед установил родственные связи между тремя рассмотренными случаями тем, что свел их к определению предела одних и тех же интегральных сумм — прообразу нашего понятия определенного интеграла. Аналогичным образом формула (1) служила Архимеду для на-

[1] *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики, стр. 169.

хождения предела суммы $\sum_{\nu=1}^{n}(\nu h)h$, которую он применил для определения объема прямого сегмента параболоида вращения.

Вообще результаты книги «О коноидах и сфероидах» равносильны следующим соотношениям:

$$\int_0^a x\,dx=\frac{a^2}{2},$$

$$\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3},$$

$$\int_0^a (x^2+bx)\,dx=\frac{a^3}{3}+b\frac{a^2}{2},$$

причем в последнем случае, по существу, доказывается, что

$$\int_0^a (x^2+bx)\,dx=\int_0^a x^2dx+b\int_0^a x\,dx.$$

С помощью метода верхних и нижних интегральных сумм Архимед решил и более трудную проблему — определение длин дуг и площадей кривых поверхностей. Для этого ему понадобились новые постулаты, которые он вводит в начале I книги сочинения «О шаре и цилиндре».

«1. Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2. Две другие линии, расположенные на плоскости и имеющие те же самые концы, будут всегда неравными, если они обе выпуклы в одну сторону, и одна из них или целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обеим линиям; при этом меньшей будет объемлемая линия.

3. Подобным же образом из поверхностей, имеющих общую границу, расположенную на плоскости, наименьшей будет плоскость.

4. Две другие поверхности, имеющие общую границу, расположенную на плоскости, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну сторону и одна из них или целиком объемлется другой поверхностью и плоскостью, содержащей их общую границу, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обеим поверхностям; при этом меньшей будет объемлемая поверхность.

5. Далее, большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении» [1].

Последний постулат представляет знаменитую аксиому Евдокса — Архимеда.

Эти постулаты позволяют Архимеду найти поверхность сферы и сферического сегмента и дать метод вычисления длины окружности с любой сте-

[1] *Архимед.* Сочинения, стр. 96—97.

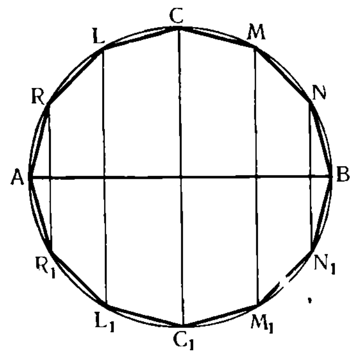


Рис. 24.

пенью точности. Архимед вписывает в круг правильный многоугольник, число сторон которого кратно 4, и вращает круг и многоугольник вокруг диаметра, соединяющего две противоположные вершины (рис. 24). Тогда поверхность тела вращения многоугольника есть сумма поверхностей усеченных конусов. Для подсчета площади этих поверхностей Архимед и находит сумму хорд $RR_1 + LL_1 + CC_1 + MM_1 + NN_1$, т. е.

$$2\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Затем он рассматривает поверхность тела вращения $\bar{S}_n$ многоугольника, подобного данному, но описанного около круга. Согласно четвертому постулату

$$\underline{S}_n < S < \bar{S}_n,$$

где S — поверхность шара, причем с ростом n, в силу той же аксиомы, $\underline{S}_n$ монотонно возрастают, а $\bar{S}_n$ монотонно убывают. При этом

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2r\pi \sin\frac{k\pi}{n}\, r\frac{\pi}{n} = 2r^2\pi \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{n} < 4r^2\pi.$$

Аналогично $\bar{S}_n > 4r^2\pi$. Кроме того, как показывает Архимед, $\bar{S}_n : \underline{S}_n$ с ростом n становится как угодно близким к единице. Из всего этого он выводит, что $S = 4\pi r^2$. Этот результат эквивалентен установлению того, что

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 1.$$

То же соотношение (4) Архимед использует для определения площади поверхности сферического сегмента. Его результат эквивалентен интегралу

$$\int_0^{\alpha} \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\alpha.$$

По существу, тот же прием применил Архимед и в работе «Измерение круга». Установив с помощью метода исчерпывания, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один катет которого есть радиус, а другой — длина окружности, Архимед сводит задачу к определению длины окружности, точнее говоря, отношения $C : D$, т. е. числа π. Поскольку в этом случае не удается свести дело к формуле суммирования, Архимед вычисляет периметры p_n и P_n вписанных и описанных многоугольников для $n = 3 \cdot 2^3$, $3 \cdot 2^4$ и $3 \cdot 2^5$. Из неравенств

$$\frac{p_{96}}{D} < \frac{C}{D} < \frac{P_{96}}{D}$$

и получаются его знаменитые приближения

$$3\frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3\frac{1}{7}.$$

Мы могли бы закончить на этом описание интегральных методов Архимеда, если бы в историко-математической литературе не встречалось часто мнение, что эти методы были лишены эвристической силы и годились лишь для обоснования заранее известных результатов. Между тем, как мы видели, методы Архимеда состоят в построении для искомой величины верхних и нижних интегральных сумм и отыскании их общего предела. Поэтому его методы в принципе столь же пригодны для получения новых результатов, как и метод интегральных сумм вообще. И там и здесь необходимым звеном является неалгоритмическая операция предельного перехода (или отыскания верхней и нижней граней), реализация которого зависит от вспомогательных вычислительных средств. В случае, если предел не может быть выражен с помощью известных функций, суммы Римана позволяют вычислить его с любой степенью точности, чем, кстати, и воспользовался Архимед в «Измерении круга».

Как же могла возникнуть подобная точка зрения на методы Архимеда? Поводом для нее послужила найденная в 1906 г. рукопись Архимеда, в которой среди ранее известных сочинений находилось новое, упоминавшееся нами «Послание к Эрастосфену о механических теоремах». В нем Архимед находит и доказывает математические теоремы с помощью принципа рычага, причем пишет: «Кое-что из того, что ранее мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически»[1]. Это «кое-что» включает большое число результатов Архимеда: площадь параболического сегмента, объемы шара, эллипсоида, сегментов шара и параболоида, вращения, центры тяжести этих фигур и тел. Однако, во-первых, здесь содержатся не все результаты Архимеда; во-вторых, и это главное, механический метод ни разу не применяется к проблемам определения поверхностей и длин дуг. Он не был и не мог быть применен также и к определению площади спирали.

В чем же состоит этот метод? Мы разберем это на примере задачи определения объема шара.

Пусть даны шар с радиусом $R = AC$ (рис. 25), конус и цилиндр, основания которых имеют радиус $2R$, а высоты равны $2R$. Пусть MN — след произвольной горизонтальной плоскости. Эта плоскость пересекает цилиндр, шар и конус по кругам с радиусами OM, OK и OL. Из чертежа видно, что

$$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2,$$

[1] *Архимед.* Сочинения, стр. 299.

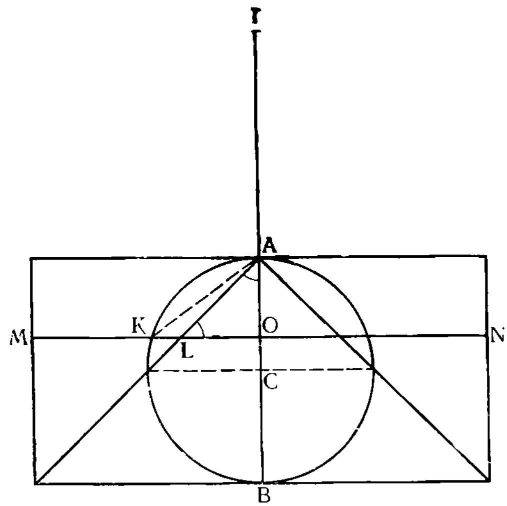


Рис. 25

с другой стороны,

$$AK^2 = AB \cdot OA, \text{ т. е. } AB \cdot OA = OK^2 + OL^2.$$

Умножим обе части последнего равенства на AB:

$$AB^2 \cdot OA = OK^2 \cdot AB + OL^2 \cdot AB,$$

или

$$(\pi \cdot AB)^2 \cdot OA = (\pi \cdot OK^2) \cdot AB + (\pi \cdot OL^2) \cdot AB. \tag{6}$$

Представим теперь, что отрезки AB и $AT = AB$ являются плечами рычага, точка опоры которого совпадает с точкой A. Тогда соотношение (6) показывает, что если перенести круговые сечения шара $\pi \cdot OK^2$ и конуса $\pi \cdot OL^2$ в точку T, то они «уравновесят» по отношению к точке A круговое сечение цилиндра $\pi \cdot AB^2 = \pi \cdot OM^2$, оставленное на своем месте. Архимед замечает, что подобное соотношение устанавливается и для любых других сечений шара, конуса и цилиндра, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. «Если теперь, беря такие круги, заполнить ими как цилиндр, так и шар с конусом, то цилиндр, оставаясь в том же положении, будет относительно точки A находиться в равновесии со вместе взятыми шаром и конусом, если перенести их на рычаг в θ и поместить так, чтобы центр тяжести каждого из них оказался в θ»[1]. Но центр тяжести оставшегося на месте цилиндра находится в точке C — середине отрезка AB. Поэтому, если $V_ц$, $V_ш$ и $V_к$ соответственно объемы цилиндра, шара и конуса, мы получаем, что

$$V_ц \cdot AC = (V_ш + V_к) \cdot AT = (V_ш + V_к) \cdot 2AC,$$

и, следовательно,

$$V_ш = \frac{1}{2} V_ц - V_к;$$

[1] *Архимед.* Сочинения, стр. 303. В переводе И. Н. Веселовского буква T обозначена через θ.

но

$$V_{к} = \frac{1}{3} V_{ц},$$

и потому

$$V_{ш} = \frac{1}{2} V_{ц} - \frac{1}{3} V_{ц} = \frac{1}{6} V_{ц} = \frac{1}{6} \pi (2R)^2 \cdot 2R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Здесь объем шара находится вовсе не путем арифметического суммирования объемов элементарных слоев. Никакого вычисления интегральных сумм не проводится. Отсутствует и отыскание их предела. Таким образом, механический метод нельзя рассматривать как начало интегральных методов. Это не интегрирование, а скорее обход интегрирования. При этом принцип рычага позволяет Архимеду свести определение неизвестных площадей и объемов к известным путем установления некоторых соотношений между элементарными частями известных и неизвестных объемов, т. е. свести вычисление одного интеграла к другому.

