ТРЕТЬЯ ГЛАВА

СТРАНЫ ИСЛАМА

Арабский халифат

В VII в. в Аравии возникла новая религия — ислам (буквально — «покорность»), основанная Мухаммедом (Магометом). Новая религия, приверженцы которой называются мусульманами (от слова «муслим» — покорный), впитала традиции старых монотеистических религий — иудейства и христианства — и распространилась прежде всего в низах арабского общества в противовес многобожию правящих слоев Аравии. Мухаммед был объявлен пророком, шестым после Адама, Ноя, Авраама, Моисея и Иисуса. За начало мусульманской эры считается время бегства (по-арабски «хиджра») Мухаммеда из Мекки в Медину (622 г.). Мухаммед вернулся в 630 г. в Мекку победителем и умер в 632 г. Его преемники — халифы, распространяя ислам огнем и мечом, завоевали в 637 г. Сирию, Месопотамию и Иран, в 642 г.— Египет, во второй половине VII в.— всю Северную Африку. Население Сирии, Месопотамии и Египта, угнетавшееся византийцами, не оказало завоевателям сопротивления и приняло ислам. Впоследствии в этих странах и всей Северной Африке сложились нации, говорящие на арабском языке и считающие себя арабами. Христианское население этих стран в большинстве случаев также арабизировалось (иногда древний язык сохранялся в виде религиозного языка христиан). В 711 г. арабы переправились из Африки в Испанию и вскоре захватили почти весь Пиренейский полуостров, а в IX в.— и Сицилию, и юг Италии. В 712 г. началось завоевание Средней Азии, вскоре были покорены часть Закавказья и часть Индии. Арабские государства на юге Италии просуществовали около двух столетий. В X в. началось постепенное изгнание арабов из Испании, закончившееся только в XV в. Иначе сложилось положение на Востоке: ислам вытеснил зороастризм — прежнюю религию Ирана, Средней Азии и Азербайджана, хотя в некоторых из этих стран и принял новую форму (шиизм, в отличие от правоверного суннизма).

При династии Омейядов столица халифата находилась в Дамаске (Сирия), в 762 г. второй халиф новой династии Аббасидов перенес ее в Багдад, основанный им недалеко от развалин Вавилона.

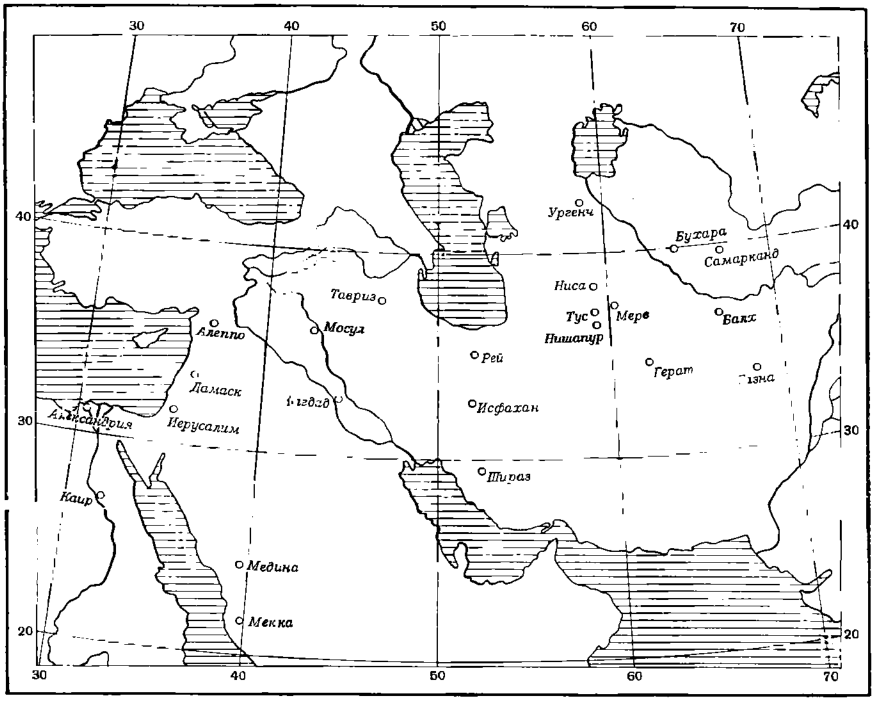
Образование халифата совпало с распадом рабовладельческой формации на его территории и становлением феодального строя. Правители Багдада уделяли значительное внимание земледелию, и, следовательно, ирригации. В Багдаде и других городах велось большое строительство, росла торговля. Арабские купцы торговали с Византией и Русью, Индией и Китаем, европейским Средиземноморьем и Африкой; в I главе I части мы говорили об арабском влиянии на образование числительных на языке суахили народов Восточной Африки (кстати сказать, само слово «суахили» происходит от арабского названия побережья Африки «савахил» — берега́). Нужды ирригации, строительства и сухопутной и морской торговли требовали развития математики и тесно связанной с ней астрономии. В завоеванных государствах арабы застали более высокую культуру, и багдадские халифы стали приглашать в Багдад виднейших ученых из покоренных стран. Большинство ученых, работавших в Багдаде в IX — X вв., были уроженцами Средней Азии (ал-Хорезми из Хорезма, ал-Марвази из Мерва, ал-Фаргани из Ферганы) или принадлежали к сабиям — потомкам вавилонских жрецов-звездопоклонников, в течение столетий культивировавших занятия астрономией (Сабит ибн Корра и его внук Ибрахим ибн Синан, ал-Баттани).

К X в. завоеванные страны, сохраняя религиозное подчинение Багдаду, становятся фактически независимыми. В X в. Хорасан (нынешняя Туркмения и часть Ирана, населенная туркменами) и междуречье Амударьи и Сырдарьи, получившее теперь название Мавераннахр (ма вара ан-нахр — «за рекой»), объединяются державой Саманидов со столицей в Бухаре, Хорезм (ныне Хорезмская область Узбекистана, север Туркмении и Каракалпакия) приобретает независимость, центральный Иран и Месопотамия входят в государство Буидов. В это время возникают новые научные центры в Бухаре и Хорезме, где воспитались такие знаменитые ученые, как Ибн Сина (Авиценна) и ал-Бируни. В X в. Буиды подчиняют себе багдадских халифов, а в Северной Африке и Испании образуются независимые халифаты со столицами в Каире и Кордове, которые также становятся научными центрами. В Каире работает Абу Камил ал-Мисри (Миср — арабское название Египта), а затем туда приглашается крупнейший физик и астроном средневековья уроженец Басры ал-Хасан ибн ал-Хайсам (Альхазен).

В X в. Мавераннахр завоевывают тюрки-илекханы, а центральный Иран, Хорасан и Хорезм — Махмуд Газневи, выходец из тюркской гвардии, основавший огромную империю со столицей в Газне (Афганистан). При Махмуде в Газне работали ученые покоренных им стран. Крупнейшим из этих ученых был ал-Бируни.

В XI в. Среднюю Азию, Иран, Сирию и Месопотамию завоевывают тюрки-сельджуки, а в XIII в.— монголы. Сельджуки, так же как и Буиды, подчиняют себе багдадского халифа, а монголы убивают последнего халифа и ликвидируют багдадский халифат. В столицах завоевателей также организуются новые научные центры: крупнейший ученый второй половины XI в. Омар Хайям работает в столице Сельджуков Исфахане (Иран), крупнейший ученый XIII в. Насир ад-Дин ат-Туси работает в Мараге (Азербайджан) — столице внука Чингисхана Хулагу. Создание новых научных центров свидетельствует о том, что государства средневекового Востока уже не могли существовать без развития науки, а также об исключительной преданности науке и организационных способностях ученых, которые смогли создать научные школы в условиях страшных разрушений и массовых убийств, которыми сопровождались все эти завоевания.

В XV в. Среднюю Азию, Иран и ряд сопредельных стран завоевывают войска Тимура. Это также приводит к организации в столице Тимура Самарканде нового научного центра, возглавляемого внуком Тимура султаном Улугбеком. В это время в Самаркандской обсерватории Улугбека работает Гияс ад-Дин ал-Каши. После убийства Улугбека религиозными фанатиками, считавшими его еретиком, и разгрома самаркандского научного центра Али Кушчи, ученик Улугбека и ал-Каши, переезжает в Константинополь, где вступает в контакт с византийскими учеными. Другие



Страны Ближнего и Среднего Востока

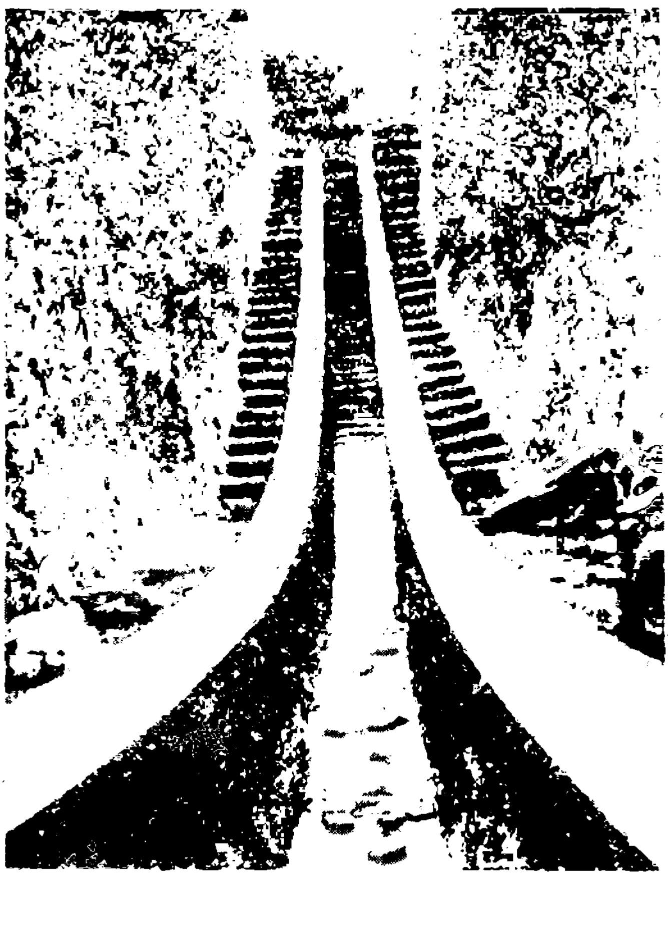
самаркандские ученые попадают в Индию, где традиции их школы развивались в течение нескольких столетий, в частности, Савай Джай Сингхом.

Наряду с математическими центрами в Месопотамии и Сирии, Египте, Средней Азии и Иране исследования велись также в мавританских государствах на северо-западном побережье Африки и Пиренейского полуострова. Менее значительная по богатству открытий наука этих стран, так же, как, например, Сицилии, сыграла большую роль в распространении математико-астрономических знаний в средневековой Европе.

Научные труды математиков стран ислама большей частью написаны на арабском языке. Даже Омар Хайям, известный персидский поэт, писал научные трактаты по-арабски. Однако у Сабита ибн Корры имеется несколько сочинений на родном сирийском языке, а популярная «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства» ал-Бируни написана в двух вариантах — по-арабски и по-персидски. То же относится к краткой энциклопедии Ибн Сины: ее арабский вариант называется «Книга спасения», а персидский — «Книга знания». На персидском языке написаны некоторые сочинения Насир ад-Дина ат-Туси, в частности его астрономические таблицы, а его ученик Кутб ад-Дин аш-Ширази уже дал изложения «Начал» Евклида, «Алмагеста» Птолемея и «Оптики» Ибн ал-Хайсама на персидском языке. По-персидски были написаны и астрономические таблицы Улугбека и ряд сочинений ученых самаркандской школы.

В VIII — X вв., в первый период развития математики стран ислама, на арабский язык были переведены индийские «сиддханты», получившие в переводе название «Синдхинд» (Хинд — арабское название Индии), «Начала» Евклида, «Измерение круга», «О шаре и цилиндре» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Сферика» Феодосия, «Сферика» Менелая, «Алмагест» Птолемея, «Арифметики» Диофанта и ряд других сочинений. Были переведены и основные философские сочинения Аристотеля, также явившиеся источником ознакомления с достижениями греческой науки. Наряду с этим в формировании математики в странах ислама большую роль сыграли местные традиции, веками складывавшиеся на территориях Египта, Сирии и Месопотамии, Средней Азии и Ирана, а также связи с Индией и далеким Китаем. Первоначально, естественно, преобладало усвоение культурного наследия прошлого, но очень быстро сложилась своеобразная собственная математическая культура. Среди других течений математической мысли Востока арабская математика выделяется глубоким синтезом устремлений, направленных на решение задач практической жизни и ведущей науки той эпохи — астрономии, с интенсивной

Главный инструмент обсерватории Улугбека в Самарканде



работой теоретической мысли, воспитанной на лучших греческих образцах. Последнее позволило поднять на весьма высокий уровень научную разработку вычислительно-алгоритмических проблем и методов, стоявших на первом плане во всей восточной математике, но развивавшихся в Индии и Китае менее мощными и менее строгими средствами. Эта тенденция, характерная уже для арабской математики IX в., усиливалась вплоть до XV столетия. Ее плодом явилось значительное развитие арифметики в широком смысле слова, от решения задач коммерческого характера до теории отношений и учения о действительном числе, геометрии, в частности, столь важной для дальнейшего прогресса точных наук теории параллельных, а особенно алгебры и тригонометрии, которые впервые формируются здесь в большие самостоятельные науки. Некоторое развитие получили и инфинитезимальные методы.

Арабские нумерации

В странах ислама были распространены два типа нумерации: буквенная, аналогичная древнесемитическим нумерациям, и десятичная позиционная, заимствованная у индийцев.

