ПЕРВАЯ ГЛАВА

КИТАЙ

Древний и средневековый Китай

Китайская цивилизация возникла в начале II тысячелетия до н. э, на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн реки Янцзы. Первое китайское государство появилось в эпоху Инь (XVIII—XII вв. до н. э.). К этой же эпохе относятся первые дошедшие до нас китайские письменные памятники — надписи на гадательных костях животных и панцирях черепах. В частности, на гадательных костях XIV в. до н. э., найденных в Хэнани, сохранились обозначения цифр. Обломки посуды, относящиеся в XIII—XII вв. до н. э., снабжены геометрическими орнаментами, например изображениями правильных пяти-, семи-, восьми- и девятиугольников. В это же время началась постройка Великой китайской стены, которая должна оградить царство Инь от кочевников; широко развернулась постройка дорог и каналов. Однако в XII в. до н. э. кочевые племена Чжоу, обойдя недостроенную стену, разрушили царство Инь и основали новое царство. Вскоре, как это происходило в истории Китая многократно, покорители восприняли культуру завоеванного народа. Эта эпоха известна в истории тем, что тогда «расцвели сто цветов, соперничали сто школ ученых». Именно к данному времени относится деятельность знаменитого философа Конфуция (Кунцзы, 551—479 до н. э.), выработавшего основы учения о «добродетельном поведении», а также возникновение математики и астрономии в Китае. Астрономы работали над согласованием общеупотребительного лунного календаря с солнечным, появились первые учебники математики, которые не дошли до нас, но, видимо, легли в основу классической «Математики в девяти книгах».

Первые сохранившиеся до нашего времени древнекитайские тексты относятся к концу I тысячелетия до н.э. Это объясняется тем, что в 213 г. до н. э. император Ши Хуан-ди приказал сжечь все книги, по-видимому, для того, чтобы ликвидировать прежние традиции. Однако вскоре при установлении первой династии Хань (II в. до н. э. — I. в. н. э.) древние книги стали восстанавливать. Ко II в. до н.э. относится изобретение бумаги, а также создание наиболее древних из дошедших до нас сочинений — математико-астрономического «Трактата об измерительном шесте» и «Математики в девяти книгах».

В царствование второй династии Хань (II в.) Китай установил торговые связи с Римом и Индией. При династии Суй (VI—VII вв.) начинается сооружение Великого канала, соединяющего Южный Китай с Северным. В эпоху династии Тан (VII—X вв.) был покорен ряд соседних стран. Китай становится обширнейшим государством, простирающимся от Тихого океана до Тибета и от Великой стены до Вьетнама. В это время китайская иероглифическая письменность получила распространение у многих народов. Однако разные народы произносили одни и те же иероглифы по-разному.

Например, иероглифы «Восточная столица» японцы произносят «Токио», а китайцы— «Дунцзин» (ср. Бэйцзин, т. е. Пекин, — «Северная столица» и Наньцзин, т. е. Нанкин,— «Южная столица»), одни и те же иероглифы «Страна юга» вьетнамцы произносили «Вьетнам», а китайцы говорили «Юенань».

В эпоху Тан расширяются связи Китая с Индией, Индонезией, Ираном, Средней Азией. Именно в это время, в VIII в., в Китае широко распространяется возникшая в Индии буддистская религия, в вместе с ней и индийская наука. Изобретается книгопечатание с гравированных досок, которые через два столетия были заменены подвижным шрифтом.

В X—XIII вв. в эпоху династии Сун, правившей в Центральном и Южном Китае, особенно высокого развития достигает китайское ремесло и искусство. К этому времени относятся такие важные изобретения, как компас и порох. В XIII в. Китай был завоеван монголами, основавшими новую династию Юань. Столицей становится Ханбалык (Пекин). После монгольского завоевания Китая в дальнейших походах монголов участвуют китайские пороховые мастера, специалисты по стенобитным машинам и оружейники. В значительной степени монголы были обязаны своими победами передовой по тому времени китайской военной технике. В походах монголов в Среднюю Азию и Иран принимали участие китайские мастера. Вскоре там появились и китайские ученые. В свою очередь, купцы и ученые стран ислама проникают в Китай, а затем туда попадают европейцы (к XIII в. относится знаменитое путешествие в Китай Марко Поло).

В древнем Китае преподаванию математики было отведено видное место. Система обучения была разработана еще в эпоху Чжоу. Ко второй половине I тысячелетия н. э. были серьезно поставлены математическое образование и экзамены. В эпоху Тан в Императорской академии математика изучалась семь лет. Для занятия чиновником государственной должности требовалось выдержать некоторые экзамены, в том числе по математике. Были изданы и переиздавались в течение многих веков «Десять классических трактатов», первые два — уже упоминавшиеся «Трактат об измерительном шесте» и «Математика в девяти книгах», а последующие были написаны в III—VI вв.

Важной особенностью китайской науки является ее догматизм. В течение веков китайская наука направлялась чиновниками, придавшими ей, как и многим сторонам жизни страны, бюрократический характер. Если основное математическое произведение греческой науки — «Начала» Евклида — представляет собой единый труд, в котором составные части, написанные разными математиками, подверглись значительной обработке, то китайские «классические трактаты» переиздавались без всяких изменений; среди них «Математика в девяти книгах», которая в свою очередь является собранием нескольких сочинений, написанных разными людьми в различные эпохи.

Китайская нумерация

Китайская нумерация основана на мультипликативном принципе. Форма китайских иероглифических цифр, возникших во II тысячелетии до н. э., установилась к III в. до н. э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время и имеют вид, указанный в первом столбце таблицы на стр. 159.

При записи, например, числа, состоящего из тысяч, сотен, десятков и единиц, сверху или слева записывается число тысяч, затем знак тысячи, число сотен, знак сотни, число десятков, знак десятка и, наконец, число единиц. Если какой-нибудь разряд отсутствует, он пропускается. Разряды записываются сверху вниз или слева направо. Первые три иероглифа, очевидно, представляют собой изображение одного, двух и трех пальцев, счетных палочек или зарубок.

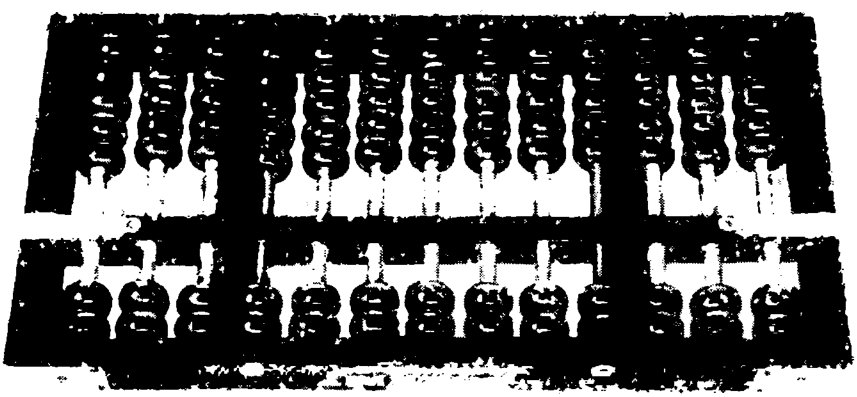
Если мы будем обозначать цифры от 1 до 9 нашими обычными цифрами, а 10, 100 и 1000 — римскими цифрами X, C и M, мы можем записать число 1968 этим способом в виде 1M9C6X8. Видоизменениями этих иероглифов являются китайские коммерческие цифры, приведенные во втором столбце той же таблицы.

