ВТОРАЯ ГЛАВА

ИНДИЯ

Древняя и средневековая Индия

Еще в середине III тысячелетия до н. э. в долине Инда существовала развитая цивилизация, одним из центров которой был город, раскопанный вблизи холмов Мохенджо-Даро. Эта цивилизация, основанная первоначальным населением Индии, во II тысячелетии до н. э. была разрушена арийскими племенами, пришедшими с Гималаев. Потомками первоначального населения Индии являются дравиды Южной Индии. Завоеватели, создали рабовладельческие государства в I тысячелетии до н. э. В этих государствах велась борьба за власть, главным образом между воинами — кшатриями и священниками — брахманами, нередко вспыхивали восстания угнетенных сословий и каст. В I тысячелетии до н. э. появляются священные книги брахманов «Веды» («Знания»). К VII—V вв. до н. з. относятся первые индийские письменные математические памятники.

В V в. до н. э. в Индии возникает новая религия —буддизм, отражавшая недовольство угнетенных слоев. Не позже IX в. до н. э. была установлена связь Индии с Вавилоном.

В VI в. до н. э. часть Северной Индии была захвачена персидским царем Дарием. В 327—325 гг. до н.э. еще большая часть Северной Индии была завоевана Александром Македонским, а впоследствии вошла в состав царства Селевкидов. Вождь восстания против греков Чандрагупта основал новую династию Маурья в Магадхе (ныне Бенгалия) со столицей в Паталипутре (ныне Патна). Внук Чандрагупты Ашока (273—232 гг. до н. э.) объединил почти всю Северную Индию и значительную часть Южной Индии, при нем буддизм становится государственной религией индийцев. Часть Индии, входившая в царство Селевкидов, вместе с югом Средней Азии и Афганистаном в III в. до н. э. вошла в состав Греко-Бактрийского царства, оставившего заметный след в развитии культуры Индии. В I в. до н. э. эти земли вошли в царство Великих Кушан, во главе которого стояли скифские завоеватели. Государство Кушан установило торговые отношения с Китаем и Римом.

В IV в. н. э. Северную и Центральную Индию объединила династия Гупта. В это время появляются астрономо-математические труды «сиддханты» («учения»). В царстве Гупт в V—VI вв. работают уроженец Паталипутры Ариабхата и уроженец Удджайна Варахамихира, в VII в. в Удджайне работает Брахмагупта. В VII—VIII вв. «сиддханты» и труды Ариабхаты и Брахмагупты становятся известны в странах ислама и переводятся на арабский язык. В это же время переводятся на персидский и арабский языки многие произведения индийской литературы, например «Калила и Димна».

В VIII в. многовековая борьба между буддизмом и древней индийской религией заканчивается победой последней. Буддисты изгоняются из Индии и уходят в другие страны (ныне буддизм — основная религия в Бирме, Тибете и Монголии и широко распространенная религия в Японии и Китае).

В это же время Северная Индия подвергается нападениям мусульманских завоевателей. В XI в. Северную Индию захватывает Махмуд Газневи. Основанная им династия правит в Северной Индии и после его изгнания из Ирана.

После опустошительных войн в Северной Индии центр науки и культуры переносится в Южную Индию. Здесь работают математики и астрономы Магавира (IX в.), Шридхара (IX—X вв.), Бхаскара (XII в.), Нарайана (XIV в.), Нилаканта (XV—XVI вв.).

В начале XIII в. почти вся Индия объединяется Делийским султаном. В XVI в. значительная часть Индии была покорена Бабуром, потомком Тимура; основанная им империя по имени монгольских предков Тимура называется империей Великих Моголов.

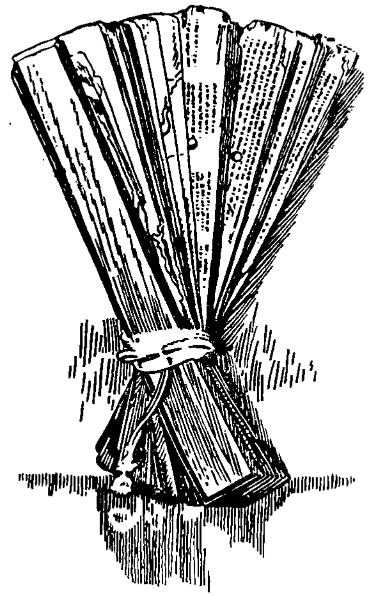
Последним ярким событием научной жизни Индии перед ее завоеванием европейцами была деятельность правителя Раджпутаны (ныне Раджастан) Савай Джай Сингха (1686—1743), основавшего несколько астрономических обсерваторий в Северной и Центральной Индии и составившего астрономические таблицы.

Большинство научных трактатов индийцев написаны на санскрите — языке религиозных книг брахманов. Этот язык объединял многочисленные народы Индии, говорившие на различных языках. Только в XVII в. индийцы стали писать научные трактаты на разговорных языках: анонимный южно-индийский трактат «Йукти бхаша» («Разъяснение математики») написан на языке малайялам, а астрономические таблицы Савай Джай Сингха — на распространенном в Северной Индии персидском языке.

Следует отметить, что наши сведения о математике древней и средневековой Индии весьма неполны и о некоторых этапах развития индийской математики мы можем судить только предположительно. Некоторые сведения о математике древней Индии мы черпаем из комментариев к священным книгам брахманов «Веды». В одной из таких книг, относящейся к VII—V вв. до н. э., «Шулва сутра» («Правила веревки») излагаются способы построения алтарей и связанные с ними вычисления.

Первые «сиддханты», появившиеся в V в. н. э., имеют явно эллинистическое происхождение. «Пулиса-сиддханта» приписывается некоему Паулисе из Саинтры. По-видимому, ее автором был александрийский астроном Паулос, бежавший в Индию после разгрома научного центра в Александрии. О греческом происхождении свидетельствует и название «Ромака-сиддханты»: жителей Восточной Римской империи часто называли ромеями (впоследствии арабы называли их румами). В сиддхантах применяются некоторые греческие термины: расстояние от центра называется «кендра» (от греческого κέντρον — центр), минута — «липта» (от греческого λεπτή). Важнейшая из сидхант была написана Брахмагуптой около 628 г. Она называлась «Брахма-спхута-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы») и состояла из 20 книг, большая часть которых была отведена астрономии, но XII книга была специально посвящена арифметике и геометрии, а XVIII книга — алгебре.

Многие трактаты были написаны в стихах, чтобы правила, сформулированные в коротких строках, можно было заучить наизусть. Например, «Тришатика» Шридхары (IX — X вв.) получила свое название от слова



Рукопись «Лилавати», написанная на пальмовых листьях ок. 1400 г. Из коллекции Д. Ю. Смита (*D. E. Smith*. History of mathematics. New York, 1951, v. 1, p. 26).

«тришата» — «триста», так как содержала триста стихов. Весьма краткое стихотворное изложение, почти непонятное непосвященным, разъяснялось в комментариях.

Крупнейшему индийскому математику XII в. Бхаскаре принадлежит трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»), переписанный в XIII в. на полосках пальмовых листьев. Этот трактат состоит из четырех частей, из которых «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, а «Биджаганита» — алгебре, остальные две части астрономические. Название «Лилавати» относится то ли к дочери ученого, к которой автор обращается с задачами, то ли к самой арифметике.