Механический метод Архимеда не является единственным примером открытия математических истин с помощью предложений механики и физики. Так, более двух тысячелетий спустя Д. Бернулли (середина XVIII в.) нашел из физических соображений общее решение дифференциального уравнения колебания струны в форме тригонометрического ряда. В середине XIX в. Б. Риман применил положения из теории электричества для установления того, что на каждой замкнутой римановой поверхности существует алгебраическая функция, отличная от постоянной. При окончательном изложении математики стремились исключить все эти физические посылки и вывести искомое предложение, не опираясь на них. Такого рода примеры можно было бы умножить.

Дифференциальные методы Архимеда

В сочинении «О спиралях» Архимед разработал методы определения касательной. Эти методы были применены только в одном случае — для отыскания касательной к спирали $\rho = a\varphi$. Тем не менее они обладают той же степенью общности, что и его интегральные методы, и могут служить для отыскания касательной к любой дифференцируемой кривой.

Спираль, которую мы задаем уравнением $\rho = a\varphi$, Архимед описывает кинематически: прямая OA равномерно вращается вокруг точки O (пусть, для определенности,— против часовой стрелки) и одновременно по ней равномерно движется точка M в направлени от O к A. Эта точка M и опишет спираль.

Архимед показывает, что радиус-векторы спирали относятся, как соответствующие дуги окружности $\rho_1 : \rho_2 = \varphi_1 : \varphi_2$, т. е. $\rho = a\varphi$. Все остальные рассуждения Архимед проводит, пользуясь, по существу, полярными координатами.

Пусть теперь требуется найти касательную в точке P спирали. Для этого Архимед определяет ее «полярную подкасательную» OT, перпендикулярную к OP (рис. 26). Как видно из доказательства, Архимед проводит близкий радиус-вектор OQ и сравнивает треугольник OPT и бесконечно малый треугольник PRF, образованный отрезком радиус-вектора RF, отрезком касательной FP и дугой окружности PR. Эти треугольники прямоугольны ($\angle PRF$ — прямой), а $\angle FPR$ отличается от $\angle PTO = \alpha$ на бес-

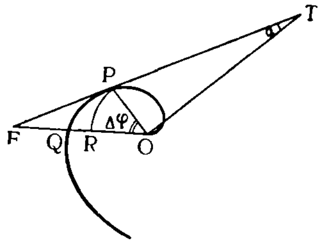


Рис. 26

конечно малую (если $\angle POR = \Delta\varphi$, то $\angle PFR = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \Delta\varphi)$, а $\angle FPR = \alpha + \Delta\varphi$). Предполагая, что оба эти треугольника подобны, можно написать

$$\frac{FR}{\overset{\frown}{RP}} \approx \frac{QR}{\overset{\frown}{RP}} \approx \frac{OP}{OT}, \tag{1}$$

или, в современной символике,

$$\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} \approx \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} \approx \frac{OP}{OT} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{1'}$$

где r — радиус-вектор касательной. Из этих «равенств» получаем

$$OT \approx OP\frac{\rho\Delta\varphi}{\Delta\rho} = \rho^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho},$$

что соответствует нашей формуле $OT = \rho^2\frac{d\varphi}{d\rho}$. Так как для спирали $\rho = a\varphi$, то $\Delta\rho = a\Delta\varphi$ и

$$OT = \rho^2\frac{\Delta\varphi}{a\Delta\varphi} = \rho\varphi.$$

При $\varphi = 2\pi$ $OT = 2\pi\rho$, и, следовательно, подкасательная к спирали может служить для спрямления круга, что и отмечает Архимед.

Чтобы обосновать законность «равенств» (1), Архимед исследует в специальных леммах [1] отношение $\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi}$ и доказывает, что при достаточно малом $\Delta\varphi$ разность $\left|\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} - \operatorname{tg}\alpha\right|$ может быть сделана как угодно малой, или

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{\Delta r}{r\,\Delta\varphi} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Эти исследования носят общий характер и совершенно не зависят от свойств спирали. Оценку разности

$$\left|\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} - \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}\right| \quad \text{или} \quad \left|\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} - \operatorname{tg}\alpha\right|$$

[1] Предложения VI—IX книги «О спиралях».

Архимед делает только для спирали. Он молчаливо находит

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\varphi}$$

и показывает методом от противного, что $\operatorname{tg}\alpha = 1/\varphi$. Последнее доказательство играет ту же роль, что и заключительное рассуждение в методе исчерпывания: оно обеспечивает единственность предела. Это рассуждение должно было повторяться для всякой конкретной кривой заново, так как не было еще выделено ни общих понятий, ни условий, которые позволили бы провести рассуждение раз и навсегда.

К дифференциальным методам Архимеда относится и его метод определения экстремумов. Задачи на определение экстремумов возникли в алгебре древних прежде всего при определении условий разрешимости уравнений. Первая из них встречается в «Началах» Евклида и относится к квадратному уравнению вида

$$x(a - x) = S.$$

Элементарным путем нетрудно установить, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a} x(a - x) = \frac{a^2}{4},$$

и, значит, уравнение имеет действительные положительные решения при $S \leqslant (a/2)^2$.

Вторую, более трудную задачу рассмотрел Архимед. Как уже говорилось, он провел полное исследование условий существования положительных корней кубического уравнения

$$x^2(a - x) = Sc = pbc. \tag{2}$$

Это уравнение может иметь положительные корни, если

$$Sc \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant a} x^2(a - x),$$

так что дело сводится к определению максимума $x^2(a - x)$. Мы говорили также, что корень или корни уравнения (2) строились, как абсциссы точек пересечения кривых

$$y = \frac{x^2}{p} \tag{3}$$

и

$$y = \frac{cb}{a - x}. \tag{4}$$

Кривые (3) и (4) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$ могут иметь либо две точки пересечения (рис. 27), либо одну общую точку, которая тогда является их общей точкой касания (рис. 28), либо не иметь ни одной общей точки. Вывод условий, при которых имеет место каждый из этих случаев, непосредственно связан с отысканием экстремума выражения $x^2(a - x)$.

Архимед утверждает, что этот экстремум достигается при $x = 2a/3$. В тексте нет указаний на то, как это значение было найдено. Однако Архимед доказывает, что при $x = 2a/3$ выражение $x^2(a - x)$ имеет максимум, равный $4a^3/27$. Из этого доказательства и удается извлечь его метод. Действительно, Архимед доказывает, что если при $x = x_1$ кривые (3) и

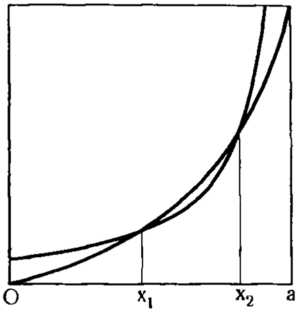


Рис. 27

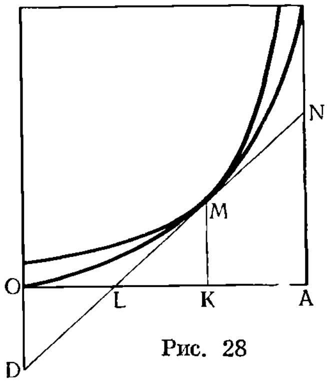


Рис. 28

(4) пересекаются, но не касаются, то в этой точке выражение $x^2(a-x)$ не может иметь экстремума. Значит, необходимым условием является наличие у кривых (3) и (4) точки касания. Тогда (см. рис. 28), поскольку обе кривые имеют одну и ту же касательную, $MN = ML$ (по свойству касательной к гиперболе), и $MK = OD$ (по свойству касательной к параболе), но при этом $LK = KA$ и $OL = LK$, т. е. $OK = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}a$. При этом $\max x^2(a-x) = 4a^3/27$.

Метод Архимеда обладает большой степенью общности и может быть применен к любому выражению вида $f(x)\,g(x)$. Действительно, пусть требуется отыскать экстремум произведения

$$u(x) = f(x)\,g(x).$$

Для нахождения необходимого условия предположим, что экстремум M достигается в точке с абсциссой x_0:

$$u(x_0) = f(x_0)\,g(x_0) = M.$$

Согласно Архимеду, нужно рассмотреть кривые $y_1 = f(x)$ и $y_2 = M/g(x)$. Легко установить, что если при $x = x_1$ кривые пересекаются, то x_1 не может быть точкой экстремума. Значит, в точке экстремума обе кривые должны иметь точку касания, иными словами

$$y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

или

$$f'(x_0) = -\frac{M}{g^2(x_0)}\,g'(x_0),$$

$$f'(x_0)\,g^2(x_0) + Mg'(x_0) = 0.$$

Но $M = f(x_0)\,g(x_0)$, поэтому получаем $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) = 0$, т. е. условия Архимеда при переводе на язык дифференциального исчисления равносильны нашему: необходимым условием экстремума является равенство нулю производной

$$u'(x) = [f(x)\,g(x)]' = 0.$$

Таким образом, Архимед нашел общий метод сведения проблем определения экстремумов к проблемам нахождения касательных.

Мы не знаем, получил ли метод Архимеда применение в древности. Однако известно, что он не умер вместе с ним. Его воскресили и с успехом применили математики XVII в. М. Риччи и Э. Торричелли, причем последний распространил метод на отыскание экстремумов функций вида $u = x^m (a-x)^n$, где $0 \leqslant x \leqslant a$.

Другие математические работы Архимеда

Из других работ Архимеда, относящихся к математике, отметим его «Исчисление песчинок» («Псаммит»), где разработан способ, позволяющий регулярно выражать сколь угодно большие числа посредством специальной системы наименований десятичных разрядов. Числа до мириады (десять тысяч) мириад, т. е. до $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$, именуются первыми; 10^8 принимается за единицу вторых чисел, следующих до $10^{8\cdot 2-1}$; $10^{8\cdot 2}$ — за единицу третьих чисел, следующих до $10^{8\cdot 3-1}$ и т. д. вплоть до мириадо-мириадных чисел от $10^{8\cdot(10^8-1)}$ до $10^{8\cdot 10^8}$ (исключая последнее число). Все эти числа составляют первый период. Аналогично начиная с $10^{8\cdot 10^8}$ строятся первые, вторые и т. д. числа второго порядка, причем конструкция доводится до мириадо-мириадного периода и числа $10^{8\cdot 10^8\cdot 10^8}$, но может быть продолжена и далее. Опровергая мнение людей, которые полагают, что количество песчинок на земле бесконечно или же что его нельзя сосчитать, Архимед показывает, что число песчинок, которое могло бы заполнить сферу, доходящую до неподвижных звезд, не превосходит тысячи мириад единиц восьмых чисел первого периода, т. е. $10^3\cdot 10^4\cdot 10^{8\cdot 7} = 10^{63}$. При этом он полагал, что диаметр такой сферы менее чем в 10 000 раз превосходит диаметр Земли.