Арифметические действия в древнем и средневековом Китае производились на счетной доске с помощью счетных палочек. Слово «суань» — «считать» обозначается тем же иероглифом, что и счетная палочка. Счетные палочки делались из бамбука, слоновой кости или металла. Когда были изобретены отрицательные числа, палочки стали делать двух цветов — красные и черные или с различными сечениями — квадратным и треугольным. Палочки раскладывались на счетной доске, которая, как полагают, была разлинована на строки и столбцы. Цифры, составленные из счетных палочек, имели вид, указанный в третьем столбце таблицы на стр. 159, с той разницей, что отсутствие разряда указывалось пустым местом на счетной доске. Оно было хорошо заметно благодаря чередованию вертикального и горизонтального положений палочек. В математической литературе эти цифры изображались на бумаге; в этом случае отсутствие разряда указывалось знаком, приведенным в таблице.

Таким образом, на счетной доске мультипликативный принцип, на котором была основана иероглифическая запись цифр, оказался ненужным, и запись стала позиционной. Однако, в отличие от вавилонян, применявших позиционную нумерацию и в письме, китайцы пользовались ею только на счетной доске.

О счете с помощью палочек упоминал еще философ Мэн-цзы (372—289 до н. э.). Первым дошедшим до нас письменным свидетельством об этом счете

Суаньпань



	Китайские			Цифры Карошти	Цифры пещерной надписи Нозик	Цифры ацтеков	Цифры племени майя
	Старые	Коммерческие	Научные				
	1	2	3	4	5	6	7
0		〇	○				𝋠
1	一	〡	𝍠	𐩀	—	•	•
2	二	〢	𝍡	𐩁	=	••	••
3	三	〣	𝍢	𐩂	≡	∴	•••
4	四	〤	𝍣	𐩃	𑁕	∷	••••
5	五	〥	𝍤	𐩀𐩃	𑁖	⁙	𝋥
6	六	〦	𝍥	𐩁𐩃	𑁗	⁙¦·	𝋦
7	七	〧	𝍦		𑁘	⁙¦··	𝋧
8	八	〨	𝍧	𐩃𐩃	𑁙	⁙¦∴	𝋨
9	九	〩	𝍨		𑁚	⁙¦∷	𝋩
10	十	〸	𝍠○	𐩄	𑁛	◇	𝋪
15	十五	〸〥	𝍠≣			◇⁙	𝋯
20	二十	〢〸	𝍡○	𐩅	𑁜	⚑	
30	三十	〣〸	𝍢○			⚑◇	
40	四十	〤〸	𝍣○		𑁞	⚑⚑	
50	五十	〥〸	𝍤○	𐩄𐩅𐩅		⚑⚑◇	
60	六十	〦〸	𝍥○	𐩅𐩅𐩅		⚑⚑⚑	
70	七十	〧〸	𝍦○	𐩄𐩅𐩅𐩅	𑁡	⚑⚑⚑◇	
80	八十	〨〸	𝍧○			⚑⚑⚑⚑	
90	九十	〩〸	𝍨○			⚑⚑⚑⚑◇	
100	百	百	𝍠○○	𐩆𐩀	𑁤	[illegible]	
200	二百	〢百	𝍡○○	𐩆𐩁	[illegible]	[illegible]	
400	四百	〤百	𝍣○○			[illegible]	
500	五百	〥百	𝍤○○		[illegible]	[illegible]	
1000	千	千	𝍠○○○		𑁥	[illegible]	
8000	八千	〨千	𝍧○○○		[illegible]	[illegible]	
10000	萬	万	𝍠○○○○				

Числовые знаки разных народов

являются слова математика III в. Сунь-цзы: «В методах, которые употребляются при обычном счете, прежде всего [следует] познакомиться с разрядами: единицы вертикальны, десятки горизонтальны; сотни стоят, тысячи лежат; тысячи и десятки выглядят одинаково, десятки тысяч и сотни тоже» [1].

Впоследствии на основе счетной доски возник счетный прибор суаньпань, напоминающий русские счеты. Японцы, перенявшие этот прибор у китайцев, называют его «сарабан». Суаньпань представляет прямоугольную рамку, в которой натянуты 12 или более параллельных проволок. Перпендикулярно проволокам проведена перегородка, разделяющая рамку на две неравные части. В большем отделении на каждой проволоке нанизано по пять подвижных шариков, в меньшем — по два. Проволоки соответствуют десятичным разрядам, каждый шарик меньшего отделения имеет значение, равное значениям пяти шариков большего отделения на той же проволоке.

Арифметические действия

Сложение и вычитание при счете на доске сводятся к простому добавлению и отниманию палочек в соответствующих разрядах, так что в таблице сложения не возникает потребности. Поэтому в текстах зафиксированы лишь правила умножения и деления. Но и по ним можно судить о первых двух действиях, которые отличаются от современных только некоторыми техническими деталями, обусловленными счетом на доске. Действия производятся, начиная со старших, а не с младших разрядов, расположение заданных чисел и ответа иное, чем на бумаге. Промежуточные результаты исчезают в процессе счета, так что непосредственная проверка невозможна.

Вот один из примеров Сунь-цзы на умножение:

$$81 \times 81 = 6561.$$

Правило по существу описывает следующие этапы вычислений (в первой строке дается множимое, во второй — произведение, в третьей — множитель). Особо фиксируется при этом внимание на размещение разрядов по столбцам:

	8	1			8	1				1				1				1				
			6	4			6	4	8		6	4	8		6	5	6		6	5	6	1
8	1			8	1			8	1			8	1					1				
	а			б				в				г				д				е		

Столбцы содержат: а) начальное положение чисел; б) частное произведение первой цифры множителя на первую цифру множимого; в) умножение второй цифры множителя на первую цифру множимого; г) подготовку к умножению на вторую цифру множителя; д) осуществление действия; е) окончательный результат.

Произведение 6561 остается на доске, все остальные цифры в процессе счета убираются. При делении числа располагаются соответственно по

---

[1] *Сунь-цзы.* Математический трактат. Перевод Э. И. Березкиной. «Из истории физико-математических наук в странах Востока», 1963, вып. III, 23.