Индийская нумерация

Счет целых чисел в Индии с древних времен носил десятичный характер. Санскрит — индоевропейский язык, родственный индоевропейским языкам Европы (для сравнения приведем числительные 1 — эка, 2 — дви, 3 — три). В названиях чисел применялся и аддитивный и субстрактивный принципы; например, 19 можно было назвать и «навадаша», (девять-десять) и «экауна — вимсати» (без одного двадцать). В отличие от других индоевропейских языков, в санскрите существуют названия для 10^n до $n > 50$.

Одной из первых нумераций, применявшихся в Индии, были цифры «карошти», которыми пользовались в Северной Индии со времени персидского завоевания до III в. н. э. вместе с сирийским письмом. Цифры карошти были во многом похожи на финикийские: числа записывались справа налево, знаки для 1 и 10 были весьма близки к финикийским, имелся знак для 20, представляющий собой соединение двух знаков для 10, и знак для 100, который, как и в финикийской нумерации, не повторялся, а справа от него записывалось число сотен. Однако, в отличие от финикийских цифр, здесь употреблялся специальный знак для 4. Цифры карошти изображены в четвертом столбце таблицы на стр. 159.

Начиная с VI в. до н. э. в Индии были широко распространены цифры «брахми». В пятом столбце той же таблицы изображены цифры брахми, воспроизводящие надписи в пещере Назик. В отличие от цифр карошти, цифры брахми записывались слева направо, как индийское письмо. Однако в обеих нумерациях было немало общего. Не говоря уже о том, что первые цифры в обоих случаях изображали три палочки, а четвертая — четыре палочки (в случае карошти — в виде креста), общим было то, что до сотни в обоих случаях применялся чисто аддитивный принцип, а начиная с сотен этот принцип соединялся с мультипликативными: в нумерации брахми последний принцип применялся не только к знаку для 100, но и к знаку для 1000.

Следует отметить, что первые три знака в обеих нумерациях совпадают с китайскими; встречалась в Китае и четверка в виде креста. Важным отличием цифр брахми от карошти было (как и в китайских цифрах) наличие специальных знаков для чисел от 1 до 9; возможно, что цифры карошти представляли собой промежуточную стадию между обозначениями чисел от 1 до 9 с помощью повторения знака для 1, применявшимися в Финикии, Вавилоне и Египте, и обозначениями этих чисел с помощью специальных знаков.

Эта особенность цифр брахми стала предпосылкой создания в Индии десятичной позиционной нумерации.

Первая известная нам запись с помощью цифр брахми, в которой применяются только первые девять цифр, а десятки и сотни обозначаются теми же цифрами, что и единицы, относится к VI в. н. э.: это дарственная запись от 595 г. н.э., в которой 346-й год записан цифрами брахми 346. Нуля не было, вместе него на счетной доске оставлялся пустой столбец.

Наряду с цифровой записью в Индии широко применялась словесная система обозначения чисел, этому способствовал богатый по своему словарному запасу санскритский язык, имеющий много синонимов. При этом нуль обозначался словами «пустое», «небо», «дыра»; единица — предметами, имеющимися только в единственном числе: Луна, Земля; двойка — словами «близнецы», «глаза», «ноздри», «губы»; четверка — словами «океаны», «стороны света» и т. д.

Применение позиционного принципа в словесной нумерации, в котором одно и то же слово в зависимости от места имеет разное числовое значение, а названия разрядов опускаются, зафиксировано еще в V в. Например, число 1021 записывалось словами «Луна — дыра — крылья — Луна». Одно из названий нуля — «шунья» (пустое) стало впоследствии основным. Когда в VIII в. индийские сиддханты переводили на арабский язык, слово «шунья» перевели арабским словом «сыфр», имеющим то же значение. Слово «сыфр» при переводе арабских сочинений на латынь было оставлено без перевода в виде ciffra, откуда происходит французское и английское название нуля zero, немецкое слово Ziffer и наше слово «цифра», также первоначально означавшее нуль.

Но в это же время на судьбу нумерации значительное влияние оказали математики. В области вычислений требовались более удобные системы счисления и Ариабхата предложил записывать цифры санскритскими буквами.

Первое достоверное свидетельство о записи нуля относится к 876 г., в настенной надписи из Гвалиора (Индия) имеется число 270. Одни исследователи (Г. Фрейденталь) предполагают, что нуль был заимствован у греков, которые ввели в качестве нуля букву о в шестидесятиричную систему счисления, употребляемую ими в астрономии. В Vв. в Индии появилась переводная греческая астрономическая литература. Освоение ее индийцами, возможно, повлияло и на перемену порядка следования цифр (от старших к младшим, как это было у вавилонян и греков) и на запись дробей, аналогичную их записи в эллинистическом Египте.

Другие (Дж. Нидэм), наоборот, считают, что нуль пришел в Индию с востока, он был изобретен на границе индийской и китайской культур. Обнаружены более ранние надписи от 683 и 686 гг. в нынешних Камбодже и Индонезии, где нуль изображен в виде точки и малого кружка. Те же доводы, что и у Фрейденталя (порядок следования разрядов, запись дробей, переводная литература), могут быть приведены в пользу не греческого, а китайского происхождения нуля.

На основе цифр брахми выработались современные индийские цифры «деванагари» (божественное письмо), применяющиеся в десятичной позиционной системе, от которой происходят десятичные позиционные системы арабов и европейцев.

Первым свидетельством об индийской десятичной позиционной системе являются слова сирийского христианского епископа Севера Себохта, жившего в одном из монастырей в верховьях Евфрата в VII в. В рукописи 662 г. Себохт писал: «Я не стану касаться науки индийцев... их системы счисления, превосходящей все описания. Я хочу лишь сказать, что счет производится с помощью девяти знаков[1]».

Мы называем изобретенные индийцами цифры 1, 2, .., 9 и нуль арабскими, так как заимствовали их у арабов, но сами арабы называли эти цифры индийскими, а арифметику, основанную на десятичной системе —«индийским счетом» (хисаб ал-Хинд).

Арифметические действия

Если наши геометрические курсы в значительной степени восходят к греческой математике, то наша арифметика имеет, несомненно, индийское происхождение. Именно от индийской позиционной нумерации происходит наша нумерация, индийцы же первые разработали правила арифметических действий, основанные на этой нумерации.

К основным арифметическим действиям индийцы относили сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб и извлечение квадратного и кубического корней.

Вычисления индийцы производили на счетной доске, покрытой песком или пылью, а то и прямо на земле. Поэтому арифметические вычисления иногда назывались «дхули-карма» — работа с пылью. Числа записывались заостренной палочкой. Чтобы хорошо различать цифры, их писали доволь-

[1] *F. Nau.* Notes d'astronomie syrienne. Journal Asiatique, ser. 6, 1910, v. 16, p. 225.

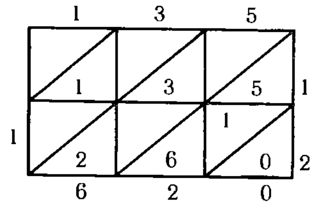


Рис. 49

но крупно, поэтому промежуточные выкладки стирались. Это наложило отпечаток на индийские способы вычисления.

Сложение и вычитание производились как справа налево, т. е. от низших разрядов к высшим, так и слева направо, от высших разрядов к низшим.