Некоторые сочинения Архимеда сохранились только в арабском переводе багдадского ученого IX в. Сабита ибн Корры. К ним относятся «Леммы», «О семиугольнике» и «О касающихся кругах». В «Леммах» среди других задач излагается трисекция угла с помощью вставки, в трактате «О семиугольнике» аналогичным методом решается другая задача, сводимая к кубическому уравнению. В списке сочинений Архимеда, известных арабам, историк Ибн ал-Кифти (XII в.) указывает также сочинение «О параллельных линиях». Возможно, что Архимед был одним из первых ученых, пытавшихся доказать V постулат Евклида.

Архимед и математика Нового времени

Исследования Архимеда относились к таким фундаментальным проблемам, как определение площадей, объемов, поверхностей, центров тяжести, касательных и экстремумов. Для решения этих проблем он создал те основные методы, которые мы употребляем до сих пор: метод верхних и нижних интегральных сумм, характеристический бесконечно малый треугольник для определения касательных и, наконец, метод сведения задач на экстремумы к определению касательных. Дальнейший принципиальный прогресс в этом направлении означал бы создание интегрального и дифференциального исчислений, но для этого не хватало многих условий, а в самой математике — аналитической базы: буквенного исчисления, освоения более широкого класса функций, создания аналитического аппарата для их выражения. Исследования Архимеда не получили развития в древности. Дважды человечество открывало вновь Архимеда, и дважды ученые делали попытки продвинуться дальше по открытому им пути. Первый раз — на арабском Востоке, второй — в Европе XVI — XVII вв. Несмотря на то, что Сабит ибн Корра и ученые его школы, а также Ибн ал-Хайсам овладели методом верхних и нижних интегральных сумм и даже вычислили (выражаясь по-современному) несколько новых интегралов, далеко они не продвинулись. Здесь действовали те же общие и частные причины, что и в древности.

Только после создания буквенной алгебры Виета — Декарта и аналитической геометрии Декарта — Ферма и вместе с успехами физических наук Нового времени стало возможным создание исчисления бесконечно малых. На это ушли силы многих великих умов XVI—XVII вв., начиная от Кеплера и Галилея и кончая Ньютоном и Лейбницем. И все они в той или иной степени отправлялись от работ Архимеда, стараясь обобщить и усилить методы великого ученого. Значение работ Архимеда для нового исчисления лучше всего выразил Лейбниц: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров».

Аполлоний

Третий из великих греческих геометров эпохи эллинизма — Аполлоний родился в Пергах в Малой Азии. Расцвет его деятельности падает примерно на 210 г. до н. э. В это время он жил в Александрии, куда приехал еще юношей и где учился под руководством математиков школы Евклида. Аполлоний прославился как геометр и астроном. Умер он около 170 г. до н. э.

Творчество Аполлония богато новыми красивыми идеями. Мы уже говорили, что ему принадлежит мысль ввести эпициклы и эксцентрические окружности для того, чтобы представить видимое движение Солнца и планет.

В математике Аполлоний более всего известен своими «Коническими сечениями», в которых он дал полное изложение теории, причем развил и аналитические и проективные методы. Об этом великом произведении мы будем говорить специально, а сейчас отметим остальные его работы, о которых мы знаем из сообщений Паппа и других позднейших ученых. Аполлоний написал трактат «О вставках», посвященный классификации задач, которые решаются с помощью вставок. Мы уже говорили, что такие задачи могут оказаться разрешимыми циркулем и линейкой (древние называли их плоскими), с помощью конических сечений (телесные задачи) и, наконец, с помощью других кривых (линейные). Выявление того, к какому классу относится та или иная задача, могло означать начало их алгебраической классификации, однако мы не знаем, что именно сделал Аполлоний. Интерес Аполлония к алгебраическим проблемам проявился и в другой его работе — «О неупорядоченных иррациональностях», в которой он, по сообщению Прокла, продолжил классификацию Евклида. Мы можем только гадать, ограничился ли Аполлоний квадратичными иррациональностями или начал классификацию кубических иррациональностей. И то и другое представляло большой интерес.

Из чисто геометрических работ Аполлония отметим «О спиральных линиях», в которой он рассматривает спирали на поверхности цилиндра, «О касании», где разбирается знаменитая задача Аполлония: даны три вещи, каждая из которых может быть точкой, прямой или окружностью; требуется провести окружность, которая проходила бы через каждую из данных точек и касалась бы каждой из данных прямых или окружностей.

Папп приводит некоторые теоремы из сочинений «О плоских геометрических местах», на основании которых можно заключить, что Аполлоний рассмотрел преобразования плоскости в себя, которые переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Частными случаями этих преобразований являются преобразования подобия и инверсии относительно некоторой точки.

Мы не будем приводить названия еще нескольких утраченных трудов Аполлония.

«Конические сечения» Аполлония

«Конические сечения» состоят из восьми книг. Первые четыре, в которых, по словам автора, излагаются элементы теории, дошли до нас по-гречески, следующие три — в арабском переводе Сабита ибн Корры, последняя — восьмая — книга утеряна. Имеется реконструкция ее текста, принадлежащая английскому астроному Э. Галлею (XVIII в.).

Эти книги настолько богаты содержанием, что нет возможности дать о них сколько-нибудь полное представление. Желающих ознакомиться с ними мы можем отослать либо к самому оригиналу, либо к указанной в библиографии книге Г. Цейтена, посвященной учению о конических сечениях в древности.

Мы здесь остановимся лишь на вопросе о новой трактовке конических сечений у Аполлония, близкой к точке зрения современной аналитической геометрии.

Мы уже говорили, что кривые второго порядка были впервые рассмотрены в связи с задачей удвоения куба и что Менехм представил их как плоские сечения прямоугольного, тупоугольного и остроугольного конусов вращения. Такое стереометрическое представление гарантировало существование и непрерывность рассматриваемых кривых. Затем Менехм переходил к выводу основного планиметрического свойства сечения, которое древние называли *симптомом*, а мы — уравнением кривой. Вот как это делалось для сечения прямоугольного конуса вращения.

Пусть OAB — сечение этого конуса плоскостью, проходящей через ось OL, и пусть PLK — след плоскости, перпендикулярной к образующей этого конуса (рис. 29). Тогда $KM^2 = AK \cdot KB$, так как AMB — полукруг. Но $AK = PP' = \sqrt{2LP^2}$, а $KB = \sqrt{2KP^2}$, поэтому

$$KM^2 = 2LP \cdot KP.$$

Обозначим KM через y, KP — через x, а LP — через p, тогда получим

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Это и есть уравнение, или *симптом*, кривой, которое мы записываем с помощью буквенной символики, а древние записывали в словесно-геометрической форме: квадрат на полухорде KM в каждой точке равен пря-

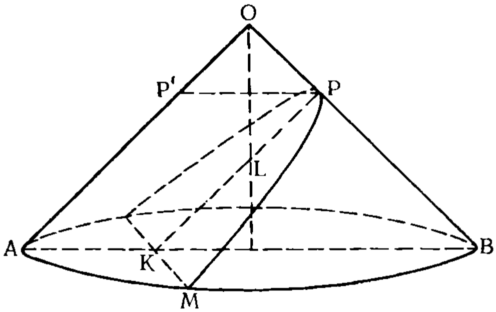


Рис. 29

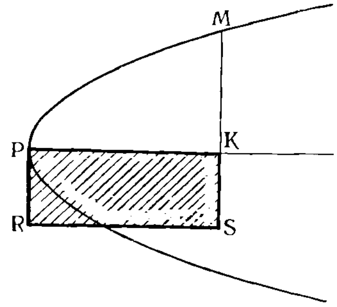


Рис. 30

моугольнику $PKSR$, построенному на отрезке PK оси до вершины (x) и на постоянном отрезке PR (рис. 30).

Аналогично выводились уравнения для сечений остроугольного и тупоугольного конусов, т. е. эллипса (рис. 31) и гиперболы (рис. 32):

$$\frac{y^2}{x(2a-x)} = \frac{p}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{x(2a+x)} = \frac{p}{a}, \tag{2}$$

где $2a$ — большая ось эллипса или действительная ось гиперболы, а p — постоянная.

В случае, когда $p = a$, уравнения (2) принимают вид

$$y^2 = x(2a-x) \quad \text{и} \quad y^2 = x(2a+x), \tag{3}$$

первое из которых является уравнением окружности радиуса a, а второе — уравнением равносторонней гиперболы. Эллипс и гипербола (2) могут быть получены из окружности и гиперболы (3) сжатием к оси абсцисс в отношении $\sqrt{p/a}$.

Аполлоний прежде всего дает более общее определение. Во-первых, он берет произвольный круговой конус; во-вторых, рассматривает обе его полости (что дает ему возможность изучить обе ветви гиперболы); наконец, он проводит сечения плоскостью расположенной под любым углом к образующей.

Если перейти на привычный нам язык аналитической геометрии, то можно сказать, что до Аполлония конические сечения рассматривались по отношению к прямоугольной системе координат, причем одна из осей совпадала с главным диаметром, а вторая проходила перпендикулярно к ней через вершину кривой; Аполлоний же относил кривые к любому диаметру и касательной, проведенной в одном из его концов, т. е. к некоторой косоугольной системе координат.

После стереометрического определения Аполлоний также дает вывод симптомов — уравнений кривых. При этом он классифицирует полученные кривые по виду определяющего их уравнения, т. е. в основу кладется точка зрения, свойственная аналитической геометрии.

Посмотрим, как он выводит в предложении I, 11 соответствующее уравнение для параболы. Пусть BAC — сечение кругового конуса плоскостью, проходящей через ось (рис. 33), и пусть проведена плоскостью GHD так, что DE перпендикулярна BC, а GH параллельна AB (GH мож-

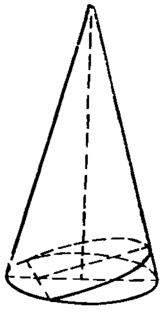


Рис. 31

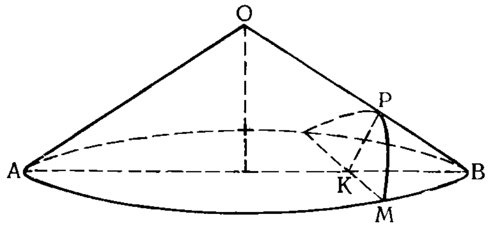


Рис. 32

но было выбрать параллельной AC). Найдем уравнение кривой DGE, полученной в сечении.