строкам: частное, делимое и делитель. Сунь-цзы отмечает взаимную обратность этой операции умножению. Исторически умножение и деление были освоены независимо друг от друга, и только потом была установлена связь между ними. Это хорошо видно в древних китайских задачах, из «Маматики в девяти книгах», где произведение интерпретировалось как площадь поля, а частное — как доля, которую получает каждый участник при делении некоторого количества предметов, например монет. В традиционную форму распределения облекалось даже деление дробей.

Отметим, что в Китае существовала компактная таблица умножения от $9\cdot 9 = 81$ до $1\cdot 1 = 1$ (без повторений), которая распевалась учениками.

В старинной китайской математической литературе имеются и другие числовые таблицы, например таблица всех произведений m^2n^2, где $m = 9, 8, 7, \ldots, 1$; $n = m, \ldots, 1$, включающая квадраты, кубы и четвертые степени чисел. Таким образом, больших чисел, обширных числовых таблиц и сложных вычислений математики древнего Китая не боялись.

«Математика в девяти книгах»

Древнейшие математические трактаты дошли до нас в редакции II в. до н. э., но, по-видимому, это обработки более древних сочинений. «Математический трактат об измерительном шесте» посвящен главным образом астрономии. Из математических вопросов здесь следует отметить формулировку теоремы Пифагора и вычисления с дробями.

«Математика в девяти книгах» была окончательно отредактирована финансовым чиновником Чжан Цаном (ум. 150 до н.э.). Эта книга предназначена для землемеров, инженеров, чиновников и торговцев. В ней собрано 246 задач, изложенных догматически: сначала формулируется задача, затем сообщается ответ и в весьма сжатой форме указывается способ решения. Книги, входящие в состав этого сочинения, имеют различный математический уровень и явно были написаны в разное время: последние книги, возможно были сочинены самим Чжан Цаном, а первые относятся к гораздо более раннему времени. I книга «Измерение полей» посвящена арифметике дробей и вычислению площадей различных плоских фигур. Во II книге «Соотношения между различными видами зерновых культур» решаются задачи на пропорции. В III книге «Деление по ступеням» содержатся задачи на деление пропорционально данным числам. IV книга «Шао-гуан» (труднопереводимый термин) посвящена отысканию стороны прямоугольника по площади и другой стороне, стороны квадрата — по его площади, ребра куба — по его объему, а также определению диаметров кругов и сфер. В V книге «Оценка работ», измеряются объемы стен, каналов, плотин, рвов различной формы и вычисляется число рабочих, необходимых для выполнения разнообразных строительных работ. В VI книге «Пропорциональное распределение» решается задача «справедливого» распределения налога и поставок между уездами в зависимости от различных условий, а также более сложные арифметические задачи. В VII книге «Избыток и недостаток» решаются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными с помощью правила двух ложных положений и другие задачи на это правило. VIII книга «Фан-чэн» посвящена решению систем n линейных уравнений с n неизвестными с помощью специального метода фан-чэн. В IX книге «Гоу-гу» решаются задачи, связанные с теоремой Пифагора («гоу» — меньший, обычно горизонтальный катет прямоугольного треугольника, «гу» — больший, вертикальный катет, а «гоу-гу» — зависимость, выражаемая теоремой Пифагора).

Эти два трактата вошли в сборник десяти трактатов, который был составлен Чжень-фэном в VII в. Из других работ этого сборника отметим «Трактат о морском острове» Лю Хуэя (III в.), посвященный решению задач на определение расстояний до недоступных предметов и размеров этих предметов, «Математический трактат» Сунь-цзы (III в.), содержащий математические таблицы, арифметические задачи, задачи на системы линейных уравнений и геометрические задачи, связанные главным образом с установлением соответствия между единицами различных размерностей, и «Математический трактат пяти ведомств», включающий задачи практического содержания.

Дроби

Дроби у китайцев появились почти одновременно с целыми числами, задолго до отрицательных чисел. Первыми дробями были $^1/_2$, $^1/_3$ и $^2/_3$, называвшиеся «половиной», «малой половиной» и «большой половиной» соответственно (эти названия применялись как в обиходе, так и в математических текстах).

В китайских правилах операций с дробями читатель на найдет ничего необычного, но именно это и нетривиально, так как дроби в истории арифметики многих народов долгое время считались одним из самых запутанных разделов.

Ко II до н. э., как это видно из «Математики в девяти книгах» , китайцам удалось достаточно полно разработать все операции с дробями. С помощью алгоритма Евклида, но, в отличие от «Начал», в число арифметической форме, отыскивался наибольший общий делитель числителя и знаменателя, необходимый для сокращения дроби.

Сложение и вычитание представлено общими правилами, отличающимися от современных лишь незначительно: вместо наименьшего общего кратного знаменателей берется просто их произведение.

Умножение и деление дробей интерпретировалось на конкретных задачах определения площади земельного участка и распределения некоторого количества, например, монет между равноправными участниками дележа. Площадь прямоугольного поля, стороны которого (в древности это «ширина» и «длина») измерены и выражены в общем случае смешанными числами (иррациональностей еще не знали), достаточно убедительно интерпретирует произведение дробей. Тем самым правило перемножения числителей и знаменателей было подкреплено геометрическим представлением.

По-видимому, подойти к делению дробей, как к обратной задаче было гораздо сложнее (хотя такие задачи решались). Поэтому для китайского математика проще было прибегнуть к традиционной задаче о дележе. Правда, при этом пришлось считать, что и число участников может быть дробным. Это, как видно, не смущало китайских математиков, они охотно прибегали к тому, чтобы в старой форме задачи использовать новое понятие, возникшее при ее обобщении.

В первой задаче на деление дроби $8^1/_3$ цяня (монеты) распределяются между 7 людьми. За нею следует задача с более общим условием: «Теперь имеется $3^1/_3$ человека, делится (между ними) $6^1/_3$ и $^3/_4$ цяня». Деление дробей в этих задачах производилось большей частью не так, как это делают теперь, а путем приведения дроби к общему знаменателю.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{cb}.$$

Впоследствие Чжан Цю-цзянь (V в.) перешел к применяемому нами правилу, при котором деление на дробь заменяется умножением на перевернутую дробь. Первоначальное правило, так же как и наше (встречающееся у многих народов), предполагает, что дробь m/n рассматривается не как результат деления $m : n$, а как целое число m новых единиц, в n раз меньших прежней, вследствие чего при любом действии над дробями с разными знаменателями их приводили к общему знаменателю. При нашем же правиле дробь рассматривается как пара чисел. Переход к этому правилу, несомненно, произошел под влиянием того, что на счетной доске дробь изображалась парой чисел и действия над дробями принимали вид действий с парами чисел.