Для умножения существовало около десятка способов. При основном способе умножения операцию можно было начинать как с низшего, так и с высшего разряда. В процессе умножения цифры множимого постепенно стирались, а на их месте записывались цифры произведения. Например, чтобы умножить 135 на 12 сначала писали

$$\begin{array}{r} 12 \\ 135 \end{array}$$

Перемножая $5 \cdot 12$ и стирая 5, получали

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1360 \end{array}$$

и, сдвигая множитель

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1360. \end{array}$$

Перемножая $3 \cdot 2$ и добавляя 6 к 6, стирали 6 и записывали на ее месте 2, а единицу держали в уме или записывали в стороне. Эту единицу прибавляли к произведению $3 \cdot 1$ и сумму 4 писали внизу вместо стертой тройки

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1460. \end{array}$$

Далее перемножали $1 \cdot 2$ и прибавляли 2 к 4 внизу, т. е. стирали 4 и на ее месте писали 6. И, наконец, $1 \cdot 1 = 1$, поэтому 1 внизу не стирали. В заключение стирали множитель, и на доске оставалось произведение 1620.

Индийцы применяли и более удобные приемы умножения. Например, расчерчивали счетную доску на сетку прямоугольников, каждый из которых разделен пополам диагональю, по стронам сетки записывали сомножители, а промежуточные произведения писали в треугольниках и складывали их по диагоналям (рис. 49).

При делении делитель подписывался под делимым так, чтобы первые их цифры находились одна под другой, и из цифр делимого, написанных над делителем, вычиталось максимальное кратное делителя, не превосходящее числа, образованного этими цифрами. Затем делитель передвигался на один разряд вправо и таким же образом вычитался из цифр остатка.

Существует несколько способов возведения в квадрат и куб. Шридхара в своей «Патиганите» («Искусство вычисления на доске») излагает методы, которые в наших обозначениях можно выразить формулами

$$n^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad n^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$n^2 = (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab, \quad n^3 = (n - 1)^3 + 3n(n - 1) + 1,$$
$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1), \quad n^3 = n(n + a)(n - a) + a^2(n - a) + a^3,$$
$$n^2 = (n - a)(n + a) + a^2, \quad n^3 = n + 3n + 5n + \ldots + (2n - 1)n.$$

Первое описание процесса извлечения квадратного и кубического корней встречается в Индии еще в V—VI вв. у Ариабхаты.

Индийцы называли корень «пада» — основание, сторона и «мула» — основание; оба эти слова, по-видимому, перевод греческих слов βάσις — основание или πλευρά — сторона, применявшихся для обозначения квадратного корня. Так как слово «мула» имеет также значение «корень растения», арабские переводчики индийских сиддхант перевели в VIII в. этот термин арабским словом «джизр», также обозначающим корень растения. Поэтому латинские переводчики в XII в. перевели арабское название корня латинским словом radix, откуда и происходят наши термины «корень» и «радикал».

Извлечение квадратного корня в Индии, как и в Китае, основано на разложении квадрата двучлена, но при этом (как и при извлечении кубического корня) не применялся метод Горнера.

Так как при выполнении арифметических действий приходилось стирать промежуточные выкладки, проверить непосредственно, верны ли окончательные результаты, было невозможно. Для проверки умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня индийцы рекомендовали не обратные операции, а так называемую проверку с помощью девятки, основанную на том, что остаток при делении целого числа на 9 равен остатку при делении на 9 суммы цифр этого числа. Первое описание этого правила применительно к умножению, делению с остатком и извлечению квадратного и кубического корней встречается у Ариабхаты II (X в.). Если мы назовем пробой остаток от деления на 9 суммы цифр данного числа, то, например, при умножении двух чисел проба произведения должна быть равна пробе произведения проб множителей. Равенство проб является только необходимым, но не достаточным условием правильности действия, чего индийцы не отмечают. Проверка с помощью девятки применялась математиками стран ислама, познакомившимися с ней по индийским источникам, а от арабов это правило попало к европейцам. Недостаточность этого правила отмечалась Н. Шюке и Л. Пачоли только в конце XV в.

Дроби

В Индии дроби известны очень давно. Еще в середине II тысячелетия до н. э. упоминаются такие дроби ардха ($^1/_2$), пада ($^1/_4$), три-пада ($^3/_4$) и кала ($^1/_{16}$).

Индийцы записывали дроби так, как это делается в настоящее время: числитель над знаменателем, только без дробной черты. Друг от друга дроби отделялись вертикальными и горизонтальными линиями. Так, дробь $\frac{a}{b}$ записывалась $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline\end{array}$, где (как и в дальнейшем) буквы a, b стоят вместо конкретных цифр. Именно об этой записи дробей мы говорили выше, когда упоминали о влиянии на индийскую математику александрийских астрономов первых веков нашей эры и ученых Китая, так как эта запись встречалась и в позднегреческих папирусах и в китайских книгах.

Сложение обозначалось записью дробей рядом. Для обозначения вычитания употреблялись точка или знак $+$ справа, и, например, выражение

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$$

изображали в виде

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & \dot{c} & e+\\ b & d & f\\ \hline\end{array}$$

В смешанной дроби $a\frac{b}{c}$ целая часть помещалась над дробью:

$$\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ c\\ \hline\end{array}$$

Иногда целое число изображали дробью со знаменателем 1. Поэтому смешанную дробь $a\frac{b}{c}$ можно было представить в виде

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b\\ 1 & c\\ \hline\end{array}$$

При умножении дроби записывали рядом:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c\\ b & d\\ \hline\end{array}$$

а при делении — одну под другой:

$$\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \\ c\\ d\\ \hline\end{array}$$

Как видно, сложение и умножение дробей изображались одинаково. То же относится к делению целого числа a на дробь $\frac{b}{c}$, которое записывали

$$\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ c\\ \hline\end{array}$$

так же, как смешанную дробь. О смысле подобного рода записей можно было судить по контексту. Правила действий над дробями почти не отличались от современных. Так, Шридхара приводит правила: «[После приведения дробей] к общему знаменателю сложи числители», «Произведение дробей равно произведению числителей, деленному на произведение знаменателей», «Квадратный корень [дроби] равен квадратному корню числителя, деленному на квадратный корень знаменателя» [1].

Для приведения к общему знаменателю индийские ученые сначала составляли произведение знаменателей всех сомножителей, а начиная с IX в. пользовались уже их наименьшим кратным. Так поступал, например, Шридхара.

Задачи на пропорции

В индийских сочинениях встречаются многочисленные задачи на простое и сложное тройное правило, пропорциональное деление, правило товарищества, правило смешения, простые и сложные проценты, прогрессии. Одни задачи имели непосредственное практическое значение, другие составлялись для упражнения и развлечения.

При решении задач, которые выражаются уравнением $ax = c$, большое место занимало уже знакомое правило одного ложного положения.

В анонимной рукописи VI—VIII вв., найденной близ селения Бахшали в Северо-Западной Индии (так называемая «Бахшалийская рукопись»), это правило применяется также к задачам, приводящимся к уравнению $ax + b = c$. Решение имеет вид

$$x = x_1 + \frac{c - c_1}{a},$$

где $c_1 = ax_1 + b$.

Еще более широкое применение имело тройное правило («трай-рашика» — буквально «три места»), состоящее в нахождении числа x, составляющего с тремя данными числами a, b, c пропорцию

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Это правило было известно еще египтянам и грекам, но индийцы выделили его как специальный арифметический прием и разработали схемы, позволяющие применять его к задачам, содержащим несколько величин, связанных пропорциями. На тройном правиле были основаны индийские правила 5,7, 9 и т. д. величин (панча-рашика, сапта-рашика, нава-рашика и т. д.). Например, в правиле 5 величин требуется найти величину x по пропорциям

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{y}, \qquad \frac{d}{e} = \frac{y}{x},$$

и ответ дается в виде

$$x = \frac{bce}{ad}.$$

Индийцы пользовались также «обратным тройным правилом» (вьяста трай-рашика), когда в задаче вместо прямой пропорциональности указы-

[1] *Шридхара*. Патиганита. «Физико-математические науки в странах Востока», 1966, вып. I (IV), стр. 163—164.