Пусть K — произвольная точка этой кривой. Проведем KL параллельно DE и MN параллельно BC. Плоскость, проходящая через KL и MN, будет параллельна плоскости основания и, как это ранее доказал Аполлоний, будет пересекать конус по кругу. Поэтому

$$KL^2 = ML \cdot LN.$$

Но

$$\frac{ML}{GL} = \frac{BC}{AB}, \qquad \text{т. е.} \quad ML = GL \cdot \frac{BC}{AB},$$

$$\frac{LN}{GA} = \frac{GN'}{GA} = \frac{BC}{AC}, \quad \text{т. е.} \quad LN = GA \cdot \frac{BC}{AC}.$$

Значит,

$$KL^2 = GA \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot GL.$$

отрезок GL есть переменное расстояние проекции точки L от вершины, члены $GA \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}$ постоянны. Аполлоний выбирает такой отрезок GF, что

$$\frac{GF}{GA} = \frac{BC^2}{AB \cdot AC}.$$

Тогда $KL^2 = GF \cdot LG$. Это и есть симптом — уравнение сечения.

Если обозначить $KL = y$, $LG = x$, $GF = 2p$, то мы получим уравнение в привычной форме:

$$y^2 = 2px.$$

У Аполлония уравнение записывается также словесно-геометрически: если GH — один из диаметров параболы, а KL — полухорда, сопряженная с этим диаметром, то Аполлоний откладывает $GR = 2p$ перпендикулярно к GH. Тогда утверждается, что в каждой точке квадрат, построенный на LK (рис. 34), должен равняться прямоугольнику $GRSL$, т. е. $GL \cdot GR$.

Наше название этой кривой «парабола» происходит от названия Аполлония παραβολή (приложение), так как задача о построении точки этой

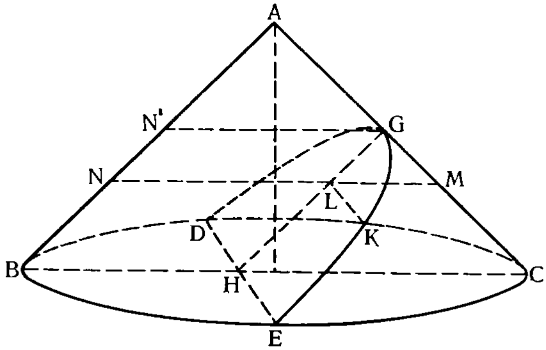


Рис. 33

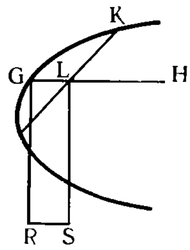


Рис. 34

кривой сводится к задаче о приложении (до Аполлония параболу называли сечением прямоугольного конуса).

Аналогично Аполлоний получает уравнения эллипса и гиперболы. Так, для эллипса доказывается, что $LK^2 =$ пл. $GLL'G'$ (рис. 35), где $GH = 2a$ — некоторый диаметр эллипса, LK — полухорда, сопряженная с ним, $GR = 2p$ — постоянная, причем GR перпендикулярна GH. Чтобы перейти к более привычной для нас форме записи, заметим, что

$$LL' = LH \cdot \frac{GR}{GH} = (2a - x)\frac{p}{a},$$

т. е.

$$LK^2 = y^2 = \frac{p}{a}x(2a - x),$$

или

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Таким образом, задача о построении точек эллипса сводится к задаче о приложении с недостатком («эллиптическая задача»), чем и объясняется название «эллипс» (ἔλλειψις — недостаток). Это название было введено Аполлонием, до него эллипс называли сечением остроугольного конуса.

Аналогично для гиперболы (рис. 36) получается уравнение

$$LK^2 = \text{пл. } GLL'G', \text{ т. е. } y^2 = \frac{p}{a}x(2a + x), \quad \text{или} \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Следовательно, задача о построении точек гиперболы сводится к задаче о приложении с избытком («гиперболическая задача»), чем и объясняется название «гипербола» (ὑπερβολή — избыток). Это название также было введено Аполлонием, до него гиперболу называли сечением тупоугольного конуса.

Постоянный отрезок $GR = 2p$, откладываемый перпендикулярно к диаметру GH, Аполлоний назвал «прямой стороной». В настоящее время величину p именуют параметром конического сечения (в случае эллипса и гиперболы с полуосями a и b $p = b^2/a$, и коэффициент сжатия $\sqrt{p/a}$, пре-

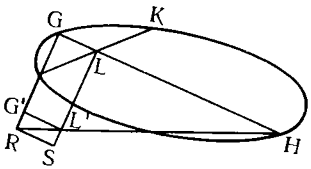


Рис. 35

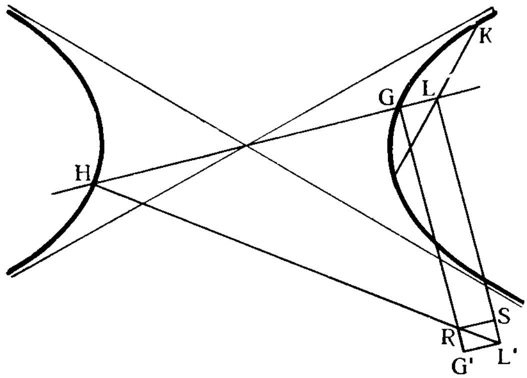


Рис. 36

образующего окружность или равностороннюю гиперболу в данный эллипс или гиперболу, равен b/a.

Итак, классификация конических сечений у Аполлония была, по существу, алгебраической.

Аполлоний прекрасно понимал (и это сближает его с геометрами Нового времени), что такая классификация законна только в том случае, если вид уравнения не изменяется при отнесении кривой к другому ее диаметру и сопряженным с ним хордам,

В I книге он исследует данный вопрос. Для этого необходимо было определить направление хорд, сопряженных с любым диаметром. При стереометрическом определении сопряженные направления получаются автоматически. Однако для решения задачи, поставленной Аполлонием, нужно определение, независимое от стереометрии. Аполлоний и делает это: он доказывает, что прямая, проведенная через точку A конического сечения параллельно направлению хорд, сопряженных с диаметром, проходящим через A, есть касательная (предложения I, 17 и I, 32). После этого он строит касательную к параболе (I, 33), эллипсу, кругу и гиперболе (I, 34).

Пусть P — некоторая точка на параболе и AA' — один из диаметров (рис. 37). Аполлоний доказывает, что касательная PR отсечет от продолжения диаметра отрезок $AR = AQ$, если PL — хорда, сопряженная с AA'. Для гиперболы, эллипса и круга он получает соотношение

$$RA : RA' = QA : QA'$$

(на рис. 38 изображен случай эллипса). Впоследствии такое расположение четверки точек получило название гармонического.

Аполлоний преобразует затем уравнение эллипса и гиперболы так, что начало координат оказывается в центре кривой (предложение I, 41), а уравнение параболы так, что начало координат совмещается с вершиной этой кривой (предложение I, 42).

Таким образом, здесь осями координат служат два сопряженных диаметра. После этого он показывает, что вид уравнения не изменится, если

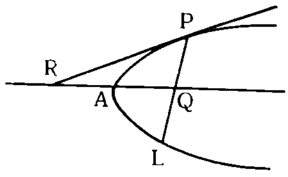


Рис. 37

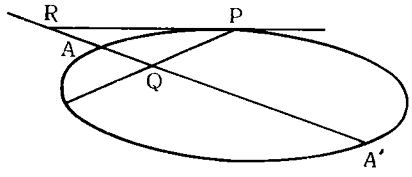


Рис. 38

в качестве новых осей координат взять любой из диаметров кривой и касательную, проведенную в одном из его концов (предложение I, 49—50). При этом, например, уравнение эллипса $y^2 = \frac{p}{a} x(2a - x)$ перейдет в уравнение $y'^2 = \frac{p'}{a'}(2a' - x')$, где $2a'$—длина нового диаметра, а p' определяется из условия

$$\frac{p'}{B'D} = \frac{B'I}{B'D'}.$$

Здесь I — точка пересечения касательных в точках B и B', а D и D' — точки пересечения диаметров AB и $A'B'$ с касательными в точках B' и B (рис. 39).

Итак, в I книге Аполлоний рассматривает множество систем координат, зависящее от одного параметра, так как эти системы координат вполне определяются одной точкой кривой — концом диаметра, и доказывает инвариантность уравнений эллипса, гиперболы и параболы относительно преобразований соответствующих систем координат.

В конце I книги Аполлоний показывает, что можно выбрать диаметр, который будет перпендикулярен к сопряженным с ним хордам. Тогда рассматриваемую кривую можно представить как сечение либо тупоугольного, либо остроугольного, либо прямоугольного конусов вращения плоскостью, перпендикулярной к образующей. Этим устанавливается тождество кривых, введенных Аполлонием, с коническими сечениями, которые рассматривались до него.

Мы видим, что I книга построена по строго продуманному плану. Основная идея ее состоит в том, чтобы за основу классификации кривых принять свойства их алгебраических уравнений, и именно те, которые остаются инвариантными при допустимых преобразованиях координат. Только в XIX в. эта мысль была понята до конца, когда Клейн в «Эрлангенской программе» установил новый взгляд на геометрию, как на науку об инвариантах определенных групп преобразований плоскости или пространства.

В последующих трех книгах Аполлоний развивает теорию конических сечений: выясняет основные свойства сопряженных диаметров и асимптот, получает уравнение гиперболы относительно асимптот ($xy = \text{const}$) и устанавливает основные свойства фокусов эллипса и гиперболы. Здесь же впервые появляются полюсы и поляры относительно конических сечений: если из точки можно провести две касательные к коническому сечению, то прямая, соединяющая точки касания, называется полярой данной точки, а точка — полюсом этой прямой; если передвигать полюс по прямой, пересекающей сечение, то поляра будет вращаться вокруг по-

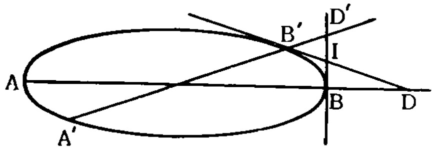


Рис. 39

люса этой прямой, если же передвигать полюс по прямой, не пересекающей сечение, то поляра также будет вращаться вокруг некоторой точки, причем в этом случае точку, вокруг которой вращается поляра, и прямую, по которой движется полюс, также называют полюсом и полярой. Наконец, в IV книге Аполлоний рассматривает вопрос о числе точек пересечения двух конических сечений и показывает, что это число не может быть больше четырех и что если одна из общих точек есть точка касания, то кривые могут иметь, помимо нее, не более двух общих точек. Здесь Аполлоний рассмотрел обе ветви гиперболы, как единую кривую, без чего эти теоремы были бы неверны.

Упомянем еще некоторые теоремы III книги, которая даже среди других книг «Конических сечений» выделяется глубиной идей. Так называемые теоремы о площадях (III, 1—15) служат для отнесения конического сечения к двум произвольным диаметрам, не обязательно сопряженным. Таким образом, здесь Аполлоний рассматривает множество систем координат, зависящее не от одного, а от двух параметров.

В этом случае системы координат вполне определяются двумя точками кривой — концами диаметров. Такая система координат представляет собой произвольную систему косоугольных координат с началом в центре кривой.