Буквенную нумерацию арабы называли «абджад» (по первым четырем буквам: алиф, ба, джим, дал) и «джумал» («суммы», так как числовое значение каждого слова равно сумме числовых значений входящих в него букв). Числовые значения букв соответствуют не современному порядку букв алфавита, сложившемуся ко времени хиджры, а древнему, совпадающему с порядком соответствующих букв древнесемитических алфавитов. Однако если в этих алфавитах было всего 22 буквы, то арабы добавили еще 6 букв, которые также получили числовые значения. Поэтому в буквенной арабской нумерации имеются специальные знаки для 1, 2,... ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000. Буквенная арабская нумерация близка к греческой, но о том, что она восходит не к греческой, а к древнесемитическим, говорит то, что у арабов буквы «сад», «ра», «шин», «та», соответствующие финикийским и еврейским буквам «саде», «реш», «шин», «тав», имеют те же числовые значения 100, 200, 300, 400, а не значения 900, 100, 200, 300 соответственных греческих букв «сампи», «ро», «сигма», «тау» (см. таблицу на стр. 63).

Введение десятичной позиционной нумерации было одной из важнейших заслуг багдадской школы. Эта нумерация появляется впервые в книге Мухаммада ал-Хорезми (787 — ок. 850) «Об индийском счете», где он пишет: «Когда увидел я, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв, для облегчения изучающему»... [1].

Далее ал-Хорезми описывает девять индийских цифр и «маленький кружок, наподобие «о», чтобы по нему знали, что разряд... пуст» [2]. Мы уже упоминали, что нуль называется по-арабски «сыфр» — пустой (см. стр. 182—183).

---

[1] *Мухаммад ал-Хорезми.* Математические трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда и Ю. Х. Копелевич. Ташкент, 1964, стр. 9.

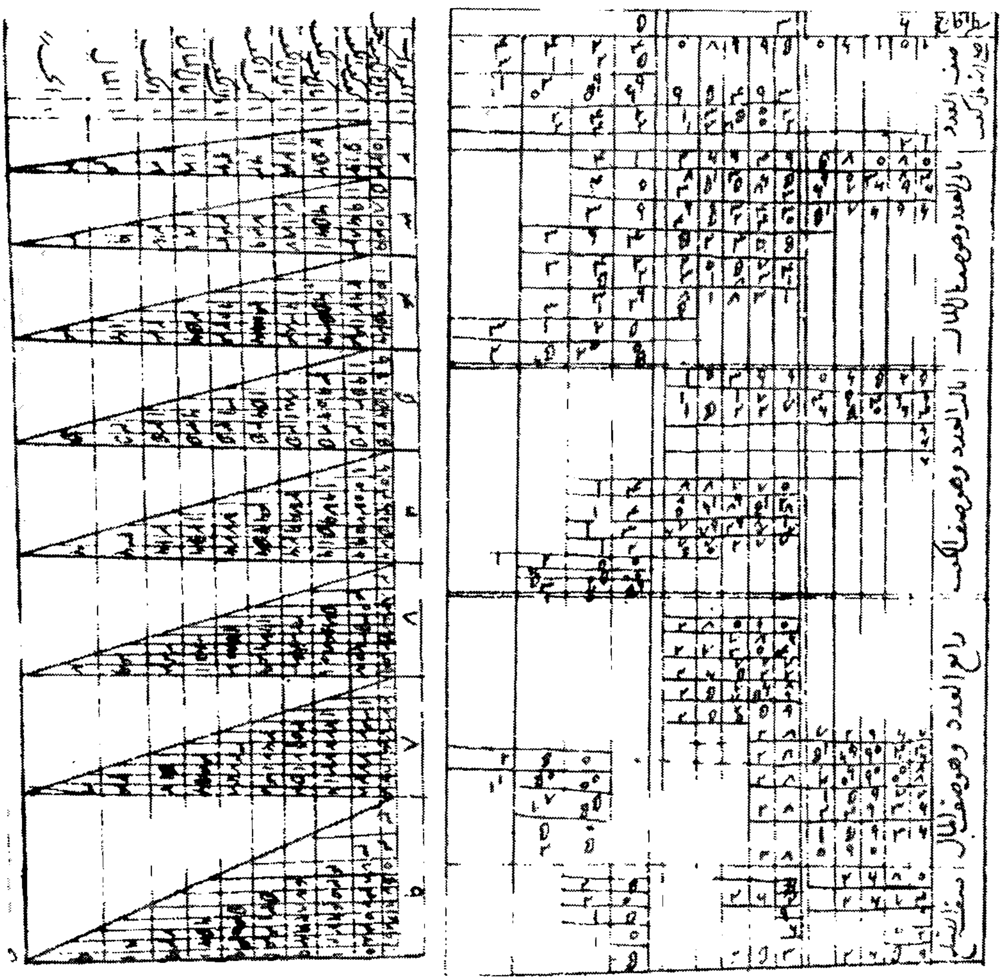
[2] Там же, стр. 10.

В западных странах ислама «индийские цифры» приняли несколько другую форму, называемую «губар» (пыль). Такое название указывает, что эти цифры применялись при вычислениях на счетной доске, покрытой пылью.

На рис. 56 изображена таблица первых десяти степеней чисел от 1 до 10 и таблица извлечения корня пятой степени в восточноарабских («индийских») цифрах из рукописи «Ключа арифметики» ал-Каши (XV в., см. стр. 214). На рис. 57 приведена из той же рукописи таблица извлечения кубического корня в шестидесятиричной системе, в которой числа от 1 до 59 изображаются в буквенной арабской нумерации.

Арабские купцы часто записывали числа словами. Из словесной записи чисел впоследствии выработалась применяющаяся до сих пор торговцами многих стран Востока числовая скоропись — сийак.

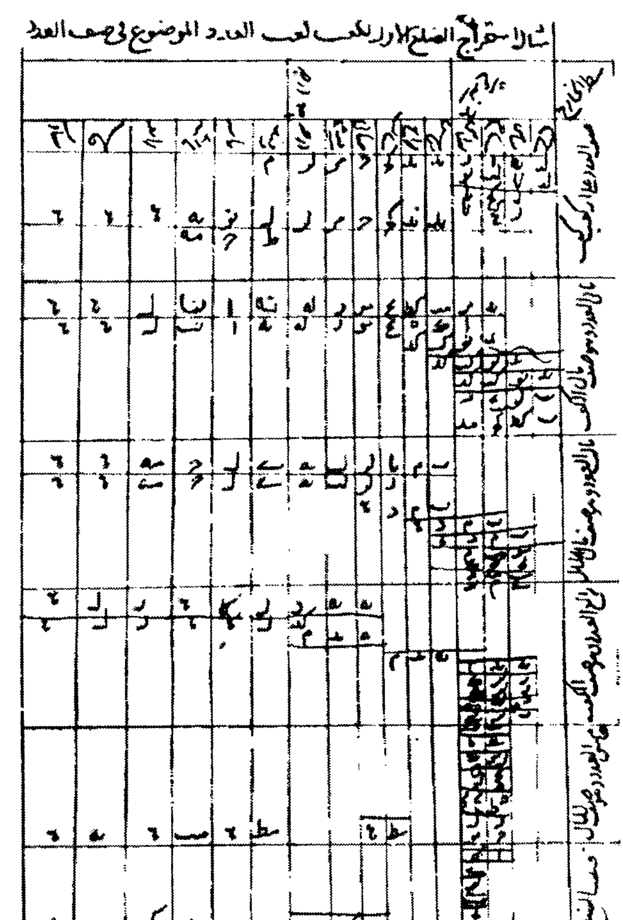
Рис. 56



Арифметические действия

Первое руководство по арифметике, основанное на позиционном принципе, было написано в первой трети IX в. Мухаммадом ал-Хорезми. Сведений о жизни этого ученого сохранилось крайне мало. Имя ал-Хорезми указывает на его родину — среднеазиатское государство Хорезм, а одно из прозвищ ученого — ал-Маджуси — говорит о его происхождении из зороастрийских жрецов — магов (по-арабски «маджус»). Зороастрийское духовенство было основным носителем культуры и науки Ирана и Средней Азии до арабского завоевания, и происхождение ал-Хорезми из семьи магов позволяет судить о корнях его знаний. Впрочем, сочинения ал-Хорезми показывают, что он был хорошо знаком и с наукой Индии и с наукой эллинистических стран Ближнего Востока. Кроме арифмети-

Рис. 57



ческого трактата ал-Хорезми сохранились его трактат по алгебре, содержащий также главу по геометрии, астрономические таблицы, включающие раздел, посвященный тригонометрии, таблицы широт и долгот городов, составленные не ранее 836 г., и трактат о календаре. При халифе ал-Ма'муне (813—833) ал-Хорезми возглавил в Багдаде библиотеку «Дома мудрости», своего рода академии; ал-Ма'муну были посвящены алгебраический трактат и астрономические таблицы ал-Хорезми. При халифе ал-Васике (842—847) ал-Хорезми возглавлял экспедицию к хазарам; к 847 г. относится последнее упоминание об ал-Хорезми. Арабский текст арифметического трактата не сохранился, и мы знаем этот труд только по латинскому переводу XII в. в неполной копии XIII в., а также по некоторым примыкающим к нему латинским сочинениям того же времени и несколько более ранним арабским учебникам — Кушьяра ибн Лаббана, ан-Насави и другим.

Ал-Хорезми подробно описывает сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня с помощью индийских цифр. В число арифметических действий он включает удвоение и раздвоение, выделяемые им вследствие их применения при извлечении квадратного корня. Действия производились на доске, покрытой песком или пылью, и на каждом этапе выкладки использованные цифры стирались и заменялись новыми. Эта индийская процедура, непригодная при письме на на бумаге, сохранялась долгое время. Для примера укажем в современных обозначениях основные этапы умножения 2326·214 = 497 764 (множитель, после умножения на каждую его цифру, сдвигается на одно место вправо).

2 326	42 8 3 26	492 2 2 6	496486	497 764
21 4	2 1 4	2 1 4	214	

За действиями над целыми следуют операции над шестидесятиричными и обыкновенными дробями и, наконец, извлечение квадратных корней (эти два последних отдела отсутствуют в упомянутой копии латинского перевода).

Руководство ал-Хорезми сыграло очень большую роль в развитии арифметики. Имя автора в латинизированной форме Algorismus и Algorithmus стало в средневековой Европе обозначать всю систему десятичной позиционной арифметики. Впоследствии термин «алгоритм» приобрел более широкий смысл всякого регулярного вычислительного процесса, в конечное число шагов дающего решение определенного класса задач. Такое словоупотребление восходит к работам Г. В. Лейбница по дифференциальному исчислению (1684 и след.), а в более узком (арифметическом) смысле — к Кр. Рудольфу (1525).

Дроби

Арабский язык не имеет специальных терминов для выражения долей единицы (аликвотных дробей), меньших $^1/_{10}$, все остальные доли называются «одна часть из n», а их кратные — «m частей из n». Такому словоупотреблению соответствовало понятие конкретной дроби, выражающей одну или несколько частей величины, предполагаемой делимой (абстрактная единица считалась неделимой). Но существовала и другая концепция дроби, как отношения двух отвлеченных целых чисел, восходящая к античной теории пропорций. Эта последняя теория служила, так сказать, теоретической основой арабской арифметики. Так, умножение целых чисел определяли в первую очередь как повторное сложение, но такое определение неприменимо в случае двух дробей. Трудность преодолевалась с помощью другого определения: умножить a на b значит найти число q, удовлетворяющее пропорции $q : a = b : 1$ или же $q : b = a : 1$; такая дефиниция применима в равной мере к целым и дробям. Аналогично определяли деление. Абу-л-Вафа ал-Бузджани (940—998) — уроженец Хорасана, работавший в Багдаде при дворе Буидов, в своей «Книге о том, что необходимо писцам и дельцам из науки арифметики» воздает хвалу такого рода определениям, подчеркивая их общность. Здесь, очевидно, проявляется общая тенденция арабской математики к отождествлению понятий числа и отношения.

Дроби записывали на индийский манер: знаменатель под числителем, а целую часть числа писали над числителем. Разделительная черта появляется около 1200 г.

У чиновников, землемеров, торговцев было издавна в ходу другое исчисление дробей, сходное с тем, которое применяли египетские писцы. Дробь представляли в виде суммы долей единицы $1/n$, $n \leqslant 10$, и, если требуется, дроби $^2/_3$, а также их произведений, например $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ или $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$. Когда такое точное представление невозможно, пользовались приближениями вроде $\frac{3}{17} \approx \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$. Ученые усовершенствовали такое исчисление и выработали целую систему правил для представления любых дробей с помощью аликвотных дробей.

Наконец, арабские астрономы пользовались почти исключительно шестидесятиричными дробями — традиция, восходящая через александрийских астрономов к древнему Вавилону. Подобно александрийским ученым, астрономы стран ислама обозначали шестидесятиричные цифры с помощью буквенной нумерации. Шестидесятиричный нуль они обозначали знаком ζ, несомненно происходящим от знака ō, применявшегося в Александрии. Астроном, работавший с шестидесятиричными дробями, имел под руками таблицу умножения до 59·59 и применял словесно выраженные правила $a^m \cdot a^n = a^{m+}$ и $a^m : a'$ $a^{m-n} (m > n)$.

Александрийские астрономы применяли смешанную десятично-шестидесятиричную систему: целые числа, в том числе числители дробей, они писали по десятичной системе. Арабские ученые как бы восстановили древний вавилонский счет и распространили шестидесятиричный принцип на целые числа, причем систематически употребляли при этом знак нуля. Числа от 1 до 59 писались при этом в специальной алфавитной нумерации. Действия в этой системе, употреблявшейся при астрономических расчетах, производятся, как в нашей десятичной системе целых и дробей. Первое подробное описание такой системы встречается в «Книге о началах арифметики индийцев» (ок. 1000) Кушьяра ибн Лаббана. Мы находим его также в «Ключе арифметики» (1427) Гияс ад-Дина Джемшида ал-Каши (ум. в 1429 или 1436), уроженца иранского города Кашана. В начале XV в. ал-Каши был приглашен Улугбеком для руководства Самаркандской астрономической обсерваторией. Вместе с Улугбеком и другими самаркандскими астрономами ал-Каши участвовал в составлении астрономических таблиц Улугбека. Улугбеку посвящен и «Ключ арифметики». Дробные шестидесятиричные разряды именовались минутами, секундами, терциями и т. д., разряд единиц (от 1 до 59) — градусами, а высшие разряды — первыми поднятыми, вторыми поднятыми и т. д.