вается обратная. Эти правила также были заимствованы у индийцев учеными стран ислама, а через них — европейцами. В странах ислама правила 5,7, и т.д. величин были обобщены на любое нечетное число. В Европе эти правила, получившие название цепных правил, находились в центре внимания авторов арифметических руководств.

Алгебра

Как и в Вавилоне и Китае, в Индии высокого расцвета достигли алгебраические вычисления. Алгебру, вместе с решением целочисленных неопределенных уравнений, индийцы называли «биджаганита» — «искусство вычисления с элементами» или «авьяктаганита» — «искусство вычисления с неизвестными».

Выдающимся достижением индийских математиков было создание развитой алгебраической символики. Эта символика была даже богаче, чем у Диофанта. Впервые появились особые знаки для многих неизвестных величин, свободного члена уравнения, степеней. Большинство символов представляет собой первые слоги соответствующих санскритских терминов.

Неизвестную величину индийцы называли «йават-тават» (столько, сколько), для обозначения неизвестной служила буква, означающая слог «йа». Если неизвестных было несколько, то их называли словами, выражающими различные цвета: калака (черный), пилака (голубой), питака (желтый), панду (белый), лохита (красный), а обозначали первыми слогами соответствующих слов: ка, ни, пи, па, ло. Свободный член в уравнениях сопровождался первым слогом слова «рупа» (целый). Иногда неизвестная обозначалась знаком нуля, так как первоначально в таблицах, например, пропорциональных величин, для нее оставлялась пустая клетка.

Знаки, представляющие собой обозначения первых слогов слов, применялись для основных действий. Сложение обозначалось знаком «йу» («йута» — сложенный), умножение — «гу» («гунита» — умноженный), деление — «бха» («бхага» — деленный).

Вычитание обозначалось точкой над вычитаемым или знаком + справа от него (например, вычитание 5 обозначалось 5 или 5+; выше это обозначение встречалось нам при вычитании дробей). Знаки сложения и умножения часто опускались. В качестве примеров приведем записи

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{array}\right| \quad \text{для} \quad \frac{x}{1}+\frac{5}{2},$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \ \text{йу} \quad \text{для} \quad \frac{x}{1}+\frac{3}{4},$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+ & 1 & 1+ & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{array} \ \text{бха} \ \right\|\left.\begin{array}{c} 36 \\ \\ 1 \end{array}\right| \quad \text{для} \quad \frac{36}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)}.$$

$$\left|\begin{array}{c} 40 \\ 1 \end{array} \ \text{бха} \ \right\|\begin{array}{c} 160 \\ 1 \end{array} \ \left|\begin{array}{c} 13 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\| \quad \text{для} \quad \frac{160}{40}\cdot 13\frac{1}{2}.$$

Обозначения степеней представляли собой сочетания слогов «ва» («варга» — квадрат), «гха», («гхана» — куб) и слова «гхата» — произведение, т. е. степени и неизвестных обозначались:

x^2 = ва,
x^3 = гха,
x^4 = ва ва,
x^5 = ва гха гхата,
x^6 = ва гха,
x^7 = ва ва гха гхата,
x^8 = ва ва ва ,
x^9 = гха гха.

Мы видим, что для степеней, показатели которых имеют вид 2^α, 3^β, обозначения состоят из слога «ва», повторенного α раз, и слога «гха», повторенного β раз. Таким образом, степени этого вида образуются по мультипликативному принципу. Напротив, обозначения степеней, показатель которых не представляется в таком виде, образуются по аддитивному принципу, причем слово «гхата» (произведение) означает, что степень такого типа представляет собой произведение степеней, суммой показателей которых является показатель этой степени (например, $x^5 = x^{2+3} = x^2x^3$). Следовательно, индийская символика принципиально отличается от символики Диофанта, где названия степеней были основаны на чисто аддитивном принципе.

Квадратный корень обозначался слогом «му» — от слова «мула» В качестве примеров приведем записи

1	1		5	
	1	йу	1	му

означает $\sqrt{11+5}$,

1	1	7+	
	1	1	му

означает $\sqrt{11-7}$.

Знака равенства не было: обе части уравнения писали в две строки так, чтобы одинаковые степени стояли друг под другом. Если неизвестная отсутствовала, то записывали ее знак с коэффициентом нуль. Уравнение

$$10x - 8 = x^2 + 1$$

записывается в виде

йа ва 0 йа 10 ру $\dot{8}$
йа ва 1 йа 0 ру 1 ;

уравнение

$$8x^3 + 4x^2 + 10y^2x = 4x^3 + 12\ y^2x$$

записывается в виде

йа гха 8 йа ва 4 ка ва йа 10
йа гха 4 йа ва 0 ка ва йа 12.

Символы применялись и в учении о прогрессиях. Первый член обозначается «а» от «ади»—(первый член), разность арифметической прогрессии — — «ча» или «у» от «чайа» или «уттара» (разность прогрессии), число членов — «па» или «га» от «пада» или «гачха» (число членов), сумма прогрессии — «сан» или «ган» от «санкалита» или «ганита» (сумма). Например, в анонимном комментарии к «Патиганите» приводится запись

а	у	па	сан 0
10	2 +	1/4	

т. е.

первый член прогрессии	разность прогрессии	число членов	сумма
10	−2	1/4	x

Итак, индийские ученые сделали большой шаг в создании символической алгебры, хотя их обозначения были громоздки, а сами знаки, т. е. санскритские буквы, имели сложное начертание.

Отрицательные и иррациональные числа

Индийские математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н. э.), систематически пользовались отрицательными числами и трактовали положительное число как имущество, а отрицательное — как долг. Брахмагупта приводит все правила арифметических действий над отрицательными числами. Ему еще не была известна двузначность квадратного корня, но уже в 850 г. Магавира в своей книге «Ганита-сара-санграха» («Краткий курс математики») пишет: «Квадрат положительного или отрицательного — числа положительные, их квадратные корни будут соответственно положительными и отрицательными. Так как отрицательное число по своей природе не является квадратом, то оно не имеет квадратного корня» [1]. Последние слова Магавиры показывают, что он ставил вопрос и об извлечении корня из отрицательного числа, но пришел к выводу, что эта операция невозможна. Не исключено, что об отрицательных числах индийские ученые узнали в результате контактов с китайской наукой. Прямых свидетельств в пользу такого предположения мы не имеем. Во всяком случае, в Индии отрицательные числа не применялись при решении систем линейных уравнений (мы не находим здесь ничего подобного методу фан-чэн). Индийцы называли положительные числа «дхана» или «сва» (имущество), а отрицательные — «рина» или «кшайа» (долг). Впоследствии этот термин мы встретим в этом же значении в странах ислама («дайн» у Абу-л-Вафы) и в Европе (debitum у Леонардо Пизанского).

Индийцы применяли символ квадратного корня «му» не только к полным квадратам, но и к полученным квадратичным иррациональностям. Бхаскара с помощью правил

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

[1] *А. И. Володарский.* О трактате Магавиры «Краткий курс математики». «Физико-математические науки в странах Востока», 1968, вып. II(V), стр. 98—130.

