ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

СРЕДНЕВЕКОВАЯ ЕВРОПА

Феодализм в Европе

В середине I тысячелетия н. э. произошел социальный и политический распад Римской империи, вызванный кризисом рабовладельческого хозяйства, борьбой покоренных римлянами народов и нашествиями «варваров» (по-гречески — чужеземцев). В восточных районах империи возникает Византийское государство, столицей которого в 330 г. стал Константинополь, несколькими годами ранее заложенный императором Константином на месте древней греческой колонии Византии. В 395 г. Римская империя официально разделилась на Западную и Восточную; в 476 г. германский конунг — вождь Одоакр низверг последнего римского императора Ромула-Августула и занял его престол. С этого времени судьбы Западной и Восточной Римских империй расходятся, хотя Юстиниану и удалось ненадолго объединить их во второй трети VI в. В IV в. христианская церковь связывает судьбу со светской властью, и христианство, бывшее вначале преследуемой верой угнетенных, становится государственной религией. В 313 г. оно получает равноправие с языческими верованиями. Пятьдесят лет спустя император Юлиан предпринимает безнадежную попытку возродить олимпийских богов, но в 391 г. в Византии и вскоре в Риме язычество запрещается и христианство торжествует полную победу. Многочисленные ереси не могли ослабить его все возрастающего идейного влияния. Впрочем, в 1054 г. церковь раскалывается на католическую и православную, предающие друг друга анафеме. Вражда между ними в течение веков затрудняла духовный контакт между Западной и Восточной Европой.

В середине же I тысячелетия на смену рабовладельчеству приходит феодальная формация. Феодализм, как указывал В. И. Ленин, отличался натуральным хозяйством, прикреплением крестьян к земле и «внеэкономическим принуждением», а также низким, рутинным состоянием техники. Главной формой собственности господствующего класса — феодалов была земля, жалуемая ее владельцу и правителю его сеньером на условии несения военной службы и определенных платежей. Так возникает характерная для феодализма сословно-политическая иерархия с крепостным людом внизу и государем-сюзереном наверху.

Время господства в Западной Европе феодальных отношений, продолжавшееся с V—VI вв. около тысячи лет, именуется Средними веками. Эта историческая эпоха делится на три главные стадии.

В столетия раннего феодализма, примерно до XI в., происходило закрепощение крестьян-общинников, города и торговые связи были в упадке. Лишь начинали складываться новые народности и новые языки. Возникали небольшие феодальные государства, постоянно между собой враждовавшие; многие просуществовали недолго. Попытки собрать круп-

ные королевства или империи, вроде предпринятой Карлом Великим на рубеже VIII и IX вв., оказывались на первых порах тщетными: такие государства обычно распадались уже со смертью своих организаторов. Единственным долговечным образованием явилась Священная Римская империя, основанная германским королем Оттоном I в 962 г.; в нее входили многие феодальные государства Германии, Голландии, Австрии, Чехии, Франции и Италии и т. д. Однако эту разноплеменную империю, включающую страны весьма различного экономического и культурного уровня, постоянно раздирали внутренние и внешние войны; состав ее менялся, и во многих областях император часто не имел фактической власти.

На стадии развитого феодализма, с XI по XV в., ремесло отделяется от сельского хозяйства, растут и крепнут города, все большую силу приобретают ремесленные цеха и купеческие гильдии, ширятся торговля и денежное хозяйство. Королевская власть, опираясь на города, вступает в успешную борьбу с непокорными феодалами; возникают и растут прочные монархии, такие, как Англия, Франция, Испания, постепенно отвоевывавшая занятые маврами области Пиренейского полуострова, и другие. Укажем для примера, что французский королевский домен в X в. ограничивался провинцией Иль-де-Франс — несколькими нынешними департаментами вокруг Парижа; только около 1200 г. были присоединены Орлеанская и Нормандская провинции, но еще в XIV—XV вв. самостоятельности Франции угрожали английские короли, которым принадлежали здесь огромные феоды. Лишь в результате Столетней войны 1337—1453 гг. Франция становится могущественным централизованным государством, а такие провинции, как Прованс, Бретань и Гасконь, были присоединены еще позднее. Конец стадии развитого феодализма был ознаменован в Западной Европе крупными народными восстаниями, нередко принимавшими форму религиозных «еретических» движений.

Наконец, на XV — XVII вв. приходится разложение феодального строя, зарождение в среде городского бюргерства — новой буржуазии и в среде ремесленников — пролетариата, образование важнейших современных наций, крестьянская война и реформация в Германии, борьба гугенотов и католиков во Франции, расцвет — прежде всего в Италии — Возрождения и первые буржуазные революции в Нидерландах, а затем в Англии.