Выдающимся достижением ал-Каши явилось введение десятичных дробей.

Попытки введения десятичных дробей в странах ислама делались и раньше, сразу же после введения десятичной нумерации. Такие дроби имеются в «Книге разделов об индийской арифметике» Абу-л-Хасана Ахмада ал-Уклидиси («ал-Уклидиси» можно перевести как «последователь Евклида»), написанной в Дамаске в 952—953 гг. Этот автор, не давая общего описания системы десятичных дробей и их свойств, приводит примеры употребления их при делении нечетных чисел пополам и вычислениях вроде $135(1,1)^5$ или $13(0,9)^5$. Целую часть десятичной дроби он отделял от дробной апострофом сверху. Однако трактат ал-Уклидиси не оказал влияния на позднейших ученых стран ислама.

Целью ал-Каши было дать систему дробей, в которой, как в шестидесятиричной системе, все операции проводятся, как с целыми числами, но которая основана на общеупотребительном десятичном основании и потому доступна тем, кто не знает «исчисления астрономов». Ал-Каши формулирует основаные правила действий с десятичными дробями, способы перевода шестидесятиричных дробей в десятичные и обратно; в его трудах многие величины выражены с помощью десятичных дробей. Десятичная дробь записывалась в одной строке с целой частью числа; для ее обозначения ал-Каши отделял дробь от целого вертикальной чертой или писал другим цветом или надписывал над цифрами названия разрядов, чаще всего называя только низший разряд, определяющий все остальные.

Как уже говорилось, десятичные дроби издавна применялись в Китае. Возможно, что до ал-Каши доходили об этом сведения, однако сам он считал десятичные дроби своим собственным изобретением. Во всяком случае, регулярное их применение и подробное описание операций принадлежат ему. Спустя некоторое время десятичные дроби получили некоторое распространение в Турции. В Европе первый набросок системы десятичных «прим», «секунд», «терций» и т. д. предложил Иммануил Бонфис из Тараскона в XIV в., а систематическим введением десятичных дробей мы обязаны голландцу С. Стевину (1585).

Извлечение корней и «бином Ньютона»

Ал-Хорезми описал лишь прием извлечения квадратных корней. Около 1000 г. у Кушьяра ибн Лаббана мы находим и прием извлечения кубических корней. Он был изложен и в книге ученика Кушьяра Али ан-Насави (ум. 1030) «Достаточное об индийской арифметике». Ан-Насави был уроженцем хорасанского города Насы — нынешнего Ашхабада.

Дальнейшая разработка приемов извлечения корней принадлежит одному из крупнейших математиков Средних веков Омару Хайяму (1048—1131), особенно прославившемуся своими блестящими четверостишиями, которые переведены ныне на все важнейшие языки мира и до сих пор покоряют читателей глубиной лирико-философских раздумий и блестящей афористической формой. Хайям, уроженец города Нишапура в Хорасане, в молодости покинул свою родину, подвергшуюся нашествию кочевников-сельджуков, и после нескольких лет тяжелых мытарств некоторое время работал в Самарканде. В 1074 г. его пригласили в Исфахан для руководства астрономической обсерваторией. Исфаханский период был наиболее плодотворным в жизни Хайяма, он закончился в 1092 г. со смертью покровительствовавшего ему сельджукского султана Малик-шаха и его везира Низам ал-Мулка. После этого Хайям вновь скитается, иногда работает в Мерве при дворе преемников Малик-шаха, но восстановить обсерваторию ему уже не удается. Хайям был автором ряда важных математических трудов, а также астрономических таблиц и нескольких философских сочинений. В своей книге по алгебре Хайям, упомянув «методы индийцев» извлечения квадратных и кубических корней, основанные на правилах

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

и

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

сообщает, что в специальном сочинении он обобщил эти методы на случай извлечения корней с любым целым показателем. «Мы показали,— пишет Хайям,— как определять основания квадрато-квадратов, квадрато-кубов, кубо-кубов и так далее сколько угодно, чего раньше не было» [1]. Весьма вероятно, что уже Хайям владел правилом возведения двучлена в любую целую положительную степень. Однако сочинение Хайяма, в котором изложено это открытие, пока не найдено.

Первое дошедшее до нас описание извлечения корня любой степени из целого числа встречается в «Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли» (1265) Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274). Ат-Туси, уроженец города Туса в Хорасане, работал сначала в столице государства ассасинов, управлявшегося террористической сектой, боровшейся с различными врагами иранских феодалов — багдадскими халифами, европейскими крестоносцами и монгольскими завоевателями. После взятия в 1253 г. монголами столицы ассасинов ат-Туси перешел на службу к монгольскому хану Хулагу и вскоре стал его советником. По совету ат-Туси Хулагу организовал в своей столице Мараге (Южный Азербайджан) одну из крупнейших в Средние века астрономическую обсерваторию, в которой работали ученые из всех стран, захваченных монголами. Здесь под руководством ат-Туси были составлены «Эльханские астрономические таблицы». Ат-Туси принадлежит много трудов по математике и астрономии, а также по физике, минералогии, логике, этике и другим наукам. В «Сборнике по арифметике» ат-Туси подробно описал прием извлечения корней на примере $\sqrt[6]{244\,140\,626}$. Отыскание целой части корня следует схеме, которая была известна ранее китайцам и совпадает по существу с методом, предложенным в начале XIX в. Горнером и Руффини. Дробная часть корня $\sqrt[n]{a^n + r}$, где a, n, r — целые числа и $a^n + r < (a + 1)^n$, находится

---

[1] *Омар Хайям.* Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда под редакцией В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. М., 1962, стр. 74—75.

приближенно в виде $\frac{r}{(a+1)^n-a}$, так что в его примере

$$\sqrt[6]{244140626}=25\frac{1}{26^6-25^6}=25\frac{1}{64775151}.$$

Ат-Туси словесно излагает правило образования разности

$$(a+b)^n-a^n=\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$$

и приводит «таблицу элементов показателей», т. е. биномиальных коэффициентов $\binom{n}{m}$ до $n=12$ в форме треугольника, почти не отличающейся от той, которую мы теперь называем «треугольником Паскаля». Ат-Туси была известна и зависимость между элементами таблицы

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}.$$

Очень подробно изложен весь этот круг вопросов у ал-Каши. По-видимому, эти общие результаты не дошли в свое время до Европы и здесь пришлось их получать заново.

Теория отношений и действительные числа

С самого начала развития математики в арабских странах чрезвычайно большое место в ней занимают приближенные вычисления, необходимые для составления тригонометрических и астрономических таблиц, определения различных геометрических величин (длины окружности, элементов правильных многоугольников и многогранников и т. д.). Быстрое развитие числовой алгебры и ее геометрических приложений, о которых мы еще скажем далее, также вели к тому, что иррациональные числа все чаще и чаще входили в употребление и становились предметом исследования. Простейшие операции с радикалами вроде

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{50}\quad\text{или}\quad\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

производил ал-Хорезми; вскоре становятся известными более общие правила, которые мы записываем в виде формул

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{a^m}\cdot\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^mb^n}.$$

Частое оперирование алгебраическими иррациональностями в их арифметической форме подготовляло почву для выделения понятия об иррациональном числе, равноправном с рациональными числами — целыми и дробями. Иррациональное число начинает представляться более простым объектом, чем античные несоизмеримые отрезки. Это нашло, например, выражение в многочисленных комментариях к X книге «Начал» Евклида, посвященной теории квадратических иррациональных величин, в которых такие величины их преобразования поясняются с помощью соответствующих арифметических иррациональностей. Так, общие преобразования величин, которые можно выразить формулами

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

Ибн ал-Багдади около 1100 г. иллюстрировал примерами

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}} \text{ и } \sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$$

и т. п. Постепенно стирается различие между геометрическими несоизмеримыми величинами и числовыми иррациональностями, числовая иррациональность становится иррациональным числом; вместе с тем любое отношение величин воспринимается как число. Такое расширение понятия о числе могло явиться лишь результатом теоретического исследования.

Критический анализ античной теории пропорций был начат еще Абу Абдаллахом ал-Махани (ум. ок. 880) в «Трактате о трудностях отношения» и продолжен многими учеными. В «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида», написанных Хайямом около 1077 г., определение пропорции в V книге «Начал» объявляется хотя и правильным, но не «истинным», т. е. не выражающим основной сути пропорции. Вместо этого определения Хайям по примеру ряда своих предшественников выражает равенство двух отношений A/B и C/D через равенство всех соответствующих неполных частных разложений этих отношений в непрерывные дроби:

$$\frac{A}{B} = (q_0, q_1, q_2, \ldots) \quad \text{и} \quad \frac{C}{D} = (q_0', q_1', q_2', \ldots),$$

т. е.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

если $q_n = q_n'$ для всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Мы передали в современных обозначениях определение, которое сам Хайям выражает только словами. Аналогично вводятся отношения «больше» и «меньше». По существу такие определения, возрождавшие давно забытую к тому времени доевдоксову теорию пропорций, уже содержали в себе понимание любого несоизмеримого (иррационального) отношения как числа. Хайям доказывает логическую эквивалентность новой и античной теории пропорций. Попутно он пытается доказать принцип существования четвертой пропорциональной к трем данным величинам B, C, D, т. е. величины A, образующей с ними пропорцию $A/B = C/D$. Этот важный принцип, широко применявшийся в античной математике, не получил в ней общего обоснования. Впрочем, доказательство Хайяма содержало, с нашей точки зрения, существенный пробел: он опирался на недостаточный «принцип непрерывности», под которым понимал только бесконечную делимость величины. Далее Хайям развивает учение о составных отношениях, т. е., как мы бы сказали, об умножении и делении отношений, необходимых в приложениях к практическим вычислениям.

В заключение Хайям подходит к обобщению понятия числа на любые положительные действительные числа. Он вводит понятие отвлеченной делимой единицы и, рассматривая отношение двух произвольных непрерывных величин A и B, говорит: «Выберем единицу и сделаем ее отношение к величине G, как A к B. Будем смотреть на величину G не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее, как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим, так как отношение A к B часто может не быть числовым» [1]. Так как под «числами абсолютными и настоящими» Хайям понимает вслед за греками натуральные числа, эта отвлеченная числовая величина трактуется как число в обобщенном смысле слова, так сказать, как «несобственный элемент» расширенной числовой области. Идеи Хайяма были восприняты и развиты ат-Туси. Вопрос об их возможном влиянии на развитие идеи числа в европейской математике остается пока открытым.

Что касается понятия об отрицательном числе, возникшем в Китае и Индии, то оно не нашло сколько-нибудь заметного применения в арабской науке. В одном случае оно встречается в арифметическом трактате Абу-л-Вафы, который рассматривает умножение числа -2, называемого им «долг (дайн) два», на 10, при котором получается -20 («долг двадцать»). Та же терминология встречается, с одной стороны, у индийских математиков, являвшихся учителями арабов, а с другой — у ученика арабов Леонардо Пизанского; возможно, что она имела у математиков стран ислама более широкое распространение. У самаркандского математика Али Кушчи (ум. 1474), бывшего в молодости послом Улугбека при китайском императоре, в «Мухаммедовом трактате по арифметике», посвященном турецкому султану Мухаммеду II, встречаются термины «мусбат» и «манфи», имеющие тот же смысл, что и китайские термины «чжэн» и «фу». Сам Кушчи употреблял эти термины в значении «прибавляемое» и «отнимаемое» (у его предшественников — «заид» и «накис»). Математики Западной Европы, познакомившиеся с сочинением Али Кушчи через византийцев, перевели эти термины на латынь как positivus и negativus и стали обозначать ими положительные и отрицательные числа (в этом смысле термины Кушчи применяются и ныне в Турции, Иране, Азербайджане и Средней Азии).

Арифметические задачи

Теория пропорций получила практические применения в решении многих арифметических задач, возникавших в торговом деле, распределении налогов, разделе наследств в соответствии с нормами мусульманского права и т. д. Из Индии было заимствовано тройное правило, о котором говорится уже в алгебраическом трактате ал-Хорезми, и правила 6, 7 и 9 и т. д. величин. Ал-Бируни посвятил этим правилам специальную «Книгу об индийских рашиках», в которой дает их обоснование с помощью теории составных отношений.

Наряду с тройным правилом в ходу было правило двух ложных положений, полученное, по-видимому, непосредственно из Китая и при-

[1] *Омар Хайям.* Трактаты, стр. 144—145.

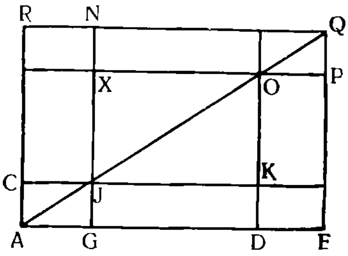


Рис. 58

менявшееся для механического решения задач, представляемых линейным уравнением с одним неизвестным или системой линейных уравнений с несколькими неизвестными. Теоретическое обоснование правила двух ложных положений средствами геометрической алгебры греков дал Коста ибн Лука ал-Ба'лабакки (ум. 912) из Баалбека (Гелиополиса) в Сирии в «Книге о доказательстве действия исчисления двух ошибок».

Коста ибн Лука исследует уравнение $ax = b$ и два значения: $x = x_1$ и $x = x_2$. Рассмотрим, например, случай, когда $x_1 < x < x_2$. Коста ибн Лука строит отрезки на прямой AE (рис. 58): $AD = x$, $AG = x_1$, $AE = x_2$, откладывает перпендикулярно этой прямой отрезок $DO = b$, проводит прямую AO и восстанавливает перпендикуляры GJ и EQ до пересечения с прямой AO. Тогда в силу пропорциональности

$$\frac{GJ}{AG} = \frac{EQ}{AE} = \frac{DO}{AD}$$

перпендикуляры GJ и EQ изображают значения левой части уравнения при $x = x_1$ и $x = x_2$. Так как дано ложное положение AG, то даны GJ и «первая ошибка» JX, и аналогично даны EQ и «вторая ошибка» $PQ = XN$. Поэтому известны прямоугольники PC и RX, равные произведениям первой ошибки на второе ложное положение и второй ошибки на первое ложное положение. Прямоугольники NO и PK равны, поэтому сумма прямоугольников PC и RX равна прямоугольнику RK, который также известен. Но прямоугольник PK равен произведению неизвестной AD на сумму ошибок JX и XN. Если мы обозначим ошибки $JX = d_1$ и $XN = d_2$, то получим искомое правило в виде

$$x = AD = \frac{\text{пл.}\, PC + \text{пл.}\, RX}{JX + XN} = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_1 + d_2}.$$

Правило двух ошибок приобрело большую популярность и перешло затем в европейскую математику; оно применяется и теперь в приближенных вычислениях как средство линейной интерполяции.