и

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

заимствованных, быть может, у греков, производил преобразования квадратичных числовых иррациональностей и таким образом упрощал довольно сложные выражения, как, например,

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

Возможно, что исходными здесь были преобразования правой части.

Некоторые преобразования, например,

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3},$$

могли использоваться для более удобного приближенного извлечения корней.

Такое свободное пользование иррациональностями также было воспринято в странах ислама, где Омар Хайям в XI в. предложил расширить понятие числа до того, что мы называем положительным иррациональным числом.

Линейные уравнения

Задачи, приводящие к решению линейного уравнения с одним неизвестным, имеются у Ариабхаты. К линейному уравнению, в частности, приводит его задача, обошедшая в дальнейшем под названием «задачи о курьерах» мировую алгебраическую литературу,— она приводится и в нынешних школьных руководствах. В этой задаче требуется определить время встречи двух небесных светил по данным скоростям v_1, v_2 и расстоянию a между ними. Ариабхата сообщает решение

$$t=\frac{a}{v_1-v_2}$$

при движении в одну сторону; если $v_1 < v_2$, то встреча произошла в прошлом. При движении навстречу необходимо расстояние разделить на сумму скоростей. О случае, когда встреча произошла в прошлом, Ариабхата не упоминает, и мы не знаем, рассматривает ли он этот случай или нет, так же как не знаем, были ли ему известны отрицательные числа. Впрочем, вряд ли он умел истолковать отрицательное значение t, соответствующее $v_1 < v_2$. Индийские математики и позднее не принимали в расчет отрицательные решения уравнений и для этого изменяли подходящим образом условия задач.

Заметим, что «задачи о курьерах» в некоторых более сложных вариантах (например, движение с переменной скоростью, растущей в арифметической прогрессии) приводят и к квадратному уравнению,— такой пример есть уже в «Бахшалийской рукописи».

У Магавиры, Бхаскары и других авторов имеются задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными. Так, одна из задач Магавиры приводит к системе

$$\begin{cases} 9x + 7y = 107, \\ 7x - 9y = 100. \end{cases}$$

Метод решения, изложенный Магавирой, не отличается от современного метода решения при помощи уравнивания коэффициентов.

Однако дело не ограничивалось столь простыми задачами. Были выработаны правила решения систем вида

$$\sum_k x_k - x_i = c_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(складывая все уравнения почленно, находили $\sum_k x_k$) и других, несколько более общих, например:

$$a_i \sum_k x_k - b_i x_i = c_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Разумеется, речь шла всегда о задачах с численными условиями. но правила формулировались в общем виде. Такие задачи встречаются, постепенно усложняясь, у Ариабхаты, Брахмагупты, Магавиры, Нарайаны. Но, как мы уже сказали, общего алгоритма вроде метода фан-чэн индийские математики не создали.

Квадратные уравнения

Задачи на квадратные уравнения имеются в «Ведах» и «Шулва-сутре», но с решением их мы впервые встречаемся, по-видимому, у Ариабхаты. Так, задача на сложные проценты приводит к уравнению

$$tx^2 + px = qp.$$

Решение этого уравнения, приведенное Ариабхатой словесно, можно записать в виде

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t}.$$

Подобного рода задачи, так же как «задачи о курьерах», приводились затем многими авторами как в Индии, так и в других странах. С такой задачи начинал раздел квадратных уравнений в своем широко известном учебнике алгебры А. Клеро (1746). К квадратному уравнению приводит также задача на определение числа членов арифметической прогрессии по данным сумме, первому члену и разности.

Немного спустя квадратные уравнения появляются в «Бахшалийской рукописи». Примерно в это же время большой вклад в решение квадратных уравнений внес Брахмагупта, который сформулировал общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к канонической форме

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0,$$

где коэффициент при неизвестной первой степени b и свободный член c могут принимать и отрицательные значения.

Решение Брахмагупты такое же, как у Ариабхаты. Шридхара словесно формулирует решение в несколько другом виде:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Брахмагупта еще не говорит о двух корнях квадратного уравнения, но Магавира уже знает об этом, что видно из его задачи, в которой требуется найти число павлинов в стае, $^1/_{16}$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $^1/_9$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала. Магавира приводит эту задачу к уравнению

$$\left(\frac{1}{16^2} + \frac{15^2}{9^2 \cdot 16^2}\right) x^2 + 14 = x$$

и формулирует решение квадратного уравнения вида

$$\frac{l}{m} x^2 - x = -n$$

с помощью правила

$$x = \frac{\frac{m}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{l} - 4n\right)\frac{m}{l}}}{2},$$

говоря, что «квадратный корень можно как прибавлять, так и вычитать» [1]. В нашем случае условиям задачи удовлетворяет только корень 48, так как корень $\frac{16 \cdot 21}{17}$ дробный.

Бхаскара уже формулирует условие существования двух положительных корней.

Индийцы решали и системы уравнений; например, Бхаскара решал задачу об определении катетов x и y и гипотенузы z прямоугольного треугольника по его периметру и площади, сводящуюся к системе

$$xy = p, \; x + y + z = q, \; x^2 + y^2 = z^2.$$

Бхаскара рассматривал также специально подобранные уравнения третьей и четвертой степеней, целочисленные корни которых он находил путем несложных преобразований. Так, уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

Бхаскара решает следующим образом: прибавляя к обеим частям $4x^2 + 400x + 1$, он получает

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000.$$

Извлечение корня из обеих частей дает

$$x^2 + 1 = 2x + 100,$$

откуда

$$x = 11.$$

---

[1] *M. Rangacarya.* The Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya, IV, 57.

Неопределенные уравнения

Крупных успехов достигли индийские математики в решении неопределенных уравнений, возникших в связи с календарно-астрономическими задачами, в которых надо было определять периоды повторения одинаковых относительных положений небесных светил с различными временами обращения.

В отличие от Диофанта, искавшего только рациональные решения, индийцы дали способ решения неопределенных уравнений в целых положительных числах. Решение в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными

$$ax + b = cy \qquad (1)$$

приводит уже Ариабхата, но более подробно оно изложено в сочинениях Брахмагупты и Бхаскары. Способ решения носит название способа «рассеивания» или «размельчения» и в современных обозначениях состоит в следующем. Если числа a и c взаимно просты и $a > c$, то частное a/c можно разложить в непрерывную дробь $(q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n)$. Обозначим подходящую дробь $(q_0, q_1, \ldots, q_k)$ через P_k/Q_k. Предпоследняя подходящая дробь P_{n-1}/Q_{n-1} есть $(q_0, q_1, \ldots, q_{n-1})$, а последняя P_n/Q_n совпадает с a/c. Тогда всевозможные решения уравнения (1) выражаются равенствами

$$x = -(-1)^n bQ_{n-1} + Q_n t, \qquad y = -(-1)^n bP_{n-1} + P_n t, \qquad (2)$$

где t может принимать любые целые значения. В решенном Бхаскарой уравнении

$$100x + 90 = 63y$$

имеем

$$\frac{100}{63} = (1, 1, 1, 2, 2, 1, 3),$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = (1, 1, 1, 2, 2, 1) = \frac{27}{17}$$

и согласно (2)

$$x = 90 \cdot 17 + 63t = 1530 + 63t,$$
$$y = 90 \cdot 27 + 100t = 2430 + 100t,$$

наименьшие целые положительные решения — при $t = -24$:

$$x = 18, \quad y = 30.$$

В другом решенном им уравнении

$$60x + 16 = 13y$$

имеем

$$\frac{60}{13} = (4, 1, 1, 1, 1, 2),$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = (4, 1, 1, 1, 1) = \frac{23}{5}$$

и согласно (2)

$$x = -16 \cdot 5 + 13t = -80 + 13t,$$
$$y = -16 \cdot 23 + 60t = -386 + 60t,$$

наименьшие целые положительные решения — при $t = 7$: $x = 11$, $y = 52$.