В V книге Аполлоний определяет все нормали к коническому сечению (перпендикуляры к касательной, восстановленные в точке касания), которые можно провести из заданной точки, тщательно анализирует, сколько решений имеет задача, исследует экстремальные свойства этих нормалей. В VI книге изучаются подобные конические сечения.

В VII книге содержатся знаменитые теоремы Аполлония: а) сумма квадратов на сопряженных диаметрах эллипса равна сумме квадратов на главных осях (предложение VII, 12); б) разность квадратов на двух сопряженных диаметрах гиперболы равна разности квадратов на главных осях (предложение VII, 13); в) параллелограмм, построенный на двух сопряженных диаметрах эллипса или гиперболы, имеет постоянную площадь (предложение VII, 31). В этих теоремах Аполлоний находит инварианты относительно преобразований систем координат, рассматриваемых им в I книге.

У древних был и аналог нашего понятия «кривая второго порядка». Это было геометрическое место к трем и четырем прямым. Пусть даны три или четыре прямые, и пусть x, y, z, u — расстояния точки M от них (по отрезкам, проводимым под определенными углами). Требуется найти такое геометрическое место, что

$$xz = kyu,$$

или для трех прямых:

$$xz = ky^2.$$

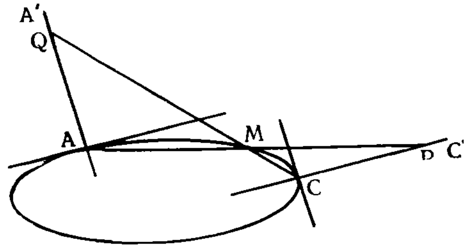


Рис. 40

По словам Аполлония, эту задачу исследовал уже Евклид, но предложенное им решение было неполно, «так как невозможно было довести до конца, построение без моих дополнительных открытий» [1]. Г. Цейтен выяснил, что, опираясь на теоремы III книги Аполлония, действительно можно полностью решить эту проблему, т. е. показать, что искомым местом будут конические сечения, причем любое коническое сечение может быть получено как геометрическое место к трем (или четырем) прямым.

В XVII в. исследование геометрического места к трем и четырем прямым явилось у Декарта первым примером применения в геометрии новой алгебры.

В своих книгах Аполлоний развивает не только методы аналитической, но и проективной геометрии, изучающей те свойства фигур, которые не изменяются при центральном проектировании. Очевидно, что при таком проектировании прямые переходят в прямые, хотя, в отличие от параллельного проектирования, параллельность прямых уже не сохраняется. Можно показать, что если после ряда проектирований прямая преобразовалась в себя, то точки M этой прямой с абсциссами x при этом перейдут в точки M' с абсциссами

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0). \tag{4}$$

Поэтому преобразование (4) прямой в себя называется проективным преобразованием прямой, а отображение одной прямой на другую, при котором точка M одной прямой с абсциссой x (при произвольном начале) переходит в точку M' другой прямой с абсциссой (4) (также с произвольным началом), называется проективным отображением. Проективное отображение прямых позволяет определить проективное отображение двух пучков прямых, при котором прямая OM пучка с центром O переходит в прямую $O'M'$ пучка с центром O'. Предложения III, 53—56 «Конических сечений» устанавливают: если центры двух пучков лежат в некоторых точках A и C конического сечения (рис. 40), то точки M сечения характеризуются тем, что прямые AM и CM отсекают от прямых AA' и CC', проведенных через точки A и C параллельно касательным к сечению соответ-

[1] *Apollonius de Perge.* Les coniques, trad. P. Ver Eecke. Bruges, 1923, p. 2—3 (письмо Аполлония к Евдему).

ственно в C и M, такие отрезки AQ и CP, что прямоугольник, построенный на этих отрезках, имеет постоянную площадь:

$$AQ \cdot CP = \text{const}.$$

Это соотношение показывает, что преобразование, переводящее прямую AA' в прямую CC', имеет вид $x' = k/x$, т. е. является частным случаем преобразования проективного отображения (4). Поэтому отображение пучков с центрами A и C, при которых соответственные прямые пучков пересекают прямые AA' и CC' в соответственных точках, также проективные, и мы получили частный случай известной теоремы проективной геометрии о том, что геометрическое место точек двух пучков прямых, связанных проективным отображением, вместе с центрами этих пучков является коническим сечением (в общем виде эта теорема была доказана Я. Штейнером в XIX в.).

Теория полюсов и поляр также носит, по существу, проективный характер.

В древности методы исследования кривых, созданные Аполлонием, не получили развития, хотя вплоть до начала V в. н. э. его труды изучались и комментировались. Что касается самих конических сечений, то они были применены еще Архимедом для решения и исследования кубического уравнения. Для тех же целей применяли конические сечения позднейшие античные геометры и ученые стран ислама.

В математическом естествознании конические сечения долгое время не получали никакого применения, если не считать изучения отражения света от параболических зеркал. Только в XVII в. наступило возрождение идей Аполлония: Ферма и Декарт перевели его методы на язык новой алгебры, основав аналитическую геометрию, а Ньютон, применил эти методы для описания и исследования кривых третьего порядка. Но еще раньше теория конических сечений получила самое широкое применение в механике земных и небесных тел: Кеплер установил, что планеты нашей солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце; Галилей показал, что брошенный камень (или снаряд) летит в пустоте по параболе. Наконец, в 80-х годах XVII в. Ньютон создал свои «Математические начала натуральной философии», непосредственно опираясь на труды Аполлония.

Конические сечения Аполлония являются, таким образом, примером математической теории, созданной задолго до того, как она оказалась необходимой в математическом естествознании. Она была создана «впрок» и долгое время представлялась весьма отвлеченной ветвью математики, далекой от каких бы то ни было приложений. По этому поводу А. Эйнштейн писал: «К восхищению перед этим замечательным человеком (речь идет о Кеплере. — *И. Б.*) добавляется еще одно чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением» [1].

Математика и теперь готовит идеи и методы «впрок». Так, аппарат для теории относительности Эйнштейна (1905—1916) был создан Гауссом (1827)

[1] *А. Эйнштейн.* Физика и реальность, стр. 108—109.

и Риманом (1854), теория групп, получившая столь широкое применение в квантовой механике, возникла задолго до появления идей этой науки. Эти примеры можно было бы и умножить. Но наиболее ярким и поразительным из них является теория конических сечений Аполлония.

Эпигоны

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался спад. Отдельные исследования ближайших двух веков не выходили из круга проблем, которые были намечены тремя великими геометрами. Обычно говорят, что эти исследования имели эпигонский характер. И действительно, мы не встречаем там ни новых глубоких идей, ни тем более основания новых теорий. Это, скорее, доделки и поправки старого.

Остановимся вкратце на некоторых результатах этого времени.

Ко второй половине II в. н. э. относится творчество Диокла. Мы уже упоминали, что Диокл предложил свое решение задачи Архимеда о делении шара в заданном отношении. Это решение в противоположность архимедову, которое было в то время утеряно, не содержало ни обобщения, ни анализа задачи.

Другое исследование Диокла примыкает к работе старшего современника Аполлония — Никомеда, который ввел и изучил новую алгебраическую кривую — конхоиду. Согласно Паппу, конхоида определялась так. Пусть дана точка O, прямая AB и отрезок b (рис. 41). Конхоида есть геометрическое место точек M, лежащих на лучах, исходящих из O и таких, что $MN = a$, где N — точка пересечения луча с прямой AB.

В полярных координатах уравнение этой кривой имеет вид

$$\rho = a + \frac{b}{\cos\varphi},$$

где b — расстояние точки O от прямой AB. В декартовых координатах — это кривая четвертого порядка. Никомед показал, что прямая AB является асимптотой конхоиды. Он применил эту кривую к трисекции угла и удвоению куба.

Диокл ввел и изучил другую алгебраическую кривую — циссоиду, с помощью которой можно определить две средние пропорциональные между двумя заданными величинами. Это кривая третьего порядка.

Между III в. до н. э. и началом нашей эры жил Зенодор, автор трактата «Об изопериметрических фигурах», дошедшего до нас в изложении Теона Александрийского и Паппа. Еще Архимед в последнем предложении II книги «О шаре и цилиндре» показал, что из всех шаровых сегментов, имеющих одинаковую поверхность, наибольшим является полушар. Зенодор решает аналогичную задачу на плоскости. Он показывает, что из всех фигур с одинаковыми периметрами наибольшая — круг. При этом в качестве «фигур» рассматриваются только многоугольники и круги.

Зенодор утверждает также, что из всех тел с одинаковой поверхностью наибольший объем имеет шар. Однако он показывает только, что: 1) тело вращения правильного многоугольника с четным числом сторон вокруг наибольшей из диагоналей будет меньше по объему, чем шар той же поверхности; 2) каждый из правильных многогранников меньше по объему шара, равной с ним поверхности.

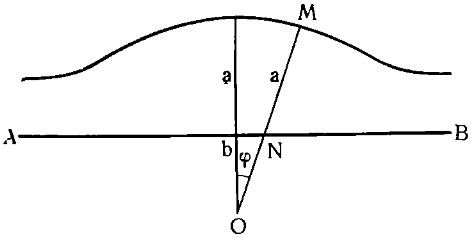


Рис. 41

Упомянем еще Гипсикла (II в. до н.э.) — автора XIV книги «Начал». Известно также, что он писал о многоугольных числах и гармонии сфер.

Римские завоевания

В I в. до н.э. и такие исследования прекращаются. Причины этого нетрудно понять. Уже с конца III в. до н. э. начинаются тяжелые разрушительные войны: создается будущая Римская империя.

В 212 г. до н. э. под натиском Рима пали Сиракузы. В 146 г. до н. э. римляне завоевали всю материковую Грецию: страна была превращена в пустыню, от Коринфа и других цветущих городов ее остались одни развалины. В это же время был разрушен Карфаген. В 133 г. до н. э.к Риму было присоединено Пергамское царство, и господство римлян распространилось на Малую Азию. Эллинистические государства одно за другим теряют политическую независимость и становятся провинциями Рима.

В конце II в. до н. э. начинаются гражданские войны в Риме, ареной которых становятся эллинистические страны. Это было новое тяжелое кровопускание. Вновь нужно было платить непосильные налоги (иногда их собирали за несколько лет вперед), содержать солдат, доставлять провиант, морские суда и людей для армии. Непокорные города сметались с лица земли. Необычайная жестокость римских вождей, не щадивших ни женщин, ни детей, подавляла эллинов. Но на их глазах гибли не только сограждане — уничтожались культурные ценности, которые накоплялись веками и перед которыми привыкли преклоняться эллины.