Алгебра; квадратные уравнения

Автором основополагающего арабского трактата по алгебре «Краткой книги об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы», в латинских переводах оказавшего также большое влияние на средневековую европейскую науку, был уже не раз упоминавшийся ал-Хорезми. В центре внимания стоит

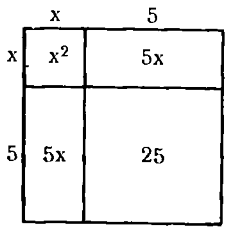


Рис. 59

решение шести канонических классов уравнений первой и второй степеней, которые он, как и все его преемники в странах арабского Востока, записывали без всякой символики:

$$1)\ ax^2 = bx; \qquad 4)\ ax^2 + bx = c;$$
$$2)\ ax^2 = c; \qquad 5)\ ax^2 + c = bx,$$
$$3)\ bx = c; \qquad 6)\ bx + c = ax^2.$$

Сам ал-Хорезми выражал уравнение, скажем, четвертого класса так: «Квадраты и корни равны числу». Чтобы решить какое-либо уравнение первой или второй степени, его требуется предварительно свести к одному из этих типов, которые, как видно, не содержат вычитаемых членов. Для этого применяются операции, давшие название как трудам по алгебре, так и самой этой науке. Операция ал-джабр (восполнение) есть перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов; ал-мукабала (противопоставление) есть сокращение равных членов в обеих частях. Кроме того, требовалось привести коэффициент a при квадрате к единице, так как правила решения формулировались для этого случая. Таким образом, уравнение $2x^2 + 100 - 20x = 58$ с помощью ал-джабра преобразуется в $2x^2 + 100 = 58 + 20x$ и после деления на 2 с помощью ал-мукабалы — в уравнение пятого класса $x^2 + 21 = 10x$.

Что касается решений, то ал-Хорезми формулирует лишь правила, дающие положительные корни уравнений. Уравнения четвертого и шестого классов всегда имеют один и только один такой корень (другой отрицательный); уравнение пятого класса либо имеет два таких корня, либо вовсе не имеет действительных корней. Ал-Хорезми указывает условия, при которых корни существуют, в том числе когда есть только один корень (мы бы сказали теперь — двойной). Правила формулируются на примерах с числовыми коэффициентами, но вполне общим образом. Обоснованы правила для четвертого и шестого классов с помощью некоторых геометрических преобразований прямоугольных фигур, соответствующих нашим алгебраическим преобразованиям. Например, правило решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ доказывается следующим образом. Неизвестная величина x изображается линией, x^2 — квадратом, построенным на этой линии, а произведение $10x$ — суммой двух прямоугольников со сторонами x и 5 (рис. 59). Эти прямоугольники вместе с квадратом образовывали Г-образную фигуру с площадью 39. Наконец, Г-образная фигура дополняется квадратом со стороной 5 до полного квадрата с площадью 64. Сторона полного квадрата одновременно есть $x + 5$ и 8; следовательно, $x = 3$.

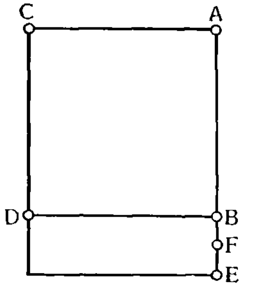


Рис. 60

Это и другие доказательства ал-Хорезми напоминают теоремы античной геометрической алгебры, но лишь отчасти. Предшественники ал-Хорезми в алгебре неизвестны; несомненно, что он опирался на местные традиции, синтезировавшие элементы вавилонской и греческой математики. В алгебраическом трактате ал-Хорезми мы находим также краткие сведения о действиях с алгебраическими выражениями, некоторые примеры алгебраического решения треугольников и большой отдел задач на раздел наследств, выражающихся уравнениями первой степени.

Другой вариант геометрических доказательств и несколько более полный анализ правил решения квадратных уравнений встречается у Ибн Турка ал-Хуттали, уроженца Хуттала — района нынешнего Душанбе, современника ал-Хорезми. И, наконец, доказательства этих правил для четвертых — шестых классов квадратных уравнений с помощью V—VI предложений II книги «Начал» Евклида, выражающих правила

$$ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (a+b)a+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2,$$

мы находим у багдадского ученого Сабита ибн Корры (836—901).

Ибн Корра, уроженец сирийского города Харрана, принадлежал к потомкам древних вавилонян — сабиям, из среды которых вышли многие астрономы и математики. В эпоху эллинизма сабии усвоили греческий язык. Поссорившись со своими единоверцами, Ибн Корра приехал в Багдад, примкнул к кругу ученых, группировавшихся около братьев Бану Муса, и вскоре занял в нем выдающееся место. Ибн Корра — автор многих сочинений по математике, астрономии и механике, он также переводил или редактировал переводы с греческого и сирийского. Именно в его переводах сохранились не дошедшие до нас по-гречески книги «Конические сечения» Аполлония, «Книга лемм», «Книга о семиугольнике» и другие мемуары Архимеда. Все позднейшие ученые Востока пользовались его переводом «Алмагеста» и «Началами» Евклида в его редакции. Квадратным уравнениям посвящен трактат Ибн Корры «Рассуждение об установлении задач алгебры с помощью геометрических доказательств». Приведем в качестве примера обоснование Ибн Корры решения уравнения $x^2+ax=b$. Ибн Корра строил квадрат $ABDC$, равный x^2, и продолжал одну из его сторон на отрезок $BE=a$ (рис. 60). Далее он строил прямоугольник DE, равный произведению ax. Тогда прямоугольник $CE=ABDC+DE$ равен $x^2+ax=b$ и, следовательно, известен. Но если середина отрезка BE — точка F, то в силу VI предложения II книги

«Начал» $EA \cdot AB + BF^2 = AF^2$. Так как произведение $EA \cdot AB =$ пл. EC и BF^2 известны, известен и квадрат AF, а следовательно, и сама линия AF. Искомая линия $AB = x$ равна разности известных линий AF и BF. Отметим, что Ибн Корра называл алгебру уже просто «ал-джабр» без «ал-мукабалы».

Алгебра квадратных уравнений получила дальнейшее развитие в «Книге об ал-джабр и ал-мукабале» египетского математика X в. Абу Камила ал-Мисри. Абу Камил с большим искусством владел различными преобразованиями, в частности иррациональных выражений. Его книга уже не содержит геометрических приложений. Этому вопросу Абу Камил посвятил специальное сочинение, где с помощью квадратных уравнений решены многие задачи на определение элементов правильных пяти- и десятиугольников, вписанных в данный круг или описанных около него. Приведем одну любопытную задачу, в которой нарушено античное требование однородности слагаемых величин и вместе с тем приходится действовать с иррациональными числами. Требуется найти высоту равностороннего треугольника, если сумма площади и высоты равна 10. Дело сводится к уравнению

$$x^2 + \sqrt{3x^2} = \sqrt{300},$$

корень которого

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Иранский математик Абу Бакр ал-Караджи в посвященном багдадскому вазиру Фахр ал-Мулку трактате «Ал-Фахри» (ок. 1010) дал решение трехчленных уравнений вида

$$ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m,$$

непосредственно приводящих к квадратным. Но самые замечательные результаты относятся к уравнениям третьей и отчасти четвертой степени.

Кубические уравнения

Первый толчок в этом направлении сообщила задача Архимеда о делении данного шара плоскостью на два сегмента с данным отношением объемов. Решения, найденные Архимедом и его преемниками, остались арабам неизвестными. Первый шаг сделал ал-Махани, выразивший задачу уравнением типа $x^3 + r = px^2$. Вслед затем несколько ученых X в. — ал-Хазин, Ибн ал-Хайсам и другие — дали геометрическое построение величины x, представив ее (используем нашу терминологию) как абсциссу точки пересечения двух подходящим образом подобранных конических сечений. Этот геометрический метод, известный грекам со времен Евдокса (его применил к удвоению куба Менехм), приобрел основное значение в алгебре стран ислама.

На протяжении X в. уравнениями высших степеней с числовыми или же произвольными коэффициентами был выражен целый ряд геометрических, тригонометрических и физических задач: построение сторон вписанных в данный круг правильных девяти- и семиугольников, построение сегмента шара по данным объему и площади поверхности, задача о трисекции данного угла и др. Все эти задачи сводятся к уравнениям третьей степени. Трисекции угла посвящен трактат Сабита ибн Корры

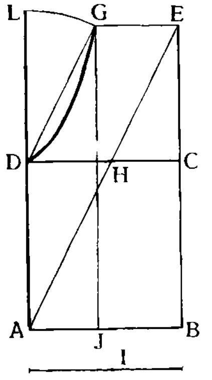


Рис. 61

«Деление прямолинейного угла на три равные части». Ибн Корра, следуя Архимеду, сводит эту задачу к построению с помощью «вставки», а задачу о помещении отрезка I между сторонами CD и продолжением стороны BC прямоугольника $ABCD$ таким образом, чтобы продолжение этого отрезка проходило через вершину A, он сводит к проведению через вершину D гиперболы, для которой прямые AB и BC служат асимптотами, и к проведению окружности с центром D и радиусом I (рис. 61). Если гипербола и окружность пересекутся в точке G, а GE и GJ — перпендикуляры, опущенные из точки G на прямые AB и BC, то искомый отрезок — отрезок HE прямой AE; в силу известного свойства гиперболы

$$AD \cdot DC = GJ \cdot GE,$$

откуда

$$\frac{GJ}{AD} = \frac{DC}{GE}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{EB}{BC} = \frac{DC}{GE}.$$

Но

$$\frac{EB}{BC} = \frac{EA}{AH} = \frac{DC}{DH},$$

откуда $GE = DH$. Поэтому четырехугольник $DHEG$ — параллелограмм, и, следовательно, $HE = DG = I$. В том же сочинении с помощью пересечения гиперболы и окружности решена задача построения двух средних пропорциональных между двумя линиями, частным случаем которой является задача удвоения куба. В обработке Ибн Корры сохранилась упоминавшаяся ранее «Книга о семиугольнике» Архимеда.

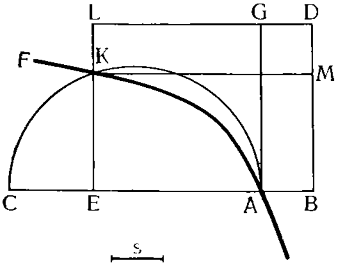
Построение стороны правильного вписанного девятиугольника для вычисления тригонометрических таблиц подробно изложено в крупнейшем астрономическом произведении средневекового Востока — «Каноне Мас'уда» Абу-р-Райхана ал-Бируни (973—ок. 1050). Уроженец г. Кят (ныне город Бируни Узб.ССР), ал-Бируни сначала работал в родном ему Хорезме и в Гургане на южном берегу Каспийского моря, а с 1017 г., после захвата Хорезма афганским султаном Махмудом Газневи, был принужден переехать в столицу империи Махмуда Газну. После завоевания Махмудом Северной Индии ал-Бируни прожил в ней несколько лет и глубоко изучил санскритскую научную литературу. Ал-Бируни принадлежит большое число сочинений по различным разделам математики и естествознания вплоть до минералогии и фармакогнозии. «Канон Мас'уда», посвященный сыну Махмуда Мас'уду вступившему на престол в 1030 г.,— огромный энциклопедический труд, в котором, помимо астрономии, имеются большие части, посвященные тригонометрии, хронологии и географии. В тригонометрической части «Канона» ал-Бируни свел определение стороны вписанного правильного девятиугольника, т. е. хорды 40°, к кубическим уравнениям $x^3 = 1 + 3x$ и $x^3 + 1 = 3x$, в первом из которых x — хорда дуги 2/9 окружности, а во втором x — сторона вписанного правильного 18-угольника. Приближенно решая первое из этих уравнений, ал-Бируни нашел, что $x = 1;52,45,47,13$, откуда следует, что хорда 1/9 окружности равна 0;41,2,32,41,55. Однако он не сообщил здесь способа приближенного вычисления корней и лишь описал итерационный прием нахождения стороны девятиугольника, состоящий в последующем определении хорд 30°, 60° и 72° (т. е. 1/12, 1/6 и 1/5 круга), а затем хорд $12° = 72° - 60°$, $42° = 30° + 12°$, $1/4 \cdot 42° = 10°30'$, $40°30' = 30° + 10°30'$, $1/4 \cdot 40°30' = 10°7'30''$, $40°7'30''$ и т. д. Ал-Бируни довел вычисления до значения 0;41,2,32,42,29, отличающегося от результата приближенного решения уравнения менее чем на кварту.

Уравнение четвертой степени впервые появилось в «Книге оптики» Абу Али ибн ал-Хайсама (965—1039). Уроженец Басры в Ираке, Ибн ал-Хайсам работал главным образом в Каире; ему принадлежит много трудов по математике и астрономии. Латинский перевод его «Книги оптики» оказал большое влияние на развитие этой науки в Европе. К уравнению четвертой степени сводится задача Ибн ал-Хайсама об определении места отражения светящейся точки от цилиндрического зеркала по данным положениям точки и глаза. Каирский ученый решил ее с помощью пересечения окружности и гиперболы.