Вершиной достижений индийских математиков в теории чисел является решение в целых положительных числах общего неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными:

$$ax^2 + b = y^2 \tag{3}$$

и его важного частного случая

$$ax^2 + 1 = y^2, \tag{4}$$

где a — целое неквадратное число, встречавшееся у греческих математиков. Уравнения (3) и (4) рассматривались Брахмагуптой и Бхаскарой. Последний на примерах изложил метод, называемый в настоящее время циклическим. Метод состоит в том, что прежде всего подбираются числа, связанные равенством

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2,$$

причем добиваются того, чтобы b_1 было возможно меньшим. Числа x_1 и b_1 предполагаются взаимно простыми. Далее составляется линейное уравнение

$$x_1t + y_1 = b_1x_2,$$

которое можно решить способом «рассеивания», и берутся такие t и x_2, чтобы $|t^2 - a|$ было возможно меньшим. Нетрудно проверить, что число

$$\frac{t^2 - a}{b_1} = b_2$$

целое, а выражение $ax_2^2 + b_2$ оказывается целым квадратным числом y_2^2, т. е. получается новое равенство

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2.$$

Продолжая этот процесс, можно последовательно получить решения цепочки уравнений того же вида, в конце которой находится требуемое равенство

$$ax_k^2 + 1 = y_k^2$$

со свободным членом 1. Уравнение (4) при неквадратном a имеет бесчисленное множество решений, но индийцы обычно ограничивались одним из них. Впрочем, Бхаскара уже располагал правилами, согласно которым по одному решению можно получить другие. Следует отметить, что Бхаскара не доказывал, что число y_2 целое и что применение правила приводит к $b = 1$, но предложенный им метод — замечательное открытие. Уравнением (4) позже занимались Ферма, Эйлер и Лагранж. Метод нахождения полного решения, найденного Лагранжем в 1769 г., близок к индийскому.

В анонимных комментариях к «Патиганите» Шридхары найдено общее рациональное решение уравнения (4) в виде

$$x = \frac{p}{Am - Bn}, \qquad y = \frac{An - Bm}{Am - Bn},$$

где числа A, B, m, n, p удовлетворяют условиям

$$A^2 - B^2 = a, \qquad m^2 + p^2 = n^2.$$

Из этого решения следуют рациональные решения, данные Брахмагуптой, Шрипати, Бхаскарой и Нарайаной.

Брахмагупта и Бхаскара рассматривали некоторые другие типы неопределенных уравнений, например неопределенное уравнение, содержащее произведение неизвестных

$$ax + by + c = xy.$$

Если выражение $ab + c$ можно представить в виде произведения двух сомножителей mn, то решения имеют вид

$$x = m + b, \qquad y = n + a.$$

Заметим, что индийские математики Нарайана (XIV в.) и Ганеша (XVI в.) занимались также составлением магических квадратов.

Теорема Пифагора

Знания и открытия индийских математиков в области геометрии значительно уступают их знаниям и открытиям по арифметике, алгебре, теории чисел. Специальных сочинений по геометрии в Индии не было, геометрические сведения сообщались в арифметических трактатах или в арифметических разделах сочинений по астрономии.

Геометрические предложения приводились без доказательств. Часто все сводилось к чертежу со словом «смотри», который в редких случаях сопровождали краткие указания. По-видимому, доказательства сообщались учащимся устно. В геометрических задачах вопрос сводился к вычислению и никогда — к построению. Однако многими видами построений индийцы владели и пользовались в строительном деле.

Наиболее ранние сведения о познаниях индийцев в области геометрии находим в «Шулва-сутре» (VII—V вв. до н. э.), служившем руководством при постройке алтарей и храмов.

Постройка храмов подчинялась ряду правил: они ориентировались по странам света; в основании храма лежали определенные фигуры. Все это требовало решения геометрических задач: построения прямого угла, квадрата, прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются целыми числами, построения квадрата, равновеликого прямоугольнику, построения квадрата, площадь которого кратна площади данного квадрата. Отправной точкой многих построений служила теорема Пифагора: с помощью пифагоровых треугольников строились прямые углы и производилось построение квадрата с кратной площадью. Для удвоения квадрата за сторону искомого квадрата бралась диагональ исходного, для построения квадрата, равновеликого двум данным квадратам, в большем квадрате строили меньший квадрат и соединяли их вершины так, как показано на рис. 50; проведенная линия является гипотенузой треугольника, катеты которого равны сторонам данных квадратов.

Доказательство теоремы Пифагора приводятся в «Венце знания» Бхаскары в виде чертежа (рис. 51) с надписью «смотри». Если мы обозначим катеты прямоугольного треугольника, построенного на каждой из сторон

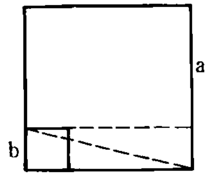


Рис. 50

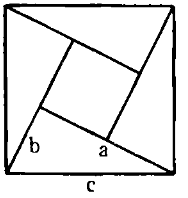


Рис. 51

квадрата чертежа Бхаскары, через a и b, а гипотенузу этого треугольника, равную стороне квадрата, через c, то площадь c^2 квадрата равна четырем площадям прямоугольного треугольника, т. е.

$$4\frac{ab}{2} = 2ab,$$

и площади квадрата, построенного на разности катетов треугольника, т. е. $a - b$, откуда, упрощая, получим соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Это доказательство несколько проще аналогичного китайского доказательства (ср. рис. 46).

Площади и объемы

Сведения по геометрии имеются также в трактатах Брахмагупты, Магавиры, Шридхары, Бхаскары.

Брахмагупта приводит приближенное правило для вычисления площади произвольного четырехугольника как произведения полусумм противоположных сторон, с которым мы встретились в математике египтян и вавилонян.

Шридхара указывал, что это правило нельзя применять ко всем четырехугольникам. Он сообщает точное правило вычисления площади трапеции.

Брахмагупта для нахождения площади четырехугольника пользовался правилом, аналогичным правилу Архимеда — Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c и d — стороны четырехугольника, а p — полупериметр. Это правило верно только для четырехугольников, вписанных в круг. Брахмагупта не оговаривает этого, но фактически рассматривает лишь два типа четырехугольников — равнобедренные трапеции и четырехугольники с пересекающимися под прямым углом диагоналями, для которых правило справедливо.