В III в. н. з. у китайцев, пользовавшихся десятичной системой мер, по существу, начали появляться десятичные дроби, первоначально в метрологической форме. С помощью таких десятичных дробей давались приближенные выражения иррациональностей — нецелых корней, а затем и π. Уже Лю Хуэй (III в.), комментируя извлечение корней в «Математике в девяти книгах», рекомендовал пользоваться дробями со знаменателями 10, 100 и т. д. , т. е., по-видимому, он имел в виду правило

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}.$$

Правило двух ложных положений

Некоторые книги «Математики в девяти книгах» посвящены решению задач, сводящихся к системам линейных уравнений. По существу, алгебраические тождественные преобразования применяются в этом сочинении и во многих арифметических и геометрических задачах.

VII книга этого сочинения, называемая «Избыток — недостаток», посвящена задачам, решаемым с помощью правила двух ложных положений. Это правило впоследствии попало в арабские, затем и западноевропейские руководства. Любопытно, что европейцы считали это правило индийским, по-видимому, вместе с заимствованной через арабов новой десятичной позиционной арифметикой, хотя до сих пор его не удалось обнаружить в индийских подлинниках. Вероятно, математики стран ислама заимствовали это правило непосредственно из китайских источников. Метод, применяемый в книге «Избыток — недостаток», состоит в том, что если x_1, x_2 — два «ложных» значения x, то при подстановке их в левую часть уравнения $ax = b$ получаются «ошибки»

$$y_1 = ax_1 - b,$$

$$y_2 = ax_2 - b.$$

Обычно $x_1 < x < x_2$, и ошибки имеют разные знаки, т. е. являются «избытком» и «недостатком». Эти термины позволяют обходиться без отрицательных чисел, а потому мы должны, вообще говоря, рассматривать отдельно три варианта правила: когда имеется избыток и недостаток, когда имеются два избытка или два недостатка, и когда имеется избыток (или недостаток) и «равновесие», т. е. y_1 или $y_2 = 0$. Однако в данном случае китайцы пользовались только первым вариантом.

Из пропорции

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1}{y_2}$$

неизвестная определялась по правилу

$$x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1}$$

Числитель и знаменатель этого выражения легко строились с помощью таблицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

выкладывавшейся на счетной доске. Преимущество этого правила состояло в том, что оно не требовало никаких алгебраических методов, было удобным и легко запоминающимся и не отказывало как при решении линейных уравнений, так и при решении более общих задач, когда получалось уже не точное, а приближенное значение. Условия некоторых из этих задач выразились бы в наших символах довольно сложно, например формулой для сложных процентов. Этот метод применялся и в случае систем двух уравнений с двумя неизвестными. Например, задача, приводившаяся к системе

$$5x + y = 300,$$
$$x + 5y = 200,$$

сводилась к линейному уравнению

$$x = 200 - 5\,(300 - 5x)$$

к которому применяли правило двух ложных положений, вычисляя «избыток» и «недостаток» при $x_1 = 50$, $x_2 = 55$.

Название «избыток — недостаток» носит и другое правило, применяемое для решения другой группы задач той же VII книги. В отличие от задач на правило двух ложных положений, эти задачи однотипны, в них самих уже заданы избыток и недостаток, либо два избытка или два недостатка, либо избыток или недостаток и равновесие. Однако искомые величины здесь несколько иные: это так называемые задачи на совместную покупку. Неизвестно число покупателей x и неизвестна стоимость вещи y. Два возможных пая a_1 и a_2 дают избыток b_1 и недостаток b_2. Таким образом, задается система вида

$$a_1x - y = b_1,$$
$$a_2x - x = b_2.$$

Даны два способа решения этих задач. С одной стороны, рекомендуется исключить неизвестное y

$$a_1x - a_2x = b_1 - b_2,$$

тогда

$$x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \qquad y = a_2x - b_2.$$

С другой стороны, предлагается пользоваться таблицей

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

из которой надо сконструировать неизвестные:

$$y = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}, \qquad x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}. \tag{2}$$

Если вычислить истинный пай

$$a = \frac{y}{x} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1 - b_2},$$

то связь этих задач с задачами на правило двух ложных положений становится очевидной. Несомненно, что причиной одинакового названия этих правил и объединения этих двух приемов, относившихся к тому же к задачам различных типов, послужило структурное сходство выражения для y в правилах (2) и выражения для x в правиле (1).

Возможно, что правило двух ложных положений в китайской математике возникло благодаря перенесению на задачи первого типа приемов решения задач второго типа.

Системы линейных уравнений со многими неизвестными

Метод фан-чэн, излагаемый в VIII книге, является вершиной достижений китайских математиков в решении линейных задач. Это регулярный алгоритм решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. совпадающий по существу с методом Гаусса, от которого он отличается тем, что все операции здесь производятся на счетной доске. Используя современную терминологию, можно сказать, что китайский вычислитель применял матрицу, столбцы которой представляют уравнения, а строки — коэффициенты при неизвестных и свободные члены. Слово «фан-чэн» буквально означает выстраивание чисел по клеткам. Правильное расположение чисел на счетной доске заменяло китайскому математику буквы и индексы нашей символики. А в словесном описании систем применялся условный язык специальных знаков десятиричного или двенадцатиричного календарного цикла, который мы передаем буквами A, $Б$, $В$ и т.д.

Приведем пример из «Математического трактата Сунь-цзы». В 28-й задаче последней книги трактата говорится, что два человека A и $Б$ получили неизвестные количества монет. Их надо определить из условия: если A добавит половину монет $Б$ или $Б$ добавит 2/3 монет A, то в обоих случаях получится 48. Для решения системы

$$x+\frac{1}{2}y=48,$$
$$\frac{2}{3}x+y=48$$

в правиле рекомендуется: «Установи в правой строке 2 для A, 1 для $Б$ и 96 монет; установи в левой строке 2 для A, 3 для $Б$ и 144 монеты». Таблица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 144 & 96 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего данную систему приводят к «каноническому» виду: в данном случае освобождаются от дробных коэффициентов, а в других случаях приводят подобные члены, переставляют неизвестные по порядку, переносят члены из одной части уравнения в другую и т. п.

Решение «канонической» системы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{gathered}$$

состоит в ее приведении к виду

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{1n}^{(n-1)}x_n&=b_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, восходя от последнего уравнения к первому, находятся последовательно x_n, x_{n-1}, ..., x_1. Само приведение осуществляется путем исключения шаг за шагом. Вся эта процедура производится на доске, на которой отложены в форме прямоугольной таблицы коэффициенты, и является, с нашей точки зрения, не чем иным, как преобразованием столбцов матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \cdots & a_{22} & a_{12} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \cdots & a_2 & b_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

к виду

$$\begin{pmatrix} & & & & a_{11} \\ & & & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{23}^{(1)} & a_{13} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{nn}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(n-1)} & \cdots & b_3^{(2)} & b_2^{(1)} & b_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица (1) приводится к виду (2) путем последовательного вычитания первого справа столбца из чисел, равных произведениям соответственных элементов второго, третьего и т. д. столбцов на a_{11} причем вычитание производится до тех пор, пока вся первая строка, за исключением элемента a_{11}, не будет состоять из пустых мест (все коэффициенты «канонической» системы — целые числа). Далее аналогично поступают с подматрицей, получаемой из матрицы (2) вычеркиванием ее первой строки и первого столбца, и т. д.