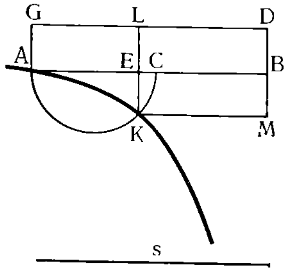
В построении кубических уравнений были достигнуты столь значительные успехи, что вскоре стало возможным создание обобщающей их теории. Наиболее удачное изложение ее дал Омар Хайям в «Трактате о доказательствах задач алгебры» (1074). В этом труде алгебра впервые выступает как самостоятельная наука. Подобно Ибн Корре, Хайям нередко называл алгебру ал-джабр; он употребляет также термин «алгебраисты» (джабрийийун). Предметом алгебры Хайям объявляет неизвестное число или неизвестную величину, отнесенные к другим известным числам или величинам. Такое отнесение осуществляется в виде уравнения, т. е. приравнивания одних степеней другим. Тем самым алгебра рассматривается как наука об уравнениях, которые мы теперь называем алгебраическими.

Отметив, что поиски числового решения кубических уравнений, т. е. решения в радикалах, оказались тщетными, Хайям высказывает надежду, что это будет сделано в будущем; действительно, это удалось итальянцам в начале XVI в. Общим методом решения объявляется построение корней с помощью пересечения конических сечений.

Главное содержание трактата составляет классификация уравнений, подбор соответствующих каждому классу пар конических сечений и определение возможного числа и границ положительных корней, т. е., как говорят теперь, отделение корней. Уравнения исследуются в общем виде, т. е. коэффициенты их предполагаются произвольными положительными величинами. Всего Хайям различает 14 канонических классов. Для каждого из них он указывает требуемые конические сечения — параболы,



а



б

Рис. 62

равносторонние гиперболы и окружности, абсциссы точек пересечения которых выражают корни уравнения, и анализирует условия возможности положительных корней. Так, для решения уравнения $x^3 + qx = px^2 + r$ Хайям строит гиперболу и окружность следующим образом: он считает коэффициент p линией BC, коэффициент q — квадратом со стороной BD, а свободный член r — параллелепипедом с основанием q и высотой $s = AB$ (т. е. $BC = p$, $BD = \sqrt{q}$, $AB = r/q$), и откладывает отрезки AB и BC на одной прямой в одну сторону от точки B, а BD — на перпендикуляре к этой прямой (рис. 62, *а*, *б*, где соответственно $r/q < p$ и $r/q > p$). Далее через точку A проводится гипербола, асимптотами которой служат прямая BD и прямая DL, параллельная AB, и окружность, построенная на отрезке AC, как на диаметре. Если принять за оси координат прямые AB и BD, уравнения этих кривых можно записать в виде

$$y^2 = \left(x - \frac{r}{q}\right)(p - x) \quad \text{и} \quad x(\sqrt{q} - y) = \frac{r}{\sqrt{q}}.$$

Корнем уравнения является абсцисса точки K пересечения этих кривых. Хайям правильно указывает, что во втором случае ($r/q > p$) этот корень единственный (абсцисса r/q точки A не удовлетворяет кубическому уравнению, так как уравнения кривых при исключении y дают уравнение четвертой степени, корни которого — корни кубического уравнения и число r/q), однако он не заметил, что в первом случае ($r/q < p$) могут существовать еще два положительных корня и, таким образом, прошел мимо открытия трех корней кубического уравнения, обнаруженных только Дж. Кардано в XVI в. Впрочем, заметить возможность еще двух точек пересечения кривых на чертеже нелегко. Во всех остальных случаях анализ существования одного или двух положительных корней у Хайяма совершенно правильный. Для примера Хайям применяет свой геометрический метод, комбинируя его с некоторыми расчетами, и к отделению корней уравнений с числовыми коэффициентами.

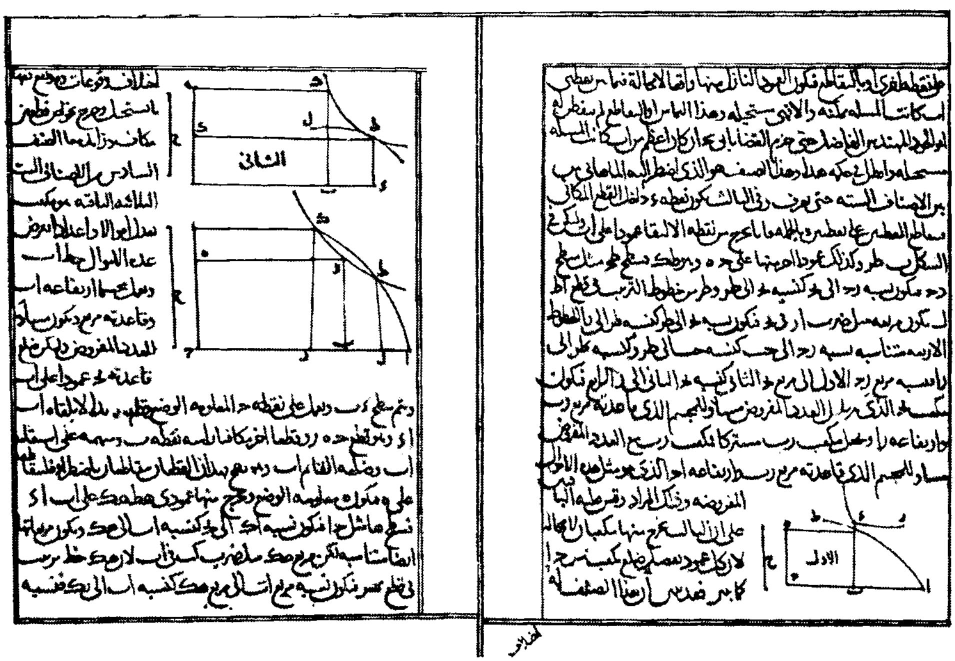
Геометрическая теория кубических уравнений привлекала внимание математиков стран ислама и позднее, а ал-Каши распространил ее на уравнения четвертой степени. Мы не знаем, однако, изложил ли он свои результаты, мельком упоминаемые в «Ключе арифметики», в специальном сочинении. Впоследствии геометрическое построение корней уравнений явилось предметом исследований европейских математиков Нового времени — Декарта и многих других, которые, впрочем, отправлялись от трудов греческих классиков: открытия арабских ученых в этой области были им незнакомы.

Наряду с общей теорией разрабатывались и приемы численного решения уравнений третьей степени. Такие приемы были известны, например, ал-Бируни, который, как мы видели, определял в «Каноне Мас'уда» сторону вписанного правильного девятиугольника. Ал-Каши в недошедшем до нас «Трактате о хорде и синусе» предложил оригинальный итерационный прием решения уравнения трисекции угла, которое можно записать в виде

$$x^3 + q = px,$$

где $x = \sin \varphi$, $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4} \sin 3\varphi$. Метод ал-Каши известен нам в изложении Кази-заде ар-Руми, работавшего в Самаркандской обсерватории одновременно с ал-Каши, в «Трактате об определении синуса одного градуса» и внука ар-Руми Мирима Челеби в комментариях к астрономическим таблицам Улугбека. Этой же задаче был посвящен и недошедший до нас трактат самого Улугбека. Ал-Каши записывает кубическое уравнение в форме $x = (q + x^3)/p$ и берет в качестве первого приближения $x_1 = q/p$, в качестве второго $x_2 = (q + x_1^3)/p$; далее вычисляются $x_3 = (q + x_2^3)/p$ и т. п. в зависимости от требуемой точности. Этот процесс в рассматривавшихся случаях сходится очень быстро; с его помощью ал-Каши вычислил значение $\sin 1° = 0; 1,2,49,43,11,44$, т. е. в десятичных дробях 0,017 452 406 437 283 571, где все цифры верны. Г. Ганкель писал, что этот прием «не уступает по тонкости и изяществу всем открытым на

Страница рукописи алгебраического трактата Хайяма



Западе после Виета методам приближения»[1]. Следует все же добавить, что способ ал-Каши — частного характера.

Мы отмечали риторический характер арабской алгебры. Только в мавританских государствах были сделаны первые шаги к созданию алгебраической символики, которые мы знаем по труду «Снятие покрывала с науки губар» ал-Каласади, работавшего в Гренаде перед самой гибелью последнего мавританского эмирата на юге Испании и умершего изгнанником в Африке (1486). Ал-Каласади для обозначения квадратного корня из числа ставил над этим числом букву «джим» — первую букву слова «джизр» — корень, а при записи уравнений для обозначения неизвестных и их квадратов ставил над соответствующими коэффициентами буквы «шин» и «мим» — первые буквы слов «шай» — вещь и «мал» — квадрат. Роль знака равенства играет буква «лам» — возможно, последняя буква слова «йа'далу» — равно. Интересно также обозначение пропорций: члены пропорций разделяются троеточиями вида.˙., а неизвестная в пропорциях тройного правила обозначается той же буквой «джим», что и корень (в странах ислама неизвестную, как и у нас, часто называли корнем).

Символика ал-Каласади была столь развита, что невозможно считать ее всецело созданием этого ученого. По-видимому, к его предшественникам принадлежал марокканский мавританский математик XIII в. Ибн ал-Банна ал-Марракуши (из Марокко), который, по сообщению тунисского историка XIV в. Ибн Халдуна, применял при доказательствах алгебраические обозначения, служащие одновременно и для «отвлеченного рассуждения» и для «наглядного представления».

Теория чисел

Достижения в теории чисел были менее значительны. Все же следует упомянуть решение неопределенных уравнений первой степени и их систем в целых числах, иногда требовавшие терпеливых расчетов. Так, Абу Камил в «Книге редкостей в арифметике» нашел все 2676 целых решений системы

$$x + y + z + u + v = 100,$$

$$2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v = 100.$$

Были рассмотрены и некоторые задачи на решение в целых числах уравнений второй степени.

Быть может, особенно замечательно, что математики стран ислама впервые высказали утверждение, составляющее первый частный случай великой теоремы Ферма, именно, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ неразрешимо в рациональных числах (кроме тривиального случая, когда хотя бы одна из неизвестных равна нулю). В свою очередь, это утверждение связано с предположением о неразрешимости в рациональных числах задачи об удвоении куба $2x^3 = z^3$, которое должно было возникнуть еще у древних греков. «Трактат о построении прямоугольных треугольников с

[1] *H. Hankel.* Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874, S. 292.

Улугбек.
Скульптурный портрет М. М. Герасимова

рациональными сторонами и о пользе их познания» Абу Джа'фара Мухаммеда ибн ал-Хасана (переписанный в 970 г.), посвященный построению пифагоровых троек чисел, начинается с упоминания, что этот вопрос был изложен Абу Мухаммедом ал-Худжанди перед доказательством того, что «сумма двух кубических чисел не является кубическим числом» [1]. Имя Мухаммед в арабской записи, где гласные опускаются, только одной буквой отличается от имени Махмуд, а в X в. работал известный математик и астроном Абу Махмуд Хамид ал-Худжанди. Поэтому обычно считают, что автором трактата о кубических числах был этот ученый. Однако Хамид ал-Худжанди умер около 1000 г., а в рукописи, переписанной в 970 г., об ал-Худжанди говорится «да помилует его Аллах», как говорится только о покойных. Ал-Худжанди, как показывает это имя, происходит из города Ходжента — нынешнего Ленинабада; быть может, первый из них был учителем второго.

Доказательство неразрешимости уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в рациональных числах, данное Абу Мухаммедом ал-Худжанди, не сохранилось. Весьма сомнительно, чтобы оно было безошибочным: для этого недоставало арифметических средств. Наиболее раннее доказательство этого предложения дал Эйлер в середине XVIII в.

[1] *F. Woepcke*. Recherches sur plusieuers ouvrages de Léonard de Pise, Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei, 1861, v. 14, p. 301.

Сабит ибн Корра посвятил «Книгу о нахождении дружественных чисел легким способом» изложению способа образования дружественных чисел, т. е. пар чисел, каждое из которых равно сумме делителей другого. Способ Ибн Корры, обобщающий пифагорейский способ образования совершенных чисел, изложенный в «Началах» Евклида, состоит в том, что если $p = 3 \cdot 2^n - 1$ и $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ — простые числа, то числа $M = 2^n pq$ и $N = 2^n (p + q + pq)$ — дружественные числа (при $n = 2$ мы получаем $M = 220$ и $N = 284$).

Геометрические вычисления

В геометрии большое место занимали вопросы, связанные с применением вычислительных методов. К этому кругу проблем относятся уже упоминавшиеся применения алгебры; использовались с этой целью и тригонометрические приемы. Уже «Книга измерения плоских и шаровых фигур» братьев Бану Муса, написанная в середине IX в., свидетельствовала о глубоком усвоении античных приемов измерения, в частности изложенных в «Измерении круга» Архимеда. В дальнейшем вычисление со все возрастающей точностью элементов фигур, особенно правильных многоугольников и многогранников, занимало многих ученых; сказанное относится и к точному или приближенному вычислению круглых фигур и их частей, а также фигур, встречающихся в строительном деле,— арок, сводов, полых куполов и поверхностей в форме сталактитов.

Быть может, самым ярким примером искусного применения вычислительной техники служит «Трактат об окружности» ал-Каши, в котором длина окружности вычислена (с помощью последовательного извлечения квадратных корней) как среднее арифметическое периметров вписанного и описанного правильных многоугольников с числом сторон $3 \cdot 2^{28}$. Это дало ал-Каши для отношения длины окружности к диаметру, т. е. числа π, приближение $\pi = 3;08,29,44,00,47,25,53,07,25$, которое он здесь же переводит в десятичные дроби: $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 25$, где неверна только последняя цифра 5, которую следовало бы заменить на 38.... Подобная точность была вновь достигнута лишь сто пятьдесят лет спустя А. ван Роменом, который воспользовался вписанным и описанным 2^{30}-угольниками.

Заметим в этой связи, что математики стран ислама уже высказывали мысль об иррациональности числа π — факт, доказанный только в XVIII в. Ламбертом и Лежандром.