Как уже упоминалось, геометрические доказательства крайне лаконичны, но нередко весьма наглядны. Так, для обоснования правила вычисления площади треугольника приводится рисунок, в котором высота прямоугольника равна половине высоты треугольника (рис. 52). Для обоснования предложения «Площадь круга равна площади прямоугольника,

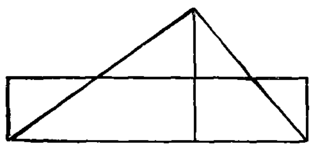


Рис. 52

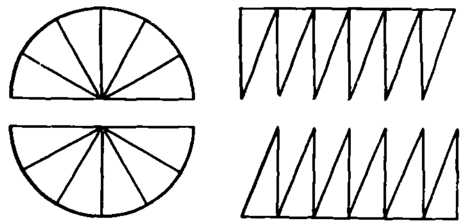


Рис. 53

стороны которого соответственно равны полуокружности и радиусу» Ганеша (XVI в.) делит круг на 12 равных секторов, а затем разворачивает каждый полукруг, состоящий из 6 секторов, в пилообразную фигуру, основание которой равно полуокружности, а высота — радиусу (рис. 53). Прямоугольник, о котором говорится в условии, получится при вставлении зубьев одной из «пил» в зазоры между зубьями другой. По-видимому, читатель должен был представить себе, что круг разделен не на 12, а на столь большое число секторов, что эти секторы станут неотличимы от треугольников, составляющих «пилы». В обоих случаях, как и при доказательстве Бхаскарой теоремы Пифагора, доказательство состояло из чертежей и слова «смотри».

Приближенные выражения отношения длины окружности к диаметру мы находим уже в сиддхантах. В «Пулисе-сиддханте» (V в. н. э.) говорится, что длина окружности относится к диаметру, как 3927 к 1250, что соответствует значению $\pi = 3{,}1416$. То же значение π в виде $\frac{62832}{20000}$ мы находим у Ариабхаты. Брахмагупта пользовался приближением $\pi = \sqrt{10}$, возможно, китайского происхождения. Встречается у индийцев и приближение $\pi = 22/7$. В сиддхантах, как и у александрийских астрономов, окружность делится на 360 градусов, каждый градус — на 60 минут, но радиус делится не на 60 частей, а на 3438 минут. Это объясняется тем, что, если считать окружность равной $360 \cdot 60 = 21\,600$ минутам, а $\pi = 3{,}1416$, то из соотношения $C = 2\pi r$, мы найдем, что $r = 3437{,}7$ минут. Как мы видим, индийцы измеряли радиус в долях окружности уже в V в., поэтому возможно, что приведенная выше «теорема Ганеши» была известна индийцам задолго до Ганеши. Возможно также, что в чертеже Ганеши предполагалось, что круг разделен на 3438 секторов.

Шридхара приводит правила вычисления объема призмы $V = SH$, объема усеченного кругового конуса

$$V = \frac{\pi H}{3}[R^2 + rR + r^2], \qquad \text{где } \pi = \sqrt{10},$$

и объема кругового конуса $V = \frac{1}{3} SH$.

Бхаскара дает правило вычисления объема шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad \text{где } \pi = 3{,}1416.$$

Тригонометрия

Уже древнейшая из сиддхант «Пулиса-сиддханта» познакомила индийцев с тригонометрией хорд александрийских астрономов. Если греки называли хорды «прямыми в круге», то индийцы стали называть их словом «джива», буквально — «тетива», а перпендикуляр, опущенный из середины дуги на середину стягивающей ее хорды — «стрелой». Варахамихира в «Панча-сиддхантике» («Пять сиддхант») заменил хорду полухордой, т. е. линией синуса.

Первоначально она называлась «ардха-джива» — полутетива, затем слово «ардха» было отброшено и линию синуса стали называть просто «джива». Отсюда и происходит наше слово «синус»: арабские переводчики сиддхант не перевели слово «джива» арабским словом «ватар», обозначающим тетиву и хорду, а транскрибировали арабскими буквами и стали называть линию синуса «джиба». Так как в арабском языке краткие гласные не обозначаются, а долгое «и» в слове «джиба» обозначается так же, как полугласная «й», арабы стали произносить название линии синуса «джайб», что буквально обозначает «впадина», «пазуха». При переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики перевели слово «джайб» латинским словом sinus, имеющим то же значение.

Для вычислений замена хорд синусами несущественна, так как хорда дуги α равна удвоенному синусу дуги 2α. Но эта замена позволяет вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Кроме линии синуса, индийцы пользовались линией косинуса (котиджива) и линией синуса-версуса, т. е. разностью между радиусом и линией косинуса (эту линию они называли «уткрамаджива»). На рис. 54 изображена хорда AB дуги AB и линии синуса AC, косинуса OC и синуса-версуса CD дуги AD. Индийцы рассматривали тригонометрические велиличины только для дуг первой четверти. В «Панча-сиддхантике» приводятся простейшие соотношения между синусом и синусом-версусом, выражаемые нашими формулами

$$\sin^2\alpha + \sin\operatorname{vers}^2\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\operatorname{vers}\alpha}{2},$$

которые позволяли ему находить синус половинной дуги. Индийцы пользовались также соотношениями, выражаемыми нашими формулами

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha = \cos\,(90^\circ - \alpha),$$
$$\sin\,(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

В «Сурья-сиддханте» и у Ариабхаты приводятся таблицы синусов через 3°45′. Приведем начало и конец этой таблицы.

Дуга		Синус	Дуга		Синус
в градусах и минутах	в минутах	в минутах	в градусах и минутах	в минутах	в минутах
3° 45′	225	225	78 45	4725	3372
7 30	450	449	82 30	4950	3409
11 15	675	671	86 15	5175	3431
15 00	900	890	90 00	5400	3438
. . .	. .	. .			

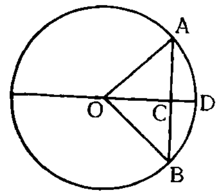


Рис. 54

Таблица синусов в большей части верна до последнего знака, в 10 случаях из 24 ошибка в последнем знаке равна 1, если придерживаться наших правил округления.

У последующих ученых таблицы более точны. В частности, в «Венце знания» Бхаскары приведены таблицы синусов через 1°.

Бхаскара приводит правило для вычисления хорды l по длине окружности C, дуге S и диаметру d

$$l = \frac{4dS(C-S)}{\frac{5}{4}C^2 - S(C-S)}.$$

Это правило, по утверждению самого автора, недостаточно для более точных вычислений. Если $S = C/n$, правило примет вид

$$l = \frac{4(n-1)d}{\frac{5}{4}n^2 - n + 1}.$$

При $n = 3, 4$ для l получаются значения, верные до сотых, при $n = 6$ имеем точное значение.

Индийцы пользовались также тенью, отбрасываемой вертикальным шестом — гномоном, для определения высот и расстояний. Эти вычисления впоследствии привели математиков стран ислама к тангенсам и котангенсам, которые они называли «тенями».