В 86 г. до н. э. войска Суллы после осады, длившейся несколько месяцев, взяли Афины. Город на три дня был отдан на разграбление солдатам. Сулла хотел полностью разрушить его, и только когда к нему пришла делегация афинян, напомнившая ему о былом величии Афин, он передумал, сказав: «Дарую жизнь живым ради мертвых».

В 31 г. до н. э. войска Цезаря взяли Александрию. При этом впервые сгорела часть ее знаменитой библиотеки, которая потом горела несколько раз.

Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замерла. Рынки опустели. Пластические искусства и художественные ремесла пришли в упадок. Творческая мысль эллинов больше не оказывала благотворного влияния на народы Востока. Наоборот, в это время возрождаются мистические культы Востока, люди стремятся уйти от реальной жизни, в которой они видели только горе и страдание, их начинают привлекать различные религиозные учения с их обещанием другой, лучшей жизни.

Не удивительно, что в это время абстрактные вопросы математики мало волновали умы людей. Только в начале нашей эры, когда в Риме была установлена империя и экономическое положение стало более устойчивым, греческая наука вновь начинает оживать.

В первые века нашей эры Александрия остается научным и культурным центром древнего мира. Рим не мог сравняться с ней в этом отношении. По существу, он так и не приобщился к глубинам эллинской мысли.

Уже в I в. н. э. в Александрии можно назвать двух выдающихся математиков — Герона и Менелая.

Герон Александрийский

Талантливый инженер и изобретатель, Герон Александрийский одним из первых воспользовался движущей силой пара, сконструировал различные пневматические машины и автоматы. Он оставил нам также описание некоторых измерительных инструментов, как-то: водяных часов и диоптры. Наряду с этим Герон занимался и математикой. Известно, что он преподавал в Мусейоне и оставил комментарии к «Началам» Евклида. Однако интересы его в математике лежали в другой плоскости,— это видно из его «Метрики», в которой он собрал различные формулы, служащие для измерения фигур. Здесь содержится и «формула Герона» для определения площади треугольника по трем его сторонам, которая, согласно арабским источникам, впервые была получена Архимедом. «Метрика» написана кратко и ясно. Если в ней приводятся доказательства, то они точны.

Но Герона интересуют не только логически непогрешимые построения и точные формулы. Он приводит в своей книге и приближенные правила. Так, для извлечения квадратного корня Герон применяет правило, известное еще в древнем Вавилоне:

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right),$$

где a — наибольший целый квадрат, меньший N.

Позднее Теон Смирнский в первой половине II в. н. э. описал очень интересный алгоритм для получения сколь угодно точных приближений для $\sqrt{N}$. Он состоит в следующем: если y_0/x_0 — первое приближение для $\sqrt{N}$, то последующие приближения получаются по формулам

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1},$$
$$y_n = y_{n-1} + Nx_{n-1}.$$

Этот процесс быстро сходится. По-видимому, он был известен еще древним пифагорейцам.

У Герона встречается и извлечение кубического корня. Эти и многие другие правила он излагает догматически, поясняя их числовыми примерами. Отметим, что рациональные числа получают у него полное равноправие с целыми.

Менелай Александрийский

В конце I в. н. э. жил Менелай Александрийский, все творчество которого было неразрывно связано с астрономией (а может быть, и астрологией). Известно, что в 98 г. он проводил астрономические наблюдения в

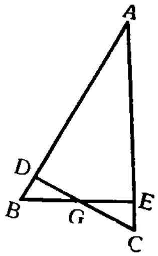


Рис. 42

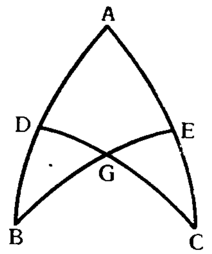


Рис. 43

Риме и составил книгу о вычислении хорд, ныне утерянную. В арабском переводе Сабита ибн Корры до нас дошла «Сферика» Менелая. Видимо, в «Сферике» подводился итог всему предшествующему развитию сферической геометрии, начало изучения которой положил еще Евдокс. «Сферика» состоит из трех книг. В двух первых систематически излагается сферическая геометрия — первая система геометрии, отличная от евклидовой. Стиль изложения тот же, что и в «Началах». Менелай доказывает основные свойства сферических треугольников, исследует случаи их равенства, показывает, что сумма углов сферического треугольника всегда больше $2d$.

Третья книга посвящена сферической тригонометрии. Она начинается со знаменитой теоремы Менелая о трансверсалях (рис. 42). Пусть AB и AC — прямые на плоскости и на них взяты произвольные точки E и D, и пусть CD и BE пересекаются в G. Тогда, в современных обозначениях

$$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CG}{DG}\cdot\frac{DB}{AB}=1$$

(сам Менелай формулировал это соотношение с помощью понятия составного отношения: первое отношение составлено из отношений обратных второму и третьему). Это соотношение посредством проектирования из центра Менелай переводит на сферу и получает соответствующее соотношение для хорд (рис. 43), которое в современных обозначениях имеет вид

$$\frac{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{AE}}{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{CE}}\cdot\frac{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{CG}}{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{DG}}\cdot\frac{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{DB}}{\text{хорда}\,2\,\overset{\frown}{AB}}=1.$$

Из полученной теоремы Менелай, а позднее Птолемей получают нужные им формулы сферической тригонометрии.

Клавдий Птолемей

В середине II в. н. э. в Александрии работает знаменитый астроном Клавдий Птолемей (ум. ок. 170). Основной труд Птолемея «Математическое построение» известен под арабизированным названием «Алмагест» (от греческого слова μεγιστη — величайшая — одного из эпитетов этого труда). В книге Птолемея подробно изложена теория видимого движения Солнца, Луны и планет, основанная на эпициклах и эксцентрических кругах, приведен список более тысячи звезд с указанием их эклиптических

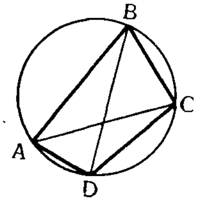


Рис. 44

координат и яркости. В «Алмагесте» греческая наука органически слита с достижениями вавилонских астрономов: Птолемей часто приводит результаты наблюдений вавилонян, которые относились к VIII—VII вв. до н. э. У вавилонян Птолемей заимствует деление круга на 360 градусов и шестидесятиричное деление градуса на минуты, секунды, терции и т. д. Он применял также шестидесятиричные дроби, которые записывал с помощью греческой десятичной буквенной нумерации; он ввел знак для пропущенного разряда в виде буквы $\underline{\bar{o}}$. Роль наших синусов у Птолемея играли хорды(хорда, стягивающая угол, равна удвоенной линии синуса половины данного угла). Птолемей приводит таблицу хорд, вычисленную через $\frac{1°}{2}$. Приведем начало этой таблицы:

Дуги	Хорды	Дуги	Хорды
$^1/_2$	0;31,25	3	3; 8,28
1	1; 2,50	$3^1/_2$	3;39,52
$1^1/_2$	1;34,15	4	4;11,16
2	2; 5,40	$4^1/_2$	4;42,40
$2^1/_2$	2;37, 4	5	5;14, 4

Астрономическая система Птолемея просуществовала века, и только в XVI в. Коперник заложил основы гелиоцентрической модели солнечной системы.

Для вычисления таблицы хорд Птолемей применил теорему о вписанном четырехугольнике (так называемую теорему Птолемея): если четырехугольник вписан в круг, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, т. е. $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ (рис. 44). Этой теоремой, которая была известна еще Архимеду, Птолемей воспользовался для вывода соотношения, равносильного формуле $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, которую нетрудно получить из теоремы Птолемея, если принять, что AC проходит через центр, $\angle BAC = \alpha$ и $\angle CAD = \beta$.

Для характеристики математики того времени интересны не только исследования Птолемея, связанные с астрономией, но и его работы по географии. Землю он считал шаром. В своей «Географии» он рассматривает проекцию сферы из полюса на плоскость экватора, т. е. применяет стереографическую проекцию. Птолемей доказывает, что при этой проекции углы между линиями не меняются, фигуры остаются подобными в малом. Эту же проекцию он рассматривает и в «Планисферии», и «Аналемме». Птолемей исследует и другие виды проекций.

Мы видим, что в I—II вв. н. э. наступило оживление математической мысли. Появились крупные исследования, которые не были продолжением работ классического периода. Это *новые* направления в математике, причем интерес ученых начинают привлекать не только общие теоремы, но и приложения их, особенно создание вычислительного аппарата, в частности плоской и сферической тригонометрии.

Алгебра Диофанта

Новый взлет античной математики достиг кульминации в середине III в. н. э. Это было время, когда жил и работал Диофант — один из величайших математиков древности.

Появление Диофанта составляет до сих пор одну из самых темных загадок истории науки. Труды Диофанта представляют полную неожиданность и по постановке задач, и по методам их решения, и по алгебраической трактовке величин и действий над ними.

О жизни Диофанта нам ничего не известно. Согласно Пселлу, ученый Анатолий Александрийский, который в 270 г. стал епископом Лаодакии, посвятил Диофанту одно из своих исследований. Поэтому полагают, что расцвет творчества Диофанта падает на середину III в. н. э. Кроме того, до нас дошло стихотворение-задача, из которого видно, что Диофант прожил 84 года. Вот его содержание: «Детство Диофанта продолжалось шестую часть его жизни; спустя еще одну двенадцатую у него начала расти борода, он женился спустя еще одну седьмую , через пять лет у него родился сын; сын прожил половину жизни отца, и отец умер через четыре года после смерти горько оплакиваемого им сына».

Свое основное произведение «Арифметика» Диофант посвятил Дионисию — вероятно, епископу Александрии. Книга должна была служить основой для преподавания. До нас дошло шесть первых книг «Арифметики» из тринадцати.

Уже первая книга «Арифметики» опровергает встречающееся иногда мнение, что числовая алгебра после вавилонян была впервые воскрешена лишь в странах ислама, а затем подхвачена европейцами. На самом деле алгебру вновь начали строить не на базе геометрии, а опираясь на арифметику еще в эллинистическую и римскую эпохи. Числовые квадратные уравнения решал Герон. Высшего расцвета античная алгебра достигла у Диофанта. Вряд ли можно сомневаться, что у него были предшественники, как они имелись у Евклида, Архимеда, Аполлония. Однако мы ничего не знаем ни о людях, ни о трудах, на которые мог опираться этот замечательный алгебраист.