Геометрические построения

Для нужд землемерия, архитектуры, техники разрабатывались и методы геометрических построений. Внук Сабита ибн Корры Ибрахим ибн Синан (908—946) посвятил теории геометрических построений специальную «Книгу о методе анализа и синтеза и о других действиях в геометрических задачах». В «Книге о построении трех (конических) сечений» Ибн Синан рассматривает семь способов построения эллипса, гиперболы и параболы по точкам с помощью циркуля и линейки. Абу Саид ас-Сиджизи (X — XI вв.) в «Трактате об описании конических сечений» применил для непрерывного построения всех трех конических сечений так

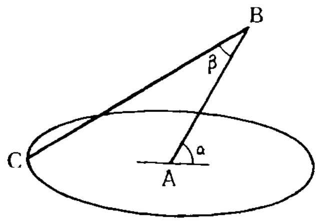


Рис. 63

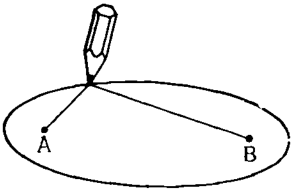


Рис. 64

называемый совершенный циркуль, одна из ножек которого при вращении может вытягиваться и сокращаться по длине отрезка прямолинейной образующей конуса от его вершины до точек сечения. На рис. 63 изображен совершенный циркуль, ножка AB которого закреплена под углом α к плоскости бумаги, а ножка BC переменной длины вращается вокруг ножки AB под углом β. Заметим, что эксцентриситет ε конического сечения связан с углами α и β соотношением $\varepsilon = \cos\alpha/\cos\beta$, т. е. при $\alpha > \beta$ сечение является эллипсом, при $\alpha = \beta$ — параболой, а при $\alpha < \beta$ — ветвью гиперболы.

Непрерывному построению эллипса с помощью нити, закрепленной в его фокусах (так называемый способ садовника), посвящен написанный в IX в. трактат одного из братьев Бану Муса ал-Хасана «Об удлиненном круге». На рис. 64 изображено построение таким образом эллипса с фокусами A и B.

Большое число геометрических построений изложено в «Книге о том, что необходимо ремесленнику из геометрических представлений» Абу-л-Вафы ал-Бузджани[1]. Помимо элементарных задач, решаемых с помощью циркуля и линейки точно, здесь даются и приближенные построения, например для правильных семи- и девятиугольника; рассмотрены и механические приемы трисекции угла, а также удвоения куба. Около полутора десятков задач решено с помощью циркуля постоянного раствора — такие построения представляли практический интерес, ибо на открытой местности удобно пользоваться окружностями фиксированного радиуса. Абу-л-Вафа указывает также способы построения по точкам параболы, которую он называет «зажигательным зеркалом». Интересны построения Абу-л-Вафы на сфере: помимо элементарных задач сферической геометрии здесь решаются задачи разделения сферы на сферические многоугольники, получаемые проектированием из центра сферы ребер вписанных в нее правильных и полуправильных многогранников. Построениям на сфере посвящено и специальное «Рассуждение о циркуле для больших кругов» Ибн ал-Хайсама.

Из геометрических задач Абу-л-Вафы отметим остроумное построение квадрата, равновеликого трем равным квадратам, путем раскроя этих квадратов: два из них делятся диагонально пополам, полученные треугольники приставляются к сторонам третьего квадрата. Тогда фигура

[1] Недавно выяснилось, что большая часть этой книги Абу-л-Вафы текстуально совпадает с написанной на 50 лет ранее «Книгой духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур» знаменитого философа Абу Насра ал-Фараби (ок. 870—950).

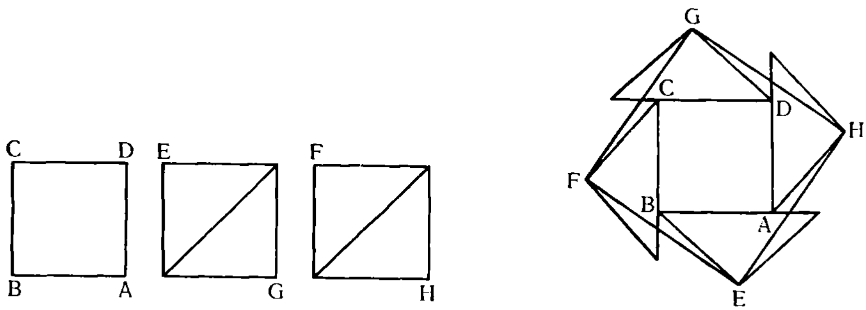


Рис. 65

$EFGH$ — искомый квадрат, который получается отрезанием выступающих частей треугольников и вставлением их на место конгруэнтных им частей квадрата $EFGH$, не заполненных треугольниками (рис. 65). Абу-л-Вафа показывает неточность методов, которыми решают эту задачу ремесленники, а также решает другими методами, из которых следует отметить построение стороны утроенного квадрата как диагонали куба, построенного на одном из малых квадратов. Особенно важно замечание Абу-л-Вафы к последнему методу: «Точно так же обстоит дело, если мы хотим построить квадрат, состоящий более чем из трех или менее чем из трех квадратов» [1], который для $n > 3$ квадратов означает мысленное построение диагонали n-мерного куба, построенного на данном квадрате. Именно в эту эпоху на Востоке получили распространение геометрические названия степеней выше третьей: квадрато-квадрат (мал ал-мал), квадрато-куб (мал ал-ка'б) и кубо-куб (ка'б ал-ка'б) и т. д., являющиеся переводами терминов Диофанта и их обобщениями; эти термины были хорошо известны Абу-л-Вафе, которому принадлежат комментарии к «Арифметикам» Диофанта.

Теория параллельных

Среди общих проблем геометрии пристальное внимание арабских ученых привлекла теория параллельных. Постулат параллельных Евклида (если прямая образует с двумя другими прямыми, лежащими в одной плоскости, внутренние односторонние углы, в сумме меньше двух прямых, то это прямые при достаточном продолжении пересекаются с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых) был подвергнут специальному рассмотрению еще греками. Многие полагали, что содержащееся в этом постулате утверждение является теоремой, которую можно доказать с помощью других постулатов и аксиом «Начал».

Первый арабский труд по этому вопросу был написан еще ал-Аббасом ал-Джаухари, работавшим под руководством ал-Хорезми. Ал-Джаухари в «Совершенствовании книги „Начала"» опирался на неявно предполагае-

[1] *Абу-л-Вафа ал-Бузджани.* Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений. Перевод С. А. Красновой. «Физико-математические науки в странах Востока», 1966, вып. I(IV), стр. 118.

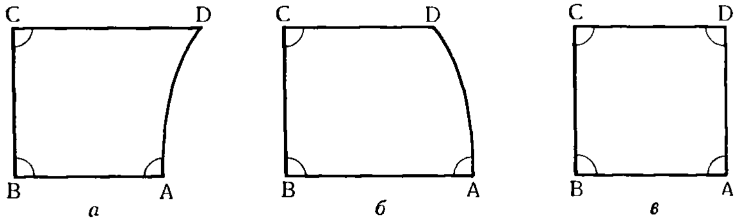


Рис. 66

мое допущение, равносильное доказываемому постулату: если при пересечении двух прямых какой-либо третьей накрестлежащие углы равны, то то же имеет место при пересечении тех же двух прямых любой другой прямой. Он доказал в качестве теоремы предложение: через любую точку внутри любого данного угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны. На скрытом допущении этого предложения основывалось одно из доказательств постулата о параллельных, придуманных Лежандром.

Два трактата, посвященные доказательству V постулата, принадлежат Сабиту ибн Корре. В «Книге о доказательстве известного постулата Евклида» Ибн Корра основывается на предположении, что если две прямые удаляются друг от друга с одной стороны, они обязательно приближаются с другой стороны. С помощью этого утверждения, равносильного V постулату, Ибн Корра доказывает существование параллелограмма, после чего уже легко доказывается V постулат. В «Книге о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся» Ибн Корра исходит из существования равноотстоящих прямых, с помощью чего доказывает сначала существование прямоугольника. Здесь, однако, существование равноотстоящих прямых на плоскости (утверждение, само по себе равносильное доказываемому) не постулируется: Ибн Корра пытается вывести его из представления о «простом движении», т. е. о равномерном поступательном движении вдоль прямой. Именно, он считает очевидным (здесь-то и скрыто утверждение, содержащее доказываемый постулат), что при таком движении все движущиеся точки описывают прямые линии.

Ибн ал-Хайсам также рассмотрел теорию параллельных в двух сочинениях. В трактате «О разрешении сомнений в книге Евклида „Начала“» исходным служит утверждение, что две пересекающиеся прямые не могут быть параллельны одной прямой, т. е. что из одной точки нельзя провести двух параллелей к одной прямой. В «Книге комментариев к введениям книги Евклида „Начала“» Ибн ал-Хайсам использует то же представление о «простом движении», что и Ибн Корра. С помощью «простого движения» Ибн ал-Хайсам устанавливает, что конец отрезка, перпендикулярного к прямой, вдоль которой происходит движение, описывает прямую, которая, таким образом, является равноотстоящей от данной прямой. Далее доказывается существование прямоугольника, для чего рассматриваются четырехугольник с тремя прямыми углами и три гипотезы о четвертом угле этого четырехугольника, который априори можно предположить острым, тупым и прямым (рис. 66).

Как мы теперь знаем, гипотеза острого угла имеет место в геометрии Лобачевского, в которой выполняются все аксиомы геометрии Евклида,

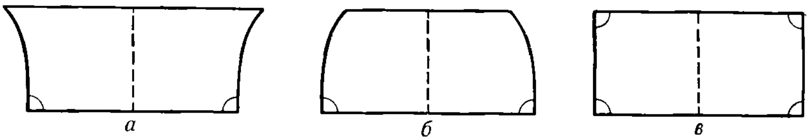
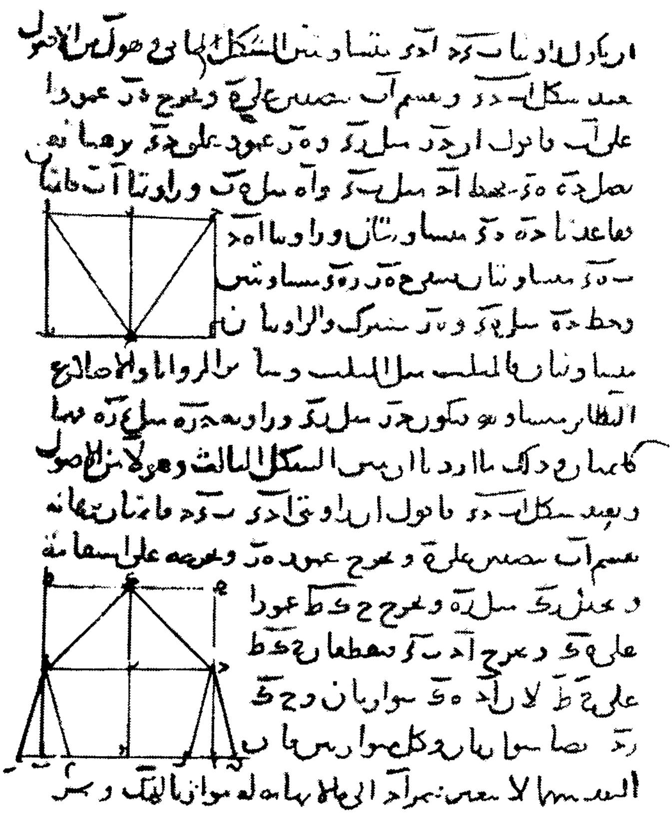


Рис. 67

кроме V постулата. Гипотеза тупого угла выполняется в неевклидовой геометрии Римана (эллиптическая геометрия) и на сфере, если считать большие круги сферы прямыми линиями. Наконец, гипотеза прямого угла имеет место в геометрии Евклида. Ибн ал-Хайсам опровергает первые две гипотезы с помощью «доказанного» им существования равноотстоящих прямых. Такой же четырехугольник и те же гипотезы рассматривал, правда по-иному, в XVIII в. Ламберт.

Страница рукописи Хайяма «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида»



Омар Хайям в «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида» подверг критике доказательство Ибн ал-Хайсама, считая вслед за Аристотелем, что в геометрию недопустимо вводить движение. Собственное доказательство Хайяма базируется на принципе, который он считал более простым, чем постулат Евклида: две сходящиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения. Каждое из этих двух утверждений равносильно постулату Евклида. В отличие от многих своих предшественников, Хайям формулировал свой постулат явно. В его рассуждениях основную роль играет рассмотрение четырехугольника с двумя равными сторонами, перпендикулярными к основанию. Углы, прилегающие к четвертой стороне, равны между собой; подобно Ибн ал-Хайсаму, Хайям разбирает три гипотезы о величине этих углов (рис. 67). Опровергая гипотезы острого и тупого углов, он также приходит к существованию прямоугольника, и т. д. Комментарии Хайяма к Евклиду оказали влияние на работы по теории параллельных Насир ад-Дина ат-Туси, который в своем «Изложении Евклида» предложил доказательство, основанное на постулате: если прямые, расположенные в одной плоскости, расходятся в одном направлении, они не могут в этом направлении сходиться, если только не пересекаются. И он рассматривает четырехугольник Хайяма и три гипотезы о нем.

Заметим, что тот же четырехугольник и те же три гипотезы были положены в основу исследований по теории параллельных итальянского математика первой половины XVIII в. Саккери.

Мы назвали далеко не всех математиков, занимавшихся теорией параллельных на протяжении IX—XIV вв. Разумеется, арабские математики были далеки от мысли о создании неевклидовой геометрии и только стремились вывести постулат Евклида о параллельных из принципов, которые считали более очевидными. Но попутно они сделали несколько выдающихся открытий: установили двустороннюю зависимость между этим постулатом и величиной суммы углов четырехугольника и, следовательно, треугольника; установили логическую эквивалентность ряда предложений теории параллельных; применили для опровержения гипотез острого и тупого углов способ приведения к противоречию и т. д. При этом Хайям получает некоторые предложения, по существу принадлежащие к первым теоремам неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана.

Исследования по теории параллельных ат-Туси стали известными в Европе в XVII в., в частности Валлису, и таким образом сыграли роль в подготовке одного из крупнейших открытий математики — систем неевклидовых геометрий.

Тригонометрия

Тригонометрия возникла сначала в форме исчисления хорд в трудах александрийских астрономов. Индийцы, отправляясь от этих трудов, ввели линии синуса, косинуса и синуса-версуса. Познакомившись с индийскими «сиддхантами», арабские ученые существенно продвинули вперед разработку тригонометрии, которая стала благодаря им разветвленной и самостоятельной наукой.