В числовом примере из трактата Сунь-цзы умножение второго справа столбца на $a_{11} = 2$ дает нам таблицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 288 & 96 \end{pmatrix}.$$

Вычитая элементы первого столбца из элементов второго столбца a_{21} два раза, получим таблицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 96 & 96 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим $y = \frac{96}{4} = 24, \quad x = \frac{96-24}{2} = \frac{72}{2} = 36.$

Метод фан-чэн близок к методу определителей, идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750). Однако он отличается от метода определителей принципиально. Хотя китайский вычислитель оперировал на доске с отвлеченными числами, связь таблицы с уравнениями еще очень сильна. Для создания определителей нужно было отделить от расширенной таблицы свободные члены, сделать столбцы и строки равноправными и т. д. Все зто и было сделано европейскими математиками Нового времени.

Тем не менее следует заметить, что крупному японскому математику Секи Кова удалось довести метод фан-чзн до метода определителей еще в 1683 г. Однако его работа, так же как и сам метод фан-чэн, оставалась неизвестной в Европе до XIX в.

Отрицательные числа

Необходимым условием применения метода фан-чэн даже к «каноническим» системам с положительными коэффициентами было введение отрицательных чисел. Действительно, преобразование таблицы заданной системы к треугольному виду требует во многих случаях вычитания из меньшего числа большего или из «ничего» какого-то числа. Например, в ходе решения системы

$$2x = 1 - y,$$
$$3y = 1 - z,$$
$$4z = 1 - x$$

получали таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий шаг (вычитание элементов третьего столбца из элементов первого) приводит к появлению отрицательного числа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные числа выделялись на счетной доске палочками другого цвета или другой формы, а при письме записывались другими чернилами или отмечались косой чертой; для них имелось особое название — «фу», в то время как положительные называли «чжэн». Здесь непосредственно виден механизм введения нового математического объекта. Еще не зная природы объекта, сначала просто добивались того, чтобы можно было довести до конца начатые вычисления согласно определенному алгоритму. Однако следует подчеркнуть: числа фу выступали не только как разности двух чисел чжэн, но и как отдельные элементы таблиц коэффициентов. Это, вначале чисто формальное, введение чисел фу в качестве самостоятельных объектов исчисления и было решающим шагом в истории учения об относительных числах. Сначала числа фу появлялись и исчезали в ходе вычислений. Это были объекты, имеющие право существования лишь в период вычислений. Для чисел фу были определены правила операций:

$$\begin{aligned} (\pm a) \mp (\pm b) &= \pm (a \mp b), \\ (\pm a) \mp (\mp b) &= \pm (a \pm b), \\ 0 \mp (+ b) &= \mp b, \\ 0 \mp (- b) &= \pm b. \end{aligned}$$

Вычитание формулировалось прежде всего, что еще раз указывает на происхождение отрицательных чисел из этой операции. Кроме первых двух арифметических действий, как показывают сами задачи, употреблялись также умножение и деление, хотя правила для них явно не сформулированы. Например, в задаче, сводящейся к решению системы

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 10y, \\ 5y + 1 &= 2x, \end{aligned}$$

требуются, в частности, оба эти действия, ибо в конце концов нужно было подсчитать

$$y = \frac{-15}{-5} = 3,$$

$$x = \frac{(-6)\cdot(-5) - (-10)\cdot(-15)}{(-5)\cdot 3} = 8.$$

Изобретение отрицательных чисел позволило еще более расширить класс задач, решаемых при помощи табличного метода. По задачам VIII книги «Математики в девяти книгах» можно проследить, как постепенно они вводятся в этих случаях. Сначала появляются отрицательные непервые члены уравнения, затем первый член и свободный член. Все они получаются в результате приведения подобных членов и переноса членов из одной части уравнения в другую.

Постепенно китайские ученые пришли к истолкованию чисел «фу» в качестве долга, недостачи и т. п. Такая интерпретация позволила использовать числа фу и в самом задании уравнений. Так, в одной из задач «Математики в девяти книгах» решается система

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 13z + 100, \\ 3x + 3z &= 9y, \\ 6y + 8z &= 5x - 600, \end{aligned}$$

где «— 600» передано выражением «не хватило 600 монет» или «недостаток в 600 монет». При построении таблицы о последнем уравнении говорится: «Недостаток монет отрицателен».

Китайские математики, так же как вавилонские и греческие, решили теоретико-числовую задачу о существовании целочисленных решений неопределенного уравнения:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Найденный китайцами закон составления троек «пифагоровых» чисел

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2}, \qquad b = pq, \qquad c = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

позволял выделить множество прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами. В связи с этим предлагался ряд задач, в которых расстояния — катеты проходились с определенными скоростями-коэффициентами, равными p, q.

Квадратные уравнения

В IX книге «Математики в девяти книгах» имеется серия задач, сводящихся к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} x^2 \pm y^2 &= a, \\ y \mp x &= b, \end{aligned}$$

равносильной квадратному уравнению. В большинстве случаев китайцы сводили эту системы к линейным или по крайней мере к неполному квадратному уравнению

$$Ax^2 = B.$$

Например, система

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ y - x &= b \end{aligned}$$

заменялась эквивалентным ей уравнением

$$2x^2 + 2bx + b^2 = a^2.$$

Дополняя его левую часть до полного квадрата и извлекая корень, мы получили бы значение неизвестного. Но последовательность вычислений, предписанная китайским правилом, иная: формулы, выражающие это правило, получаются, если предположить, что китайцы пользовались подстановкой, которая, быть может, применялась ранее в Вавилоне:

$$x = z - \frac{b}{2},$$

$$y = z + \frac{b}{2},$$

где параметр

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}}$$

находится из неполного квадратного уравнения

$$2z^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2.$$

Впрочем, хотя в китайских текстах мы не находим правила решения квадратного уравнения в радикалах, квадратные уравнения решались, и их метод решения принципиально не отличался от этого правила, которое, как известно, основано на дополнении до полного квадрата. Такой прием не был чужд китайцам. Например, в случае системы

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

$$z = x + a,$$

$$z = y + b,$$

они получали именно полный квадрат:

$$z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z + y)\, b.$$

Первый множитель определялся, по-видимому, так:

$$+\begin{array}{l} z = x + a, \\ y = z - b = x + a - b, \\ \hline z + y = 2x + 2a - b, \end{array}$$

т. е.

$$x^2 = (2x + 2a - b)\, b = 2xb + 2ab - b^2,$$

или

$$x^2 - 2xb + b^2 = 2ab,$$

откуда

$$(x - b)^2 = 2ab, \qquad x - b = \sqrt{2ab}, \qquad x = b + \sqrt{2ab},$$

что совпадает с китайским правилом определения x.