Линии синуса, косинуса, синуса-версуса, а также тени применялись в сиддхантах для решения астрономических задач. В частности, в «Панча-сиддхантике» Варахамихиры решается задача об определении высоты h Солнца над горизонтом по широте φ местности, склонению δ Солнца и его часовому углу t. Другими словами, речь идет об определении одной из сторон сферического треугольника PZS на небесной сфере (рис. 55), вершинами которого являются полюс мира P, зенит Z и Солнце S, по двум другим сторонам и противолежащему углу. Стороны PZ, PS и ZS этого треугольника соответственно равны $90° - \varphi$, $90° - \delta$ и $90° - h$, а угол ZPS равен t. Правило Варахамихиры в наших обозначениях имеет вид

$$\sin h = (\sin \text{vers}\, t_0 - \sin \text{vers}\, t) \cos \varphi \cos \delta,$$

где t_0 — угол ZPA, связанный с φ и δ, как показано в другом предложении «Панча-сиддхантики», соотношением

$$\sin \text{vers}\, t_0 = 1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

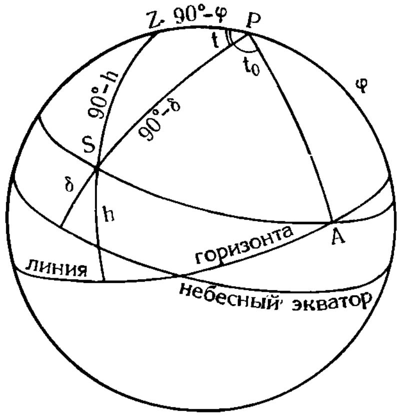


Рис. 55

Поэтому правило Варахамихиры можно переписывать в виде

$$\sin h = (1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta - 1 + \cos t) \cos\varphi \cos\delta = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

т. е., полагая $90° - h = a$, $90° - \delta = b$, $90° - \varphi = c$, $t = A$, в виде сферической теоремы косинусов

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Бесконечные ряды

Суммирование числовых рядов интересовало многих индийских математиков. Отдельные примеры арифметических и геометрических прогрессий имеются еще в «Ведах». Ариабхата приводит правила суммирования рядов треугольных чисел, натуральных квадратов и кубов, а Магавира — правила суммирования геометрической прогрессии и таких рядов, как ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии. В XVI в. Нарайана произвел еще более общие суммирования: если обозначить

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = S_n^{(1)},$$
$$S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \ldots + S_n^{(1)} = S_n^{(2)},$$
$$S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \ldots + S_n^{(2)} = S_n^{(3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то можно сказать, что Нарайана привел выражение для

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m+1)}.$$

Нарайана обобщил это правило на случай арифметической прогрессии с данным первым членом a_1 и разностью d: в этом случае сумма равна

$$\sum\nolimits_n^{(m)} = a_1 \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + dS_{n-1}^{(m)}.$$

Это правило Нарайана применил к задаче о приплоде коровы при условии, что корова рождает одну телку в начале каждого года, а телки дают такое же потомство по достижении трех лет.

Наиболее замечательных успехов в области бесконечных рядов достигли южноиндийские математики в XVI в. Поводом к их исследованиям послужили, по-видимому, поиски приемов более точного вычисления числа π. Нилаканта приводит словесно, без доказательств, разложения дуги, равной четверти окружности, в виде бесконечных числовых рядов, получающихся из общего степенного ряда арктангенса.

Общее разложение в наших обозначениях имеет вид

$$r\varphi = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{r\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi} - \ldots \tag{1}$$

При $r = 1$ и $\varphi = 45°$ получаем ряд для вычисления π, причем $\pi/4$ выражается частичной суммой S_n и поправкой k_n

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + k_n;$$

поправка k_n дается в трех видах:

$$k_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4n}, \qquad k_n^{(2)} = \frac{(-1)^n n}{4n^2+1}, \qquad k_n^{(3)} = \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n(4n^2+5)}.$$

Легко заметить, что

$$|k_n^{(1)}| > |k_n^{(3)}| > |k_n^{(2)}|.$$

Эти поправки даже при небольших n значительно улучшают приближения. Значение числа π, данное Нилакантой, имеет десять верных знаков.

В анонимном трактате «Каранападдхати» («Техника вычислений»), также написанном в Южной Индии в XV—XVI вв., приводятся не менее замечательные правила разложения синуса и косинуса в бесконечные степенные ряды:

$$r\sin\varphi = S - \frac{S^3}{3!\,r^2} + \frac{S^5}{5!\,r^4} - \ldots,$$

$$r\cos\varphi = r - \frac{S^2}{2!\,r} + \frac{S^4}{4!\,r^3} + \ldots,$$

а также приближенные формулы для синуса и арксинуса:

$$r\sin\varphi \approx S - \frac{S^3}{6r^2}$$

$$r\varphi \approx r\sin\varphi + \frac{r^3\sin^3\varphi}{6r^2}.$$

Методы, которыми были получены результаты Нилаканты и неизвестного автора, изложены в также анонимном трактате «Йукти бхаша» («Разъяснение математики»), написанном, как упоминалось, в XVII в. на языке малайялам. Ряд арктангенса (1) был получен следующим образом: прежде всего из элементарно-геометрических соображений находилась связь между малой дугой (в наших обозначениях $\Delta\varphi$) и соответствующим приращением тангенса (в наших обозначениях $\Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi$) в виде $\Delta\varphi = \frac{\Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}$. Далее отрезок линии тангенса $t = \mathrm{tg}\,\varphi$ делился на n равных частей, в каждой из которых применялось указанное равенство, а затем суммированием получалось приближенное выражение для $\varphi = \operatorname{arctg} t$ в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{t}{n}}{1+\left(\frac{kt}{n}\right)^2}. \tag{2}$$

Деление под знаком суммы производилось с помощью повторного применения тождества

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b}\,\frac{b}{c},$$

которое при $b < c$ приводит к ряду

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} + \frac{(c-b)^2}{b^2} - \ldots - (-1)^{m-1}\frac{(c-b)^m}{b^m} + \ldots$$

Поэтому, полагая $b = 1$, $c = 1 + (kt/n)^2$, указанную сумму можно переписать в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n}\left[1 - \left(\frac{kt}{n}\right)^2 + \left(\frac{kt}{n}\right)^4 - \ldots + (-1)^{m-1}\left(\frac{kt}{n}\right)^{2m-2} + \ldots\right].$$

Далее производился предельный переход

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

полученный, по-видимому, индуктивно из известных ранее правил суммирования степеней натуральных чисел. Применение этого перехода к указанному ряду и приводило к ряду (1).

Мы видим, что южноиндийские ученые предвосхитили многие результаты, которые были вновь получены в Европе в XVII — XVIII вв. Так, ряд арктангенса (1) был вновь найден Дж. Грегори в 1671 г. и Г. В. Лейбницем в 1673 г. Соотношением (2) пользовался в 1739 г. Л. Эйлер для разложения числа π. Ряды для синуса, косинуса и арксинуса были выведены И. Ньютоном около 1666 г.

Индийцы предвосхитили не только конечные результаты, но отчасти и методы, приводящие к ним. Так, в современных учебниках по математическому анализу ряд арктангенса выводят часто по способу, сходному с индийским: в равенстве

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

подынтегральную функцию раскладывают в степенной ряд и затем почленно интегрируют.

Значение математики Индии

Индийская математика оказала огромное влияние на развитие математики как на Востоке, так и на Западе. Именно в Индии была разработана наша арифметика, основанная на десятичной позиционной нумерации, а также такие арифметические правила, как тройное правило и его обобщения. Наши термины «корень» и «синус» постоянно напоминают нам о роли индийских ученых в разработке алгебры и тригонометрии. Оказали влияние на Европу и их теоретико-числовые исследования. В значительной степени индийцам обязаны мы и введением отрицательных и иррациональных чисел. К сожалению, математические и астрономические труды индийцев, написанные в XV—XVII вв., и в частности такое замечательное открытие, как бесконечные ряды для арктангенса, синуса и косинуса, остались в свое время неизвестными за пределами Индии и были получены вновь европейцами.

Несомненно, что вклад индийцев в развитие мировой математики был бы во много раз больше, если бы Индия не попала на несколько столетий под колониальное иго. Об этом свидетельствует деятельность замечательного индийского математика Сринивасы Рамануджана (1887—1920), который в весьма трудных условиях смог стать одним из крупнейших специалистов по теории чисел.