Первоначально тригонометрия излагалась в составе астрономических сочинений, заключавших и тригонометрические таблицы. Мы уже указывали, что арабы называли линию синуса словом «джайб» (транслитерация индийского слова «джива» — хорда, тетива), переведенным на латынь словом sinus; от латинского сокращения выражения complementi sinus, которым было переведено арабское выражение «джайб тамам» — синус дополнения, произошел наш «косинус». Понимая под словом «синус» линию синуса, арабы называли радиус круга «наибольшим синусом» или «полным синусом»; последнее выражение долго сохранялось в Европе в виде названия sinus totus и обозначения sin tot.

Линии тангенсов и котангенсов арабы первоначально именовали соответственно «обращенной тенью» (зилл ма'кус) и «плоской тенью» (зилл муставс) — названиями, восходящими к гномонике александрийских астрономов и объясняющимися тем, что линии тангенса и котангенса первоначально рассматривались как тени гномона — горизонтального и вертикального — соответственно на вертикальную и горизонтальную плоскости; позже эти линии стали называть соответственно «тенью» и «тенью дополнения» (в Европе их вначале называли umbra — тень). Линии синуса и косинуса измеряли, следуя традиции александрийских и индийских астрономов, в 60-х долях радиуса, а линии тангенса и котангенса — в 7-х и 12-х долях гномона.

Линии секанса и косеканса, являющиеся отрезками прямой диаметра, сначала называли диаметрами обращенной и соответственно плоской тени, а впоследствии — первым и вторым диаметрами. Теоретический интерес этих двух последних линий невелик, но таблицы их вплоть до открытия логарифмов имели практическую ценность, поскольку позволяли заменять деление на косинус и синус умножением. Наиболее ранние таблицы синусов в арабском мире были составлены, по-видимому, ал-Хорезми, а в астрономических таблицах его современника Хабаша ал-Хасиба ал-Марвази имелись уже линии тангенса, котангенса, секанса и косеканса.

Вслед за индийскими астрономами ученые стран ислама при решении астрономических задач пользовались правилами сферической тригонометрии. Например, Сабит ибн Корра в «Книге о часовом инструменте, называемом солнечными часами» дал два решения задачи об определении высоты h Солнца над горизонтом по широте φ местности, склонению δ Солнца и его часовому углу h (см. стр. 201). Правила Ибн Корры в наших обозначениях имеют вид

$$\sin h = (\sin\operatorname{vers} t_0 - \sin\operatorname{vers} t)\,\frac{\sin(\pi/2 - \varphi + \delta)}{\sin\operatorname{vers} t_0}$$

и

$$\sin h = \sin(\pi/2 - \varphi + \delta) - \sin\operatorname{vers} t \cos\varphi\cos\delta,$$

где t_0 — угол ZPA на рис. 55. Первое правило отличается от правила Варахамихиры только тем, что произведение $\cos\varphi\cos\delta$ заменено равным ему отношением

$$\frac{\sin(\pi/2 - \varphi + \delta)}{\sin\operatorname{vers} t_0} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{1 + \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta};$$

во втором правиле h находится без помощи t_0. То и другое равносильно сферической теореме косинусов. Эти же правила изложены в «Книге о науке звезд» ал-Баттани, а затем ал-Бируни в «Каноне Мас'уда» и другими астрономами стран ислама.

К той же теореме сводились правила определения расстояния между двумя городами с данными географическими координатами и определения направлений на священный город мусульман Мекку (так называемая кыбла) в городе с данными координатами. В первом случае при определении расстояния AB между городами A и B в сферическом треугольнике ABN, образованном этими городами и северным полюсом Земли N, известны угол N, равный разности долгот городов A и B, и расстояния (в градусах) NA и NB, равные дополнениям широт городов A и B до $\pi/2$. Во втором случае, если считать, что город B — Мекка, требуется узнать угол A того же треугольника. К задачам сферической тригонометрии сводятся также важные для сферической астрономии задачи взаимного перехода между тремя применяемыми в астрономии системами координат на небесной сфере: экваториальной, где роль экватора играет небесный экватор, а роль полюса — полюс мира, вокруг которого совершается видимое суточное вращение светил; эклиптической, где роль экватора играет эклиптика, по которой совершается видимое годичное движение Солнца, а роль полюса — полюс эклиптики, и, наконец, горизонтальной, где роль экватора играет линия горизонта, а роль полюса — зенит.

Сферической тригонометрии было посвящено также сочинение Сабита ибн Корры «Трактат о фигуре секущих», в котором доказана сферическая теорема Менелая, формулируемая еще не с помощью синусов, как у последующих математиков, а, следуя Менелаю и Птолемею, с помощью хорд удвоенных дуг.

На рубеже IX и X вв., например, в «Книге о науке звезд» сабия Абу Абдаллаха ал-Баттани (ок. 850—929) учение о тригонометрических функциях, представлявшихся в виде отрезков, связанных с кругом определенного радиуса, достигло довольно высокого развития. Были найдены простейшие соотношения между ними, разработаны приемы составления тригонометрических таблиц и установлен ряд основных теорем, служащих для решения плоских и сферических треугольников. Правда, запас этих теорем был невелик и потому решение треугольников было часто довольно громоздким. Весьма значительного развития достигло искусство решения сложных тригонометрических задач в «Каноне Мас'уда» ал-Бируни. Математики и астрономы стран ислама проявили большое вычислительное искусство при составлении тригонометрических таблиц. Мы упоминали об алгебраическом вычислении $\sin 1°$ ал-Каши, но уже в X в. Абу-л-Вафа в своем «Алмагесте» с помощью тонких интерполяционных приемов вычислил $\sin 0°{,}5$ с точностью до 10^{-8}. Абу-л-Вафа пользовался линейным интерполированием; ал-Бируни предложил в «Каноне Мас'уда» применять квадратическое интерполирование.

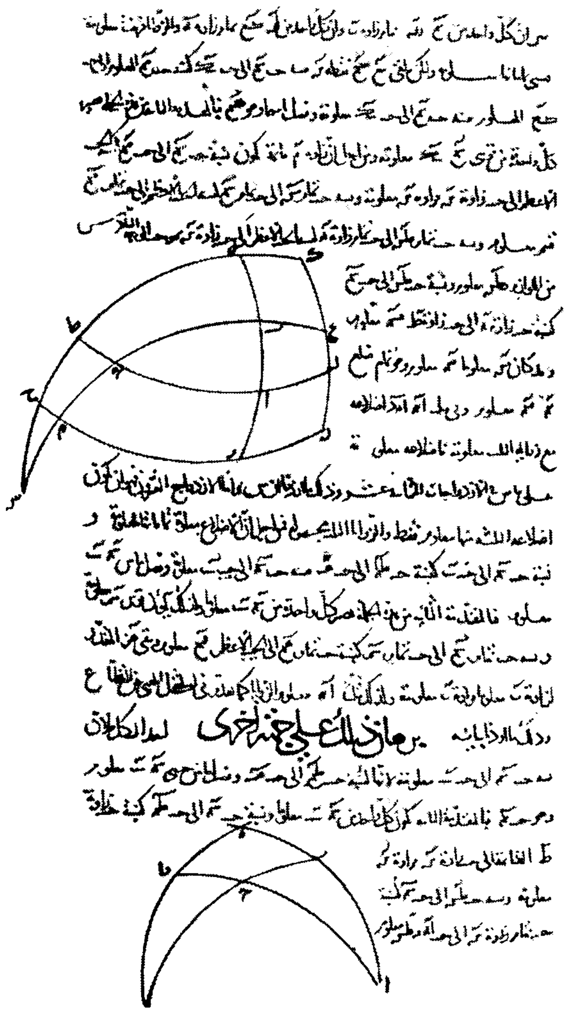
Одним из замечательных образцов высокой техники приближенных вычислений может служить итерационный прием решения трансцендентного уравнения, получившего позднее имя Кеплера — уравнения $t = \theta - k \sin\theta$ (где t — данное число), встретившегося арабским ученым в теории параллакса. Прием, применявшийся еще ал-Хасибом ал-Марвази, состоит в образовании последовательных приближений

$$\begin{aligned} \theta_0 &= t + k\sin t, \\ \theta_1 &= t + k\sin\theta_0, \\ \theta_2 &= t + k\sin\theta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ал-Хасиб мог удовлетвориться отысканием θ_3.

В XI в. появляется сводное сочинение, посвященное сферической тригонометрии,— трактат «Собрание правил науки астрономии» (теоремы сферической тригонометрии, необходимые для астрономии, называли «правилами астрономии»). Имя автора в дошедшей до нас рукописи не указано, сказано только, что трактат посвящен некоему Амид ал-Мулку Абу Насру Мансуру ибн Мухаммеду и написан в Исфахане через два года после того, как была закрыта астрономическая обсерватория, которой руководил автор. Как видно из предисловия, автору известен «Канон Мас'уда» ал-Бируни, законченный в 1030 г.; рукопись переписана в начале XIII в. Поэтому весьма возможно, что упомянутый Амид ал-Мулк—Кундури (1024—1064), везир сельджукского султана Тогрул-бека.

Страница рукописи «Собрание правил науки астрономии»



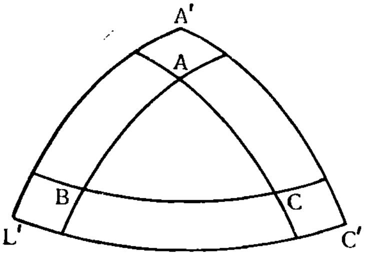


Рис. 68

Трактат состоит из трех книг. В первой изложена теория составных отношений, где, как и в комментариях Хайяма к Евклиду, составление отношений трактуется как умножение некоторых величин. Во второй книге выводятся плоская и сферическая теоремы Менелая, а в третьей доказываются теоремы сферической тригонометрии, «заменяющие» теорему Менелая и решаются все шесть задач определения элементов сферического треугольника по трем известным, в том числе впервые — по трем углам. В связи с последней задачей здесь впервые же определяется полярный треугольник, вершины которого являются полюсами $A'B'C'$ сторон данного треугольника ABC, а стороны определяются через углы данного треугольника (рис. 68).

Если в «Каноне Мас'уда» тангенс и котангенс называются еще «обращенной и плоской тенями», здесь мы встречаем уже «тень» и «тень дополнения», однако автор иногда сбивается на старую терминологию. Дальнейшие авторы уже прочно перешли на терминологию, введенную, по-видимому, в этом трактате. Рассматриваемый трактат — первое большое сочинение, специально посвященное сферической тригонометрии.

Все последующие авторы писали сочинения по сферической астрономии по плану этого трактата. Таков «Трактат о полном четырехстороннике» Насир ад-Дина ат-Туси (1260) и упоминаемая ат-Туси книга Фазл ад-Дина ас-Салара, его предшественника на посту советника Хулагу-хана, казненного последним в 1262 г. Трактат ат-Туси состоит из пяти книг: первая также посвящена теории составных отношений, вторая — плоской теореме Менелая, третья — тригонометрическим функциям, четвертая — сферической теореме Менелая, пятая — теоремам сферической тригонометрии, «заменяющим» теорему Менелая. Здесь изложены в переработанном виде и все шесть случаев определения элементов сферического треугольника по трем из них и теория полярного треугольника. Трактат ат-Туси, в свою очередь, оказал значительное влияние на дальнейшее развитие этой науки, в частности на Региомонтана.

Инфинитезимальные методы

Уже в середине IX в. арабские математики владели античным методом исчерпывания, который обогатили некоторыми приемами, позволившими им получить по-новому уже ранее известные, а также и совсем новые результаты. В «Книге измерения плоских и сферических фигур» братьев Бану Муса методом исчерпывания доказан ряд предложений, имеющихся в трактатах Архимеда «Измерение круга» и «О шаре и цилиндре».

Близка к Архимеду и «Книга о карастуне» Сабита ибн Коррры, посвященная теории рычажных весов. Находя равнодействующую двух равных параллельных сил, представляемых грузами, подвешенными к балке или коромыслу весов, он обобщает эту задачу на случай, когда к балке «подвешено сколь угодно грузов и даже бесконечно много» [1]. В случае любого конечного числа равных параллельных сил, приложенных на равных расстояниях друг от друга, равнодействующая равна сумме этих сил и приложена в середине отрезка между крайними точками приложения сил. Обобщая этот факт на случай бесконечно многих сил, Ибн Корра приходит к тому, что равнодействующая непрерывной нагрузки, равномерно распределенной на отрезке, приложена в середине этого отрезка. С математической точки зрения этот результат равносилен вычислению интеграла $\int_a^b x dx$.

В «Книге об измерении конического сечения, называемого параболой», Ибн Корра весьма оригинально произвел квадратуру сегмента параболы. То, что площадь этого сегмента равна 2/3 описанного около него параллелограмма, доказал еще Архимед, причем двумя способами: так называемым механическим методом и суммированием геометрической прогрессии, но соответствующий мемуар великого сиракузянина не был, по-видимому, известен арабским ученым. Во всяком случае, Ибн Корра решает задачу по-другому: он рассматривает параболу и делит ее диаметр на неравные части, относящиеся между собой как нечетные числа 1 : 3 : 5 : 7:... Тогда расстояния точек деления от вершины относятся как квадраты 1 : 4 : 9 : 16:..., а соответствующие ординаты точек параболы — как натуральные числа 1 : 2 : 3 : 4:... Таким образом, вычисление Ибн Корры равносильно вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{x} dx$, причем он впервые делит отрезок интегрирования на неравные части. Это вычисление было существенным шагом вперед по сравнению с древними, так как у Архимеда встречаются лишь выкладки, равносильные интегрированию $\int_0^a x dx$ и $\int_0^a x^2 dx$.

Прием Ибн Корры получил дальнейшее развитие только в XVII в., когда с помощью родственного приема — деления отрезка интегрирования на неравные части в геометрической прогрессии — П. Ферма вычислил интегралы $\int_0^a x^{m/n} dx$.