Другая группа задач (в них речь идет о городских стенах в форме квадрата или прямоугольника), сводящихся к пропорциям, у которых средние члены отношений равны или отличаются на постоянную, также приводит к квадратным уравнениям. В первом случае получается двучленное уравнение, а во втором — полное квадратное уравнение.

Метод тянь-юань

В «Математике в девяти книгах» имеется описание извлечения квадратного и кубического корней, которые были разработаны к началу нашей эры. Основаны они были на применении формулы квадрата и куба суммы двух чисел, но имелись некоторые специфические особенности, проистекавшие от применения счетной доски. В дальнейшем этот метод был обобщен на случай любого корня и вообще решения уравнения n-й степени численным методом, который стал известен в XIX в. как метод Руффини — Горнера. В Китае этот метод получил название «тянь-юань» (дословно «небесный элемент», как китайцы обозначали неизвестную величину). Он состоит в том, что, например, для уравнения n-й степени $f(x) = 0$, имеющего действительный корень $x = \alpha_1, \alpha_2\alpha_3$, записанный в десятичной системе, подбором находится целая часть корня α_1. Затем от $f(x) = 0$ переходят к уравнению $\varphi(y) = 0$, где $y = \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ Для этого делают подстановку $y = 10x' = 10(x - \alpha_1)$. Снова подбором определяют α_2 и т. д., так что значение корня вычисляется с точностью до нужного десятичного знака.

Схема вычислений коэффициентов вспомогательных уравнений в методе Горнера весьма удобна. Переход от уравнения $f(x) = 0$ к $\varphi(y) = 0$ совершается в два приема: сначала переходят к $f(x') = f(x - \alpha_1)$, что легко производится по схеме Горнера, разработанной для деления многочлена $f(x)$ на $x - \alpha_1$. Последовательное деление дает коэффициенты разложения $f(x)$ по степеням $x - \alpha_1$, т. е. коэффициенты уравнения $f(x - \alpha_1)$. Затем с помощью подстановки $y = 10x'$ переходят к уравнению $\varphi(y) = 0$. Для этого полученные по схеме Горнера коэффициенты уравнения $f(x')$ последовательно делятся на степени 10, т. е. на 1, 10, 10^2, ..., 10^n.

Процедура извлечения корней, как она изложена в «Математике в девяти книгах», складывается из подбора очередной цифры корня и преобразования чисел, установленных на счетной доске, к виду, удобному для подбора следующей цифры корня (это соответствует линейной подстановке и вычислению коэффициентов вспомогательных уравнений).

Прежде всего вычислителю предлагается определить число знаков целой части корня и тем самым установить количество этапов вычислений для этой целой части. Очередная цифра корня подбирается так же, как при делении. Следует отметить, что все правила извлечения корня у китайцев тесно связаны с терминологией деления, что объясняется также близостью задач, приводящих к этим операциям: к делению приводит определение стороны прямоугольника по его площади и другой стороне («приложение» древних греков), а к извлечению квадратного корня — определение стороны квадрата с данной площадью. Несмотря на геометрическое происхождение задачи извлечения корня, правило извлечения корня у китайцев было чисто алгебраическим. Это правило состоит в следующем. Пусть

$$x = \sqrt{N} = 100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3.$$

Тогда

$$A_1 - (B_1 + C_1\alpha_2)\alpha_2 - B_2\alpha_3 - C_2\alpha_3^2 = 0,$$

где

$$A_1 = N - (100\alpha_1)^2,\ B_1 = 2000\alpha_1,\quad C_1 = 100,\ B_2 = 200\alpha_1 + 20\alpha_2,\ C_2 = 1.$$

Цифра α_1 — максимальная, для которой выполняется условие

$$A_1 \geqslant 0.$$

Далее подготавливают счетную доску к подбору второй цифры корня. Для этого сдвигают единичную счетную палочку на два разряда вправо, т. е. устанавливают $C_1 = 100$, находят остаток

$$A_1 = N - (100\alpha_1)^2$$

и число

$$B_1 = (2\cdot 100\alpha_1)\cdot 10 = 2000\alpha_1.$$

Цифра α_2 — максимальная, для которой выполняется условие

$$A_1 - (B_1 + C_1\alpha_2)\,\alpha_2 \geqslant 0,$$

или

$$[N - (100\alpha_1)^2] - (2000\alpha_1 + 100\alpha_2)\,\alpha_2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2)^2 \geqslant 0.$$

Далее подготавливают счетную доску к подбору третьей цифры корня α_3. Для этого сдвигают единичную счетную палочку еще на два разряда вправо, т. е. устанавливают

$$C_2 = \frac{C_1}{100} = 1,$$

вычисляют остаток

$$A_2 = N - (100\,\alpha_1 + 10\alpha_2)^2$$

и числа

$$B_2 = \frac{(B_1 + C_1\alpha_2) + C_1\alpha_2}{10} = 200\alpha_1 + 20\alpha_2,\qquad C_2 = \frac{C_1}{100} = 1.$$

Цифра α_3 находится из условия

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3)^2 = 0.$$

Схема расположения чисел в указанных трех положениях имеет вид

Корень	α_1	α_2	α_3
Делимое	N	A_1	A_2
Делитель	$10\,000\alpha_1$	B_1	B_2
Единичная счетная палочка	$10\,000$	C_1	C_2

Мы видим, что числа A_i, B_i и C_i определяются по схеме Горнера, это особенно наглядно видно для случая квадратного корня на числах A_2, B_2, C_2. Деление на степени десяти — распространенный прием, он выполняется на доске простым сдвигом счетных палочек вправо. Этот метод применялся в «Математике в девяти книгах» только для вычисления корней, но использование его для вычисления кубического корня приводит на втором этапе к применению этого же метода для решения полного квадратного уравнения. Цзу Чун-чжи (V в.) и Ван Сяо-тун (VII в.) решали этим методом кубические уравнения типа $x^3 + ax^2 = b$, а последний —и полное кубическое уравнение.

Развитие и завершение разработки метода тянь-юань в общем виде принадлежит трем крупнейшим алгебраистам XIII—XIV вв. — Цинь Цзю-шао, Ли Е, Чжу Ши-цзе, олицетворявшим расцвет китайской математики в начале монгольского владычества в Китае. Цинь Цзю-шао этот метод применял к уравнению четвертой степени

$$-x^4 + 763\,200x^2 - 40\,642\,560\,00 = 0,$$

где $x = 840$.

Чжу Ши-цзе, кроме линейной подстановки, производил подстановку $y = z/a$, которая делала коэффициент при старшем члене равным единице. Подстановка давала возможность отыскивать дробные рациональные значения корней. Например, в уравнении

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0,$$

решенном Чжу Ши-цзе, $x = 8\frac{2}{3}$. Здесь он пользовался подстановками

$$x = y + 8, \qquad y = \frac{z}{576}.$$

В сочинениях этих ученых коэффициенты уравнений записывались сверху вниз в порядке возрастания степеней, неизвестных, а вместо отсутствующих ставилась звездочка. Для неизвестной и свободного члена употреблялись знаки — иероглифы, обозначающие слова «небо» и «большой». Для применения схемы Горнера уравнение записывали в канонической форме таким образом, что все члены оказывались в одной части равенства, что требовало отрицательных чисел.