У Диофанта мы находим отнюдь не простой возврат к числовой алгебре вавилонян. Отбросив сковывавшую ее геометрическую оболочку, алгебра наконец-то находит свой собственный, присущий ей язык — появляется буквенная символика. Во введении к «Арифметике» Диофант принимает следующие обозначения: неизвестную он называет «числом» (ὁ ἀριθμός) и обозначает символом ς, квадрат неизвестной — символом Δ^{ν} (первые две буквы слова δύναμις — сила, степень, которым древние греки называли квадрат), куб неизвестной — символом K^{υ} (первые две буквы слова κύβος — куб), четвертую степень — $\Delta\bar{\Delta}^{\upsilon}$ (δυναμοδύναμις — квадрато-квадрат), пятую — $\Delta\bar{K}^{\upsilon}$ (δυναμοκύβος — квадрато-куб), шестую — $K^{\bar{\upsilon}}K$ (κυβοκύβος — кубо-куб).

Образуя дроби с числителем единица и знаменателем — неизвестной и ее степенями. Диофант получает шесть первых отрицательных степеней.

Символом отрицательной степени служит χ, поставленный после записи знаменателя, например: обратная величина квадрата неизвестной обозначалась $\Delta^{\bar{\upsilon}}\chi$. Свободный член обозначался M^{o} — первыми двумя буквами слова μονάς — единица.

Диофант вводит также символ $\pitchfork$, как мы полагаем, для обозначения отрицательного числа, и знак равенства, который он обозначает буквой ι (первая буква слова ἴσος — равный). Уравнение

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

в записи Диофанта выглядит так:

$$K^{\bar{\upsilon}}\bar{\alpha}\varsigma\varsigma\bar{\eta} \pitchfork \Delta^{\bar{\upsilon}}\bar{\varepsilon}M^{o}\bar{\alpha}\iota\varsigma\bar{\alpha}.$$

Отсюда видно, что знака для сложения еще нет,— слагаемые члены просто пишутся рядом.

Книга Диофанта свидетельствует о наличии у него буквенной символики. Значение этого шага огромно. Только на такой основе могло быть создано буквенное исчисление, развит формульный аппарат, позволяющий часть наших мыслительных операций заменить механическими преобразованиями. Однако Диофант, видимо, не нашел в этом деле последователей ни в его эпоху, ни много позднее. Лишь с конца XV в. в Европе началась интенсивная разработка алгебраической символики, а завершение создания буквенного исчисления произошло только в конце XVI — начале XVII в. в трудах Виета и Декарта.

Одновременно с введением символики Диофант явно формулирует основные правила алгебраических операций. Так, он подробно излагает правила умножения и деления степеней неизвестного (в наших обозначениях:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},\ x^m \cdot \frac{1}{x^n} = x^{m-n},\ \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{m+n}},$$

где m, n, $m + n \leqslant 6$). После этого он формулирует правило умножения относительных чисел, т. е. расширяет ту числовую область, над которой строится алгебра. Хотя в начале книги Диофант и повторяет, что число есть собрание единиц, но оперирует он и с рациональными числами, и, на наш взгляд, с отрицательными.

Принято считать, что Диофант употреблял только положительные числа, а знак $\pitchfork$ ставил перед положительным числом, вычитаемым из другого, большего положительного числа. При этом указывают, что у Диофанта не встречаются изолированные вычитаемые числа, но только разности алгебраических величин.

Автор этих строк иначе трактует этот вопрос. Вот как Диофант формулирует правило знаков: «Отрицательное, умноженное на отрицательное, дает положительное, тогда как отрицательное, умноженное, на положительное, дает отрицательное и отличительным знаком отрицательного является $\pitchfork$». Из приведенных слов следует, что $\pitchfork$ является не символом для операции вычитания числа, а знаком, характеризующим отрицательное число. Это подтверждается и фразой из задачи II, 11: «Прибавим к обеим сторонам отрицательное». Термином для отрицательного у Диофанта служит слово λεῖψις, производное от глагола λείπω, одно из значений которого «недоставать», «не хватать» (или «отсутствовать»). Французский переводчик Диофанта Фер Экке передает этот термин оборотом «то, чего недостает» (ce qui est de manque), а мы могли бы передать словом «недостаток» Отметим, что для операции вычитания Диофант употребляет термин ἀφαιρέω — отнимаю. «Положительное» у Диофанта — ὕπαρξις, что означает «существование», а также и «достояние», «имущество». Таким образом, терминология Диофанта для относительных чисел близка к такой терминологии, которую в Средние века употребляли на Востоке и в Европе.

Перейдем к трактовке рациональных чисел. Основная проблема «Арифметики» — это решение неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. Неизвестное (напомним, что Диофант называет его числом ἀριθμός) может быть как целым, так и дробным, эти случаи не различаются. Решения ищутся во всей области рациональных чисел, больших нуля.

Диофанту не чуждо и представление об иррациональном числе: так, в задаче IV, 9 он пишет, что «число получается иррациональным». Отметим, что оба правила арабов — ал-джабр и ал-мукабала, т. е. правило переноноса вычитаемого члена с одной стороны уравнения в другую с обратным знаком, и правило сокращения равных членов (см. стр. 220), также сформулированы у Диофанта.

Таким образом, Диофант вводит в алгебру символику и обращает существенное внимание на правила алгебраических операций, и все это делается на базе нового, более широкого понятия числа.

Но сколь ни удивительны перемены в построении алгебры, еще более поражает круг проблем, которые ставит и решает Диофант и которые до сих пор носят его имя.

Диофантовы уравнения

Вопрос о решении неопределенных уравнений в рациональных числах занимает важное место в современной математике. Он стоит на стыке теории чисел и алгебраической геометрии, и, несмотря на то, что им занимались такие крупные ученые, как А. Пуанкаре и Д. Гильберт, результатов получено до сих пор немного.

Поясним постановку проблемы. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен с целыми или рациональными коэффициентами. Тогда требуется определить: 1) имеет ли оно рациональные решения или является неразрешимым; 2) если уравнение разрешимо, то нужно найти все его решения, т. е. дать способ эффективного нахождения одного из них, а затем найти общие формулы или описать способ нахождения всех остальных. При этом весьма существенно исследование структуры множества всех решений.

Аналогичные вопросы ставятся и для системы неопределенных уравнений.

Мы видели, что уже пифагорейцы исследовали уравнение $x^2 + y^2 = z^2$. Ничего большего в этом направлении нам неизвестно.

Начиная со второй книги, Диофант исследует неопределенные уравнения второго порядка от двух переменных

$$F_2(x, y) = 0. \qquad (1)$$

В декартовых координатах уравнение (1) является уравнением конического сечения. Рациональным решениям уравнения (1) отвечают рациональные точки кривой (такие, обе координаты которых рациональны). В дальнейшем мы часто будем пользоваться геометрической терминологией, хотя сам Диофант и не делал этого.

Для кривых вида (1) Диофант устанавливает, по существу, следующую теорему: кривая второго порядка либо содержит бесконечно много рациональных точек, координаты которых могут быть выражены как рациональные функции одного параметра, либо не содержит их вовсе. Это следует из метода, которым Диофант находит рациональные точки кривой, если одна такая точка известна.

Если a, b — рациональная точка кривой (1), т. е.

$$F_2(a,\ b)=0, \tag{2}$$

то Диофант делает подстановку

$$y=b+k(x-a),$$

или

$$y=b+kt,$$
$$x=a+t,$$

и получает

$$F_2(a+t, b+kt)=F_2(a, b)+tA(a, b)+ktB(a, b)+t^2C(a, b, k)=0.$$

Свободный член этого уравнения обращается в нуль в силу (2). Поэтому

$$t=\frac{A(a, b)+kB(a, b)}{C(a, b, k)},$$

т. е. t рационально выражается через параметр k. Каждому рациональному k будет отвечать новая рациональная точка кривой. Геометрически это означает, что через рациональную точку $(a,\ b)$ проводится прямая

$$y-b=k(x-a)$$

и ищется ее вторая точка пересечения с кривой (1). Если k рационально, то и вторая точка пересечения необходимо будет рациональной. Так, например, в задаче II, 8 требуется представить заданный квадрат в виде суммы двух квадратов:

$$a^2=x^2+y^2.$$

Одно из решений здесь

$$x_0=0,\ \ y_0=-a,$$

поэтому Диофант делает подстановку $x=t$, $y=kt-a$. (В силу того, что Диофант имеет символ для обозначения только одной неизвестной, он берет $k=2$, $a=4$ и проделывает все для этих конкретных значений.) Тогда

$$a^2=t^2+(kt-a)^2,$$

или

$$x=t=\frac{2ak}{1+k^2},\quad y=kt-a=\frac{k^2-1}{k^2+1}a$$

(у Диофанта $x=16/5$, $y=12/5$).

Именно к этой задаче тринадцать веков спустя П. Ферма сделал свое знаменитое примечание, в котором сформулировал так называемую великую теорему Ферма; об этой теореме нам еще придется говорить в дальнейшем (см. т. II, гл. 4).

В IV книге «Арифметики» Диофант переходит к исследованию неопределенных уравнений третьей и четвертой степеней. Здесь дело обстоит гораздо сложнее. Неизвестные, вообще говоря, нельзя выразить в виде рациональных функций одного параметра. Однако, зная одну или две рациональные точки кубической кривой

$$F_3(x, y) = 0, \tag{3}$$

можно найти новую ее рациональную точку.

Для этого можно применить одну из следующих процедур:

1) в рациональной точке P_1 провести касательную. Она в общем случае пересечет кривую (3) еще в одной точке, которая также будет рациональной (эта точка может оказаться бесконечно удаленной);

2) через две рациональные точки P_1 и P_2 провести прямую, которая пересечет кривую (3) еще в одной рациональной точке Q.

Обычно считалось, что первая из названных процедур была впервые применена П. Ферма для решения уравнения

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3,$$

а вторая — О. Коши при исследовании уравнения

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 3Dxyz.$$

Между тем оба эти метода имелись уже в «Арифметике» Диофанта.

Первый из них был применен Диофантом в задаче IV, 24, в которой требуется заданное число a разложить на две такие части x и y, что

$$xy = u^3 - u. \tag{4}$$

Обозначая первое из чисел t, а второе $a - t$, Диофант получает

$$t(a - t) = u^3 - u \tag{5}$$

Одной из рациональных точек будет $P_1(0, 1)$. Диофант полагает

$$u = kt - 1, \tag{6}$$

т. е., по существу, здесь проводится прямая через P_1. Тогда

$$k^3t^3 + (1 - 3k^2)t^2 + (2k - a)t = 0.$$

Диофант требует, чтобы

$$2k - a = 0, \quad k = a/2.$$

Тогда

$$t = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = \frac{3\,\frac{a^2}{4} - 1}{\frac{a^3}{8}} = \frac{6a^2 - 8}{a^3}.$$

Требование Диофанта равносильно тому, что (6) есть касательная.