Задача квадратуры параболы была решена еще одним чрезвычайно изящным методом внуком Ибн Корры Ибн Синаном в «Книге об измерении параболы». Сначала Ибн Синан доказывает, что если один многоугольник получен из другого с помощью аффинного преобразования, то пло-

---

[1] *E. Wiedemann.* Die Schrift über den Qarastun. Bibliotheca mathematica, Ser. 3, 1912, Bd. 12, H. 1, S. 29.

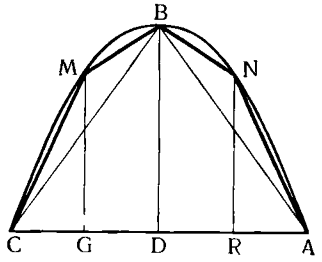


Рис. 69

щадь треугольника, начерченного в первом многоугольнике, относится к площади соответствующего треугольника во втором многоугольнике, как площади этих многоугольников. Отметим, что здесь впервые появляется аффинное преобразование наиболее общего вида; Ибн Синан не имеет еще никакого термина и описывает соответствие многоугольников, указывая на параллельность соответствующих линий и на сохранение отношений отрезков соответствующих прямых. Далее утверждение с помощью метода исчерпывания обобщается на сегменты парабол и на вписанные в них треугольники, основаниями которых являются хорды сегментов, а вершинами — концы диаметров, сопряженных с этими хордами (рис. 69). И, наконец, Ибн Синан доказывает, что площадь сегмента параболы равна $^4/_3$ площади вписанного в него треугольника, сравнивая сегмент параболы с одним из малых сегментов, из которых состоит избыток сегмента над треугольником (рис. 69 большой сегмент — ABC, малые — ANB и BMC). Ибн Синан доказывает, что площади треугольников, вписанные в малый и большой сегменты, относятся, как 1 : 8, откуда в силу доказанного следует, что таково же отношение и площадей самих сегментов, т. е. площадь сегмента относится к площади избытка, как 4 : 1 и, следовательно, к площади вписанного треугольника, как 4 : 3.

В «Книге измерения параболических тел» Ибн Корра рассматривает тела, полученные вращением сегмента параболы. Он называет тела, образованные вращением сегмента около его хорды, параболическими сферами, а тела, полученные вращением сегмента около одного из его диаметров,— параболическими куполами. Ибн Корра различает яйцевидные и тыквообразные параболические сферы (рис. 70, *а*, *б*) и параболические купола с гладкой, выступающей и вдавленной вершинами (рис. 70, *в*, *г*, *д*). Параболический купол с гладкой вершиной — сегмент параболоида вращения, объем которого был найден Архимедом в сочинении «О коноидах и сфероидах». В «Книге измерения параболических тел» находятся объемы параболических куполов всех трех типов методом, близким к методу предыдущего трактата Ибн Корры. Более простой метод определения кубатуры параболических куполов был предложен в конце X в. иранцем Абу-с-Сахлом ал-Кухи. Ибн Корра и ал-Кухи нашли, что объем параболического купола с гладкой, выступающей или вдавленной вершинами равен половине объема прямого кругового цилиндра тела вращения параллелограмма, описанного около сегмента параболы, при вращении которого относительно одного из его диаметров получается параболический купол (объем этого тела вращения равен объему прямого кругового цилиндра с той же боковой поверхностью).

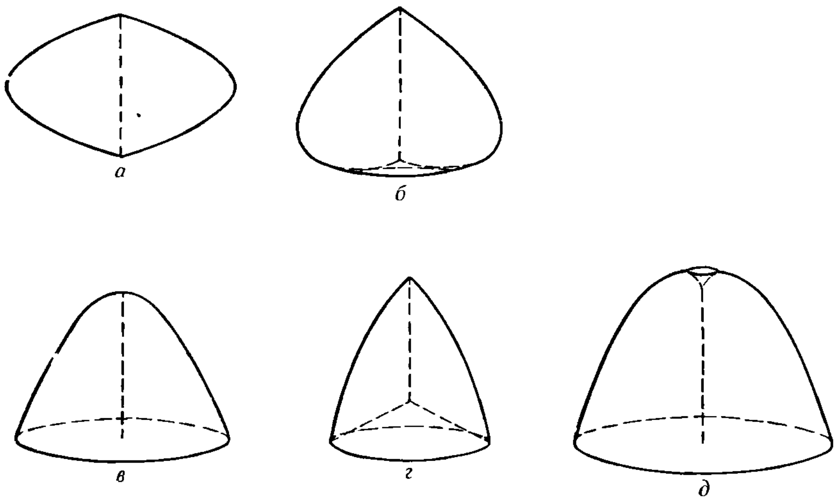


Рис. 70

Объем параболической сферы был найден в трактате «Об измерении параболического тела» Ибн ал-Хайсама. Это вычисление потребовало суммирования ряда четвертых степеней натуральных чисел, древним неизвестного:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right].$$

Далее Ибн ал-Хайсам доказывает неравенства

$$\frac{8}{15}(n-1)\cdot n^4 < \sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)^2 < \frac{8}{15}n\cdot n^4,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n^2-k^2)^2 > \frac{8}{15}n\cdot n^4,$$

с помощью которых он, применяя метод исчерпывания, доказывает, что объем параболической сферы равен 8/15 объема тела вращения параллелограмма, описанного около сегмента параболы, при вращении которого относительно одной из ее хорд получается параболическая сфера (объем этого тела вращения также равен объему прямого кругового цилиндра с той же боковой поверхностью). Вычисление Ибн ал-Хайсама было равносильно новому интегрированию $\int_0^a x^4dx$. Перечисленные и некоторые другие открытия оставались, однако, неизвестными в Европе до недавнего времени.

Другое направление инфинитезимальных исследований берет свое начало в «Книге о замедлении и ускорении движения по зодиакальному кругу в соответствии с его расположением относительно эксцентрического круга», также принадлежащей Ибн Корре. Трактат посвящен изучению видимого движения светила (например, Солнца) по эклиптике в соответствии с одной из гипотез Птолемея о движении по эклиптике, согласно которой истинное движение светила — равномерное по кругу с центром

D, расположенному в плоскости эклиптики эксцентрично относительно Земли E (рис. 71). В трактате показывается, что скорость видимого движения достигает минимума в точке A эксцентрического круга, наиболее удаленной от Земли (т. е. в апогее светила), достигает максимума в точке C, наиболее близкой к Земле (т. е. в перигее), меньше в точках, более близких к точке A, и больше в точках, более близких к точке C. Термина «скорость» у Ибн Корры нет, в этом смысле он применяет слово «движение» (харака), но терминами «замедление» (ибта) и «ускорение» (сур'а) он пользуется.

Особенно интересно предложение трактата: «Что касается среднего равномерного движения на зодиакальном круге, то оно не является истинным ни в каком месте, за исключением двух точек эксцентрического круга, в которых всегда движение среднее... Это — две точки, видимое расстояние каждой из которых от самого дальнего расстояния по зодиакальному кругу — четверть круга» [1]. В этом предложении показывается, что в точках B и F, для которых углы ABE и AFE прямые, мгновенная скорость равна средней. Таким образом, в этом трактате Ибн Корра приходит к представлениям о мгновенной скорости и ускорении такого движения.

Эти идеи получили дальнейшее развитие в книге ал-Бируни «Метод исследования движения Солнца» и его «Каноне Мас'уда». В «Каноне Мас'уда» ал-Бируни характеризует движение Солнца по эклиптике (при той же гипотезе, что и у Ибн Корры) вблизи апогея и перигея следующим образом: «Замедление будет происходить по обе стороны от апогея, а предел замедления — в нем самом. Затем замедление уменьшается и переходит в ускорение, предел которого в перигее. Далее ускорение уменьшается и переходит в замедление» [2]. Ал-Бируни также отмечает, что «замедление движения в апогее переходит в его ускорение в перигее только после того, как оно проходит через равенство его и среднего (движения) в месте наибольшего угла уравнения. Изменение его по обе стороны от этого места не ощущается, так как приращение (угла уравнения) уменьшается от апогея до указанного места, потом как бы останавливается в нем, а затем увеличивается до тех пор, пока Солнце не достигнет перигея» [3]. Под углом уравнения точки M эксцентрического круга подразумевается угол DME, равный разности углов ADM и AEM, под которыми дуга AM видна из центров D и E.

Следует отметить также, что, сформулировав в «Каноне Мас'уда» правило квадратичного интерполирования для таблиц синусов и тангенсов, ал-Бируни указывает, что «это уточнение возможно и для всех таблиц по общему правилу» [4], и формулирует это правило для всевозможных встречающихся здесь непрерывных зависимостей, заданных, впрочем, таблицами, независимо от того, являются ли графики, выражающие эти зависимости, пользуясь современной терминологией, выпуклыми кривыми, как график синуса, или вогнутыми кривыми, как график тангенса.

Заметим также, что в философской литературе на арабском языке нашло отражение и античное атомистическое учение о пространстве и времени, отвергавшееся Аристотелем и Евклидом. Упомянем прежде

---

[1] *O. Schirmer.* Studien zur Astronomie der Araber. Sitzungsberichte der Phys.-Med. Sozietät. Erlangen. 1926, Bd 58, S. 37—38.

[2] *Abu'l-Rayhan al-Biruni.* Al-Qanunu'l-Mas'udi, v. I—III. Hyderabad, 1954—1956, p. 666.

[3] Там же, стр. 667.

[4] Там же, стр. 353.

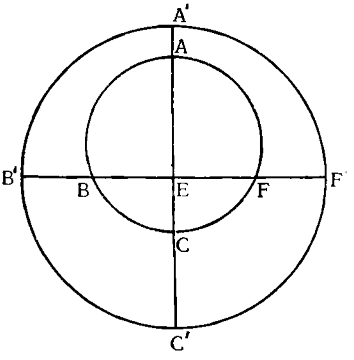


Рис. 71

всего сочинения «мутакаллимов» — приверженцев так называемого калама, основанного в X в. ал-Аш'ари, которые придерживались атомистической точки зрения как на пространство, так и на время (таким образом они стремились обосновать основное положение своего учения, согласно которому Аллах каждое мгновение вновь создает мир, вследствие чего ничто не может совершиться не по его воле). Далее, заслуживают внимания философская полемика ал-Бируни с Ибн Синой по поводу книг Аристотеля «Физика» и «О небе», где ал-Бируни оспаривал мнение Аристотеля о порочности атомистической точки зрения, а Ибн Сина защищал его, а также критика атомизма в комментариях к Аристотелю западноарабского философа Ибн Рушда (Аверроэс, 1126—1198). Латинские переводы философских трудов Авиценны и Аверроэса сыграли существенную роль при начальной разработке новых течений математической и механической мысли в средневековых Оксфордской и Парижской школах.

Значение математики стран ислама

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики как на Востоке, так и на Западе. Мы уже упоминали о том, что в XIII в. в Ханбалыке (Пекин) появились исследования по сферической тригонометрии. Эти работы, несомненно, связаны с деятельностью Насир ад-Дина ат-Туси. Известно, что в 1267 г. в Ханбалык прибыл сотрудник Марагинской обсерватории Джамал ад-Дин (по китайским источникам — Чжа-ма-лу-тин), доставивший туда новые астрономические приборы, а также что в Мараге работал китайский астроном Фао Мун-чи. Мы указывали также, что крупный среднеазиатский ученый XI в. ал-Бируни прожил несколько лет в Индии. В своей «Индии» ал-Бируни писал, что он познакомил индийских ученых с «Началами» Евклида, «Алмагестом» Птолемея и некоторыми своими трактатами, переводя их на санскрит.

Но особенно глубоким было влияние математики стран ислама на Западную Европу. Математики мавританских государств Северной Африки и Пиренейского полуострова, внесшие в развитие математики гораздо меньший вклад, чем их восточные коллеги, сыграли исключительно важную роль в ознакомлении европейцев с достижениями ученых стран ислама и их греческих, индийских и восточных предшественников. С начала XI в. в течение около ста лет распространение сведений, полученных с Востока, имело в развитии математики в Европе решающее значение. В районы Испании, освобождающиеся от власти мавров, ученые многих стран Европы приезжали знакомиться с математикой и естественными науками. В XII в. здесь достигает блестящего расцвета деятельность переводчиков и компиляторов арабских и переведенных с греческого сочинений. В это время на латынь переводится ряд сочинений ал-Хорезми, Бану Муса, Ибн Корры, Ибн ал-Хайсама и других математиков Востока и по существу создается латинский вариант арабской математической литературы. «Начала» Евклида и многие сочинения Архимеда переводятся на латынь сначала с арабских переводов. Европейцы изучали арабскую литературу не только в Испании. Итальянец Леонардо Пизанский обучался математике в Северной Африке и объехал многие страны Востока. Переводы с арабского продолжали играть существенную роль и позже, когда в Европе наметились собственные оригинальные направления. Достаточно упомянуть Региомонтана, основой тригонометрического труда которого были работы ал-Баттани и Насир ад-Дина ат-Туси.

Начиная с XIV в. основным путем влияния ученых стран ислама на Европу становится Византия. В этот период многие сочинения переводятся с арабского сначала на греческий, а затем с греческого на латынь и живые европейские языки. Мы уже упоминали о том, что вскоре после взятия Константинополя турками Ала ад-Дин ал-Кушчи познакомил византийских ученых с некоторыми открытиями ученых самаркандской школы. Это видно из того, что в византийских рукописях XV в. приводятся вычисления с десятичными дробями со ссылкой на то, что этот способ заимствован у турок, а также из того, что первой европейской рукописью, где встречаются термины «положительный» и «отрицательный», является немецкая рукопись, приписываемая мифическому автору по имени Initius Algebras. В ней сказано, что ее оригинал был написан по-арабски, с арабского она была переведена на греческий, с греческого — на латынь, а с латыни — на немецкий (мы видели, что эти термины встречались в трактате самого ал-Кушчи). Были переведены на латынь и астрономические таблицы Улугбека.

О влиянии науки стран ислама на науку Европы говорят такие наши термины, как «арабские цифры», «алгебра», «алгоритм», «цифра», «корень», «синус». Арабского происхождения также многие астрономические термины и большинство названий звезд. Усвоение учеными Европы науки стран ислама позволило начать строить европейскую науку на прочном фундаменте и не повторять заново весь пройденный их предшественниками путь.