Основное сочинение Чжу Ши-цзе «Яшмовое зеркало четырех элементов» (1303) интересно тем, что в нем решались нелинейные системы с четырьмя неизвестными, называемыми небом, землей, человеком и вещью. Запись производилась так же, как в случае одного неизвестного, но по четырем направлениям. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw = 0$$

представлялось схемой

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (w) & & & \\
 & & & 1 & & 2 & \\
 & & 2 & 0 & 2 & & \\
(y) & 1 & 0 & * & 0 & 1 & (z) \\
 & & 2 & 0 & 2 & & \\
 & 2 & & 1 & & & \\
 & & & (x) & & &
\end{array}$$

(здесь звездочка (*) поставлена вместо отсутствующего свободного члена). Системы решались последовательным исключением неизвестных.

В трактате Чжу Ши-цзе приводится также треугольная таблица чисел, являющихся биномиальными коэффициентами вплоть до восьмой степени. Математик того же времени Ян Хуэй указывает, что такой таблицей до шестой степени располагал Цзя Сянь, написавший около 1100 г. «Объяснение таблиц цепного метода извлечения корней». Название труда Цзя Сяня дает основание предполагать, что эта таблица применялась при извлечении корней.

Биноминальные коэффициенты были известны индийским математикам еще во II в. до н. э., где они использовались в комбинаторных задачах. Возможно, что эти коэффициенты попали в Китай с буддистскими учеными.

Теоретико-числовые задачи

Из задач, относящихся к теории чисел, упомянем 26-ю задачу последней книги трактата Сунь-цзы: требуется найти число, которое при делении на 3, 5 и 7 даст соответственно остатки 2, 3 и 2. Задачи такого типа возникли в теории календаря. Метод решения подобных задач подробно излагался Цинь Цзю-шао. Задача Сунь Цзо-цзы с теми же числовыми данными и в других вариантах приводится в «Книге абака» Леонардо Пизанского в 1202 г., через сто лет — в одной византийской рукописи, в XV в. эта задача с различными числовыми данными встречается в немецких рукописных арифметиках, в XVII в.— в русских математических рукописях. Древнекитайский метод решения этих задач был вновь разработан Эйлером в 1740 г. и со всей полнотой изложен в § 32—36 «Арифметических исследований» Гаусса (1801). Эйлер и Гаусс не знали, что этой задачей занимались в Китае за полторы тысячи лет до них.

Другой популярной теоретико-числовой задачей была «задачей о птицах», также восходящая к V в.: сколько можно купить на 100 монет петухов, кур и цыплят — всего 100 птиц, если петух стоит 5 монет, курица — 4 монеты, а четыре цыпленка — 1 монету; решение: 15 петухов, курица, 84 цыпленка. Аналогичные задачи встречались также у индийца Бхаскары (XII в.), египтянина Абу Камила (X в.) и самаркандского математика ал-Каши (XV в.). В Европе аналогичная задача встречается впервые в сборнике Алкуина (VIII в.).

Математики Китая занимались также составлением так называемых магических квадратов, т. е. таким распределением n^2 последовательных натуральных чисел 1, 2, ..., n^2 в квадратной таблице, при котором суммы чисел в каждом из столбцов и строк одинаковы, и, значит, равны $\frac{n}{2}(n^2+1)$. В частности, этот вопрос разбирается в работе Ян Хуэя 1275 г. Магическими квадратами занимались многие средневековые математики стран ислама, Византии и Западной Европы.

Интерполирование

С календарными и астрономическими расчетами была связана разработка в Китае интерполяционных приемов, позволяющих приближенно находить по небольшому числу эмпирических данных значения функций, заданных таблицами, между точками задания табличных значений. Около 600 г. астроном и математик Лю Чжо применил с этой целью квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$, коэффициенты которого выражаются через разности первого и второго порядков при равноотстоящих значениях аргумента. Правила Лю Чжо использовались в календарных расчетах VII и IX вв. Вскоре после Лю Чжо астроном И Синь распространил его правила на случай неравноотстоящих значений аргумента. Правила Лю Чжо и И Синя для интерполяции функции $f(x)$, принимающей в точках x_0, x_1, x_2 заданные значения, состоит в замене функции трехчленом

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \\ + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}.$$

В XIII в. аналогичное интерполирование с помощью многочлена третьей степени, коэффициенты которого выражаются через разности первого, второго и третьего порядков, было предложено Го Шоу-цзином (1231—1316), придворным астрономом монгольского хана Хубилая, работавшим в Ханбалыке.

Правила Лю Чжоу и Го Шоу-цзина представляют собой частные случаи интерполяционных формул, предложенных в конце XVII в. в Англии Дж. Грегори и И. Ньютоном.

Суммирование рядов

В VI книге «Математики в девяти книгах» имеется одна задача на арифметическую прогрессию: требуется найти члены прогрессии, состоящей из девяти членов, по сумме четырех первых и трех последних членов. Вопросами суммирования рядов занимались и позднейшие китайские математики, возможно под влиянием индийцев. Шэнь Ко (XI в.) в «Рассуждениях Мэн-си» подсчитал число предметов, образующих n-слойную ступенчатую усеченную пирамиду, в которой стороны прямоугольных слоев последовательно увеличиваются на единицу. Если в наименьшем слое ab предметов, то в k-м слое $(a + k - 1)\cdot(b + k - 1)$ предметов и искомое число выражается суммой

$$\sum_{k=1}^{n} (a + k - 1)(b + k - 1) = \\ = \frac{n}{6}[a(3b + n - 1) + (a + n - 1)(3b + 2n - 2) + n - 1].$$

Предпосылками вывода, которого Шэнь Ко не сообщает, должны были служить правила суммирования арифметической прогрессии и ряда натуральных квадратов. В XIII в. Чжу Ши-цзе суммирует ряды, возникающие при перемножении натуральных, треугольных и квадратных чисел с членами возрастающей или убывающей прогрессии.

Геометрические задачи

IX книга «Математики в девяти книгах» посвящена геометрическим задачам, при решении которых применяется теорема Пифагора.