Вторую процедуру Диофант применяет в задачах IV, 26 и IV, 27. В задаче IV, 26 требуется найти два таких числа x и y, что

$$xy + x = u^3,$$
$$xy + y = v^3.$$

Диофант полагает $x = a^3t$ (он берет для a^3 конкретное значение 8), $y = t^2 - 1$. Тогда первое условие выполнено. Второе условие дает

$$a^3t^3 + t^2 - a^3t - 1 = v^3. \tag{7}$$

Диофант полагает

$$v = at - 1$$

и находит

$$t = \frac{a^3 + 3a}{1 + 3a^2}.$$

Остановимся подробнее на примененном здесь методе. Одним из рациональных решений уравнения (7) будет (0, — 1). Если мы проведем через эту точку прямую, то получим

$$v + 1 = kt,$$
$$v = kt - 1.$$

Найдем точки пересечения этой прямой с (7):

$$a^3t^3 + t^2 - a^3t - 1 = (kt - 1)^3,$$
$$(a^3 - k^3)\,t^3 + (1 + 3k^2)\,t^2 - (a^3 + 3k) = 0. \tag{7'}$$

Диофант приравнивает нулю коэффициент не при t, а при t^3 и получает

$$a^3 - k^3 = 0,\ k = a.$$

Что означает такое приравнивание с геометрической точки зрения? Для выяснения этого вопроса запишем уравнение (7) в однородных координатах:

$$a^3t^3 + t^2w \mp a^3tw^2 - w^3 = v^3. \tag{8}$$

Это уравнение имеет две рациональне точки:

$$P_1\,(0,\ -1,\ 1) \text{ и } P_2\,(1,\ a,\ 0);$$

соединяющая их прямая есть

$$u = at - w.$$

Она-то и даст в пересечении с (8) третью рациональную точку Q. Таким образом, этот метод Диофанта представляет частный случай второй процедуры.

В последующих книгах Диофант применяет как изложенные нами, так и другие интересные методы решения неопределенных уравнений и систем таких уравнений, но мы не сможем здесь на этом остановиться.

В Европе Нового времени с «Арифметикой» познакомились в XVI в., и методы Диофанта, развитые им при решении неопределенных уравнений, оказали огромное влияние на Виета и Ферма.

Прием Диофанта для отыскания рациональных решений неопределенных уравнений третьей степени с двумя неизвестными был, по-видимому, впервые замечен и применен Виетом и Баше де-Мезириаком. Ферма, как это видно из его примечаний к «Арифметике» Диофанта, уже в совершенстве владел им, причем хорошо понял и геометрический смысл подстановок Диофанта. Быть может, Ферма заметил также, что метод Диофанта дает способ определения углового коэффициента касательной (производной).

Воспроизведем прием Диофанта в «общем виде». Пусть дано неопределенное уравнение третьей степени (3), имеющее рациональное решение $(a,\ b)$. Следуя Диофанту, сделаем подстановку:

$$x = a + t,$$
$$y = b + kt.$$

Тогда

$$F_3(a + t, b + kt) = F_3(a,\ b) + tA(a,\ b) + ktB(a,\ b) + \\ + t^2C(a,\ b,\ k) + t^3D(a,\ b,\ k) = 0. \quad (9)$$

Но по условию

$$F_3(a,\ b) = 0.$$

Чтобы t было рациональным, Диофант полагает

$$A(a,\ b) + kB(a,\ b) = 0,$$

т. е.

$$k = -\frac{A(a, b)}{B(a, b)}.$$

В современных обозначениях

$$A(a, b) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(a, b),$$

$$B(a, b) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(a, b),$$

причем обе частные производные вычисляются чисто алгебраически, в конечное число шагов. Они получаются как коэффициенты при t и kt в разложении (9) многочлена $F_3(x,\ y)$. Возможно, что Ферма, развивая свой метод алгебраического дифференцирования, отправлялся от такого истолкования метода Диофанта.

Труды Диофанта имели столь же фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел, как и труды Архимеда для развития исчисления бесконечно малых.

Выше говорилось, что мы ничего не знаем о предшественниках Диофанта; точно так же ничего не известно о его преемниках вплоть до IX—X вв. Нет сомнения в том, что то алгебраическое направление, крупнейшим представителем которого он является, имело и других представителей в науке последующих веков; следы влияния этого направления отчетливо видны в арабской математической литературе IX в. После того как ал-Баалбакки (ум. 912) перевел «Арифметику» Диофанта на арабский язык, она оказала существенное влияние в странах ислама.

Наименования Диофанта для степеней неизвестного были восприняты на арабском Востоке; об их судьбе в Европе см. стр. 291.

Что касается развития собственно алгебраической геометрии, к которой мы сейчас относим проблемы Диофанта, то влияние идей великого алгебраиста древности можно проследить вплоть до начала XX в. После Ферма прием Диофанта встречается у Эйлера, Якоби и других авторов. Однако наиболее глубокое применение он получил в работах замечательного математика конца XIX — начала XX в. — Анри Пуанкаре, который изучал алгебраическую структуру множества рациональных точек алгебраической кривой.

Закат античной математики

«Арифметика» — последнее, дошедшее до нас великое математическое произведение античности. Это не значит, что после Диофанта математика в Римской империи прекратила свое существование. Математические исследования продолжались, хотя условия для этого были крайне неблагоприятны.

Возникшее в первых веках нашей эры христианство явилось активным врагом языческой культуры и науки. Горят «еретические «книги, гибнут библиотеки, ученые изгоняются или даже уничтожаются физически. Такая враждебность, разумеется, не была случайностью: наука приучала людей к критическому мышлению, к трезвому анализу фактов. Лозунгом же религии становятся слова апологета христианства Тертуллиана (II в. н. э.). «Нам после Христа не нужна никакая любознательность,— писал он, — после Евангелия не нужно никакого исследования»...

С другой стороны, и властители мира—римляне не поощряли занятия абстрактной наукой. Занятые заботами о поддержании огромной империи, они ценили только узко практические знания.

В такой обстановке александрийская школа все же просуществовала еще более века.

В начале IV в. н. э. там жил и работал замечательный ученый Папп, «Математический сборник» которого показывает, что это был прекрасный знаток классической античной геометрии. Его собственные работы относятся к проективной геометрии и к изучению кривых на торе и других поверхностях. Так, несколько отдельных предложений из «Поризмов» Евклида Папп рассмотрел с единой точки зрения и получил теорему, эквивалентную знаменитой теореме Дезарга. В его трудах можно найти также формулировку и доказательство частного случая теоремы Паскаля (рис. 45): если на прямых AB и CD взяты точки E и G и проведены линии AD, AG, BC, BG, ED и EC, то точки пересечения H, K, L лежат на одной прямой. Эти теоремы, вновь найденные Дезаргом и Паскалем в XVII в., ознаменовали начало проективной геометрии Нового времени.

В конце IV в. н. э. христианская церковь начинает организованное и систематическое наступление на науку. В 391 г. по заранее обдуманному плану была сожжена значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки. Оставшиеся рукописи уничтожались еще более трех веков. Когда в VIII в. уровень культуры в арабских странах поднялся настолько, что ученые начали собирать и переводить греческие рукописи, уцелело лишь очень немногое. Это немногое и явилось одним из главных отправных пунктов развития науки в странах ислама, впоследствии и в Европе.

Из ученых конца IV в. можно назвать известного комментатора Теона Александрийского и его дочь Гипатию. Гипатия была автором коммента-

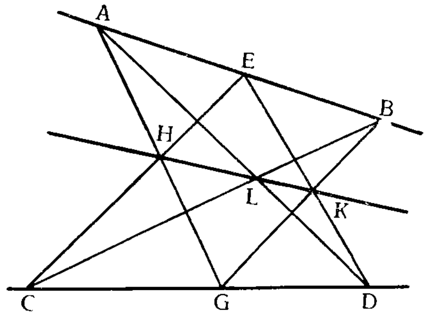


Рис. 45

риев к Аполлонию и Диофанту и славилась своим умом и красноречием. Эта замечательная женщина в 418 г. была растерзана толпой фанатиков-христиан за то, что не хотела порывать с язычеством.

К IV—V вв. относится расцвет школы неоплатоников, к которой принадлежала и Гипатия. Одним из наиболее видных представителей этой школы был Прокл (410—485), который жил и работал уже не в Александрии, а в Афинах. Там он изучал со своими учениками произведения Евклида и Птолемея и производил астрономические наблюдения. Наряду с этим их интересовали мистика и магия. Для нас большой интерес представляют комметарии Прокла в I книге «Начал» Евклида, в которых он дает краткий обзор истории геометрии от Фалеса до Евклида.

В начале VI в. жил и работал Евтокий — выдающийся комментатор сочинений Архимеда и Аполлония. До сих пор труды этих геометров издаются с его комментариями. Следует упомянуть еще Симпликия, автора примечаний к Аристотелю. В частности, поясняя одно из высказываний Аристотеля, он привел отрывки из трактата Гиппократа Хиосского о квадрируемых луночках. Симпликий жил в Афинах в начале VI в. Когда в 529 г. император Юстиниан закрыл Афинскую академию, Симпликий вместе с другими философами переехал в Персию.

Последние выдающиеся греческие ученые — Исидор из Милета и Анфимий из Тралл — жили в VI в. в Византии. Они были строителями знаменитого Софийского собора. В школе Исидора была написана работа, содержащая некоторые предложения о правильных многогранниках, ее обычно присоединяют к «Началам» в качестве XV книги.

Значение греческой математики

Невозможно представить себе, как пошло бы развитие математики в Новое время, если бы ученые средневекового Востока и Европы не имели бы в своем распоряжении сокровищ античной науки. Именно Греции мы обязаны возникновением математики как самостоятельной науки с присущими ей методами нахождения и установления истины, методами конструкции новых объектов и образования новых понятий. Такие достижения греческой математики, как теория делимости чисел, теория иррациональных величин и классификация квадратичных иррациональностей, исследование задач, не разрешимых с помощью циркуля и линейки, парадоксы бесконечного и «метод исчерпывания», интегральные и дифференциальные методы Архимеда, теория конических сечений Аполлония, аксиоматический метод, сферическая геометрия Менелая, тригонометрия хорд Птолемея и алгебра Диофанта, определили дальнейшее развитие математики в течение многих веков. Именно в Греции и эллинистических странах математика пережила свое детство и юность, именно там зародились те великие идеи, полное осуществление которых потребовало полутора-двух тысяч лет упорного труда. Критическое усвоение методов греческой математики легло в основу научной революции XVII в. в математике, но и позднее, в XIX и XX вв., создавая новые направления или строя новые теории, математики неоднократно замечали, что они совершенствуют или воплощают то, что было задумано и начато в древней Греции. С развитием математики мы замечаем в трудах древних все новые и новые идеи и методы, и не надо быть пророком, чтобы предсказать, что процесс этот не кончится вместе с нами.