В древнекитайском «Трактате об измерительном шесте» указывается, что теорема Пифагора для прямоугольного треугольника со сторонами 3,

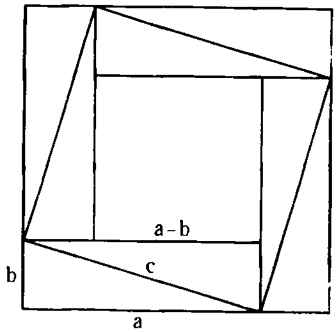


Рис. 46

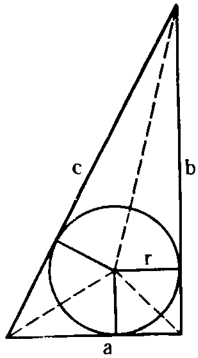


Рис. 47

4, 5 была известна Шан Гао за 1100 лет до н. э. а в в общем случае — Чэнь-цзы, жившему в VI в. до н. э. В комментариях к этой книге указано, что доказательство этой теоремы было основано на чертеже, в силу которого квадрат, построенный на сумме катетов a и b прямоугольного треугольника, может быть представлен в виде суммы квадрата, построенного на разности этих катетов, и четырех прямоугольников со сторонами a и b и в виде суммы квадрата, построенного на гипотенузе c треугольника и четырех треугольников, конгруэнтных данному (рис. 46), т. е.

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 = 2ab + c^2,$$

откуда вытекает соотношение

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Среди задач IX книги «Математики в девяти книгах» следует упомянуть задачи о камыше, растущем в середине квадратного водоема, и о сломанном тростнике, касающемся вершиной земли на некотором расстоянии от корня, имеющиеся в сочинениях индийских математиков Брахмагупты (VII в.) и Бхаскары (XII в.); на стр. 50—51 мы встречались с аналогичными вавилонскими задачами. В задачах этого типа требуется определить b и c из соотношения

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

по известным a и $c \mp b$. Правило решения этих задач можно выразить формулами

$$c + b = \frac{a^2}{c - b},$$

$$c - b = k.$$

Тогда либо

$$2c = \frac{a^2}{k} + k, \qquad c = \frac{\frac{a^2}{k} + k}{2},$$

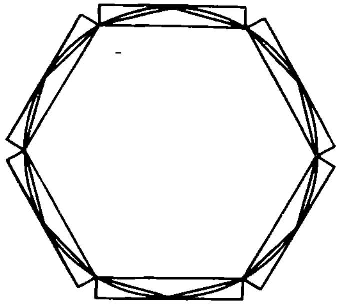


Рис. 48

либо

$$2b = \frac{a^2}{k} - k, \qquad b = \frac{\frac{a^2}{k} - k}{2}.$$

Китайцы умели определять также выражение радиуса r круга, вписанного в прямоугольный треугольник, через заданные катеты a и b (рис. 47):

$$2r = \frac{2ab}{a+b+c}, \qquad \text{где } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Это значит, что китайским математикам были известны такие геометрические факты, как перпендикулярность радиусов в точках касания касательным, равенство отрезков касательных от точки касания до точки пересечения и т. д. В одной задаче рассматривается вписанный в круг прямоугольный треугольник, причем используется то, что угол опирающийся на диаметр, прямой.

Комментатор «Математики в девяти книгах» Лю Хуэй в «Трактате о морском острове» определял расстояния до недоступных предметов и размеры этих предметов (высоту морского острова, глубину оврага, ширину реки и т. д.), используя пропорциональность соответственных сторон подобных фигур.

В I—III вв. китайские астрономы и математики, возможно, под влиянием идей, проникавших из Греции через Индию, занимались уточнением отношения окружности к диаметру. Астроном и философ Чжан Хен (78—139) нашел, что квадрат длины окружности относится к квадрату параметра описанного около нее квадрата, как 5 : 8, что соответствует $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ Это приближение, имеющее погрешность менее 1%, применял Цзинь Цзю-шао в 1247 г., оно встречается и у Брахмагупты (VII в.) и ал-Хорезми (IX в.). Ученый-полководец Ван Фань (ум. 267) получил лучшее приближение $\pi = 142/45 = 3{,}155\ldots$ Методы этих вычислений нам неизвестны, но Лю Хуэй в комментариях к «Математике в девяти книгах» рассматривал вписанные в круг правильные многоугольники. Основываясь на том, что площадь S круга меньше фигуры, составленной из вписанного в него n-угольника и описанных около остаточных сегментов круга прямоугольников (рис. 48), пришел к неравенствам

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n),$$

где S_n и S_{2n} — площади правильных n- и $2n$-угольников. В случае круга с радиусом, равным 10, при $n = 96$ Лю Хуэй получил

$$314\frac{64}{625} < S < 314\frac{169}{625}.$$

На этом основании он принял за приближенное значение площади этого круга 314, что соответствует $\pi = 3{,}14$. Продолжив вычисление до $n = 3072$, Лю Хуэй получил более точное приближение, в десятичных дробях равное 3,14159. С еще большей точностью значение π было вычислено астрономом, математиком и инженером Цзу Чун-чжи (430—501), который в недошедшем до нас трактате доказал, что

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Ему же принадлежит приближение $\pi = 355/113$, равное одной из подходящих дробей при разложении π в непрерывную дробь. Точность этих вычислений была превзойдена только ал-Каши в XV в., приближение $\pi = 353/113$ вновь нашел голландец В. Ото в XVI в.

Значение математики древнего и средневекового Китая

Обзор математики Китая показывает, что она развивалась до XIV в. преимущественно как совокупность вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения на счетной доске некоторых классов задач арифметики, алгебры и геометрии. Наиболее значительными из этих алгоритмов являются метод фан-чэн решения систем линейных уравнений и метод тянь-юань решения алгебраических уравнений высших степеней. Математики Китая широко пользовались алгебраическими и геометрическими преобразованиями, располагали доказательствами ряда тождеств и геометрических теорем, хотя китайская наука имела мало общего с дедуктивной наукой греческого образца. Важнейшим достижением китайских математиков было введение отрицательных чисел, которым они дали простейшее толкование.

Китайская математика не была изолирована от развития математики в других странах. И, хотя научные взаимосвязи Китая и других стран изучены еще недостаточно, мы уже сейчас можем указать на ряд несомненных фактов взаимного влияния математики Китая, Индии и стран ислама. Появление отрицательных чисел, доказательства теоремы Пифагора и некоторых характерных задач в Индии через несколько столетий после их появления в Китае указывает на несомненный культурный обмен между этими странами в первые столетия нашей эры; об этом же свидетельствует близость китайской и индийской нумераций. Мы уже говорили о буддистских ученых в Китае в VII в. О культурном обмене между Китаем и Средней Азией свидетельствует появление в Средней Азии правила двух ложных положений, метода Горнера для извлечения корней любой степени и десятичных дробей после их появления в Китае; мы уже указывали на взаимные посещения ученых Китая и стран ислама в XIII—XV вв. Через Индию и страны ислама математика Китая оказывала влияние на математику Европы, хотя многие важные открытия математиков Китая стали известны в Европе значительно позже того, как европейские ученые пришли к этим открытиям самостоятельно. Дальнейшие исследования, несомненно, прольют новый свет на взаимное влияние математики средневекового Китая и других стран.