Когда в Западной Римской империи вторгшиеся племена кельтов, германцев и славян образовали вместе с местным населением свои государства, подвергшиеся в середине V в. нашествию гуннов, от прежней цивилизации остались только немногие едва прозябавшие города и христианство. Экономический, технический и культурный уровень долгое время был очень низким, вся общественная эволюция этого примитивного аграрного общества с экстенсивным земледелием, натуральным обменом происходила медленно. Связи с Востоком, особенно после того как арабы лишили Византию Средиземного моря, на некоторое время были почти полностью прерваны. Церковь, господствовавшая над всей духовной жизнью, начала с того, что полностью отвергла культуру греков и римлян, как порождение язычества. Для Тертуллиана, писавшего на рубеже II и III вв., после Евангелия не было нужды в науке; догматы откровения он противопоставлял доводам опыта и рассудка. IV и V века были ознаменованы в Римской империи преследованием светских школ и ученых; наука уходила от христианства в подполье. Но когда церковь вступила

в союз с государством, ей пришлось в конце концов заимствовать и даже развивать некоторые элементы «языческой» культуры и науки. Выдающийся идеолог христианства св. Августин (353—430) говорил, что не следует презирать хорошее, даже если его сказали язычники. Впоследствии монастыри, первый из которых был учрежден в Египте около 340 г., явились важными центрами распространения знаний и просвещения.

Основой прогресса культуры и науки в Средние века служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъем — особенно со второй половины XI в.— городов, улучшение материального положения и усиление общественной роли горожан. Существенные различия между состоянием Западной Европы к концу древности и к середине XV столетия Энгельс выразил в следующих словах: «Несравненно более высокое развитие промышленного производства и торговли, созданных средневековым бюргерством; с одной стороны, производство стало более усовершенствованным, более многообразным и более массовым; а с другой—торговые сношения стали значительно более развитыми; судоходство со времени саксов, фризов и норманнов стало несравненно более смелым, а с другой стороны — масса изобретений (и импорт изобретений с Востока), которые не только сделали возможным импорт и распространение греческой литературы, морские открытия, а также буржуазную религиозную революцию, но и придали им несравненно больший размах и ускоренный темп; сверх того, они доставили, хотя еще в неупорядоченном виде, массу научных фактов, о которых никогда даже не подозревала древность: магнитная стрелка, книгопечатание, литеры, льняная бумага (употреблялась арабами и испанскими евреями с XII столетия; с X столетия постепенно входит в употребление, а в XIII и в XIV столетиях становится уже более распространенной бумага из хлопка, в то время как папирус после завоевания Египта арабами совершенно вышел из употребления), порох, *очки*, *механические часы*, явившиеся крупным шагом вперед как во *времясчислении*, так и в *механике*»[1].

Духовный мир европейца на протяжении Средних веков обогащается усвоением значительной части античного наследия и достояния стран Востока. Здесь большое значение имели непосредственные контакты с арабской культурой, редкие в X в., но приобретающие систематический характер в XI—XIII вв. Трудно переоценить стимулирующую роль переводов на латынь (ставшую в Западной Европе общим языком ученых) арабских сочинений, в том числе изложений, переработок и переводов греческих авторов. Непосредственное изучение последних приобретает более широкий размах уже позднее, в эпоху Возрождения, в XV—XVI вв. Культура феодальной Европы, включившая в приспособленном виде элементы, созданные ранее, и обогатившая их собственными достижениями, оставила потомству такие бессмертные творения, как романская и готическая архитектура, великолепные изделия художественного ремесла, народное литературное творчество, как «Божественная комедия» Данте, живопись Андрея Рублева и научное мировоззрение Роджера Бекона. О математике пойдет речь далее; здесь же отметим еще появление, начиная с XI в., университетов, которым суждено было в недалеком будущем стать главными рассадниками науки.

Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1969, стр. 163.

Передовое движение культуры и науки в феодальной Западной Европе протекало сравнительно медленно, в острой борьбе с реакционными силами, чаще всего принимавшей форму борьбы между религиозными течениями. Церковь жестоко преследовала представителей философской и научной мысли, отклонявшихся от религиозной ортодоксии. Инквизиция была официально учреждена в XIII в., но корни ее восходят еще к Веронскому собору 1183 г., который потребовал судебного преследования и осуждения «еретиков». Впрочем, церкви приходилось идти на уступки. Так, от категорического осуждения учений Аристотеля она перешла к признанию его натурфилософии, в обработанном для ее целей виде.

Наибольшие достижения в области науки принадлежат народам более развитых государств — Италии и Франции, Англии и Германии, хотя некоторые замечательные открытия были сделаны и в других странах. Так, Польша дала в XIII в. известного оптика Вителo, а в XVI в.— великого Коперника. При отдельных особенностях в различных странах, указывает Энгельс, в последние столетия рассматриваемого времени «вся Западная и Центральная Европа, включая сюда и Польшу, развивалась теперь во взаимной связи, хотя Италия, благодаря своей от древности унаследованной цивилизации, продолжала еще стоять во главе» [1].

Восточная Римская империя, в отличие от Западной, сохраняла государственное существование еще почти тысячу лет, хотя территория ее со временем все уменьшалась под ударами то славян, то арабов, то турок. И в Византии с середины IX в. укрепляется феодальный строй, причем роль церкви во всей жизни страны оказывается особенно сильной. Сложные перипетии социальной и политической жизни Византии оказывались малоблагоприятными для развития философии и естествознания; в то время как большинство западных стран, пережив века чужеземных нашествий и внутренние раздоры, обрело затем государственную самостоятельность, Византию все больше потрясали собственные неурядицы и неудачные, в конечном итоге внешние войны. Под сильным влиянием Византии складывалась культура тесно с ней связанных балканских стран, Руси, Армении и Грузии, где также получило распространение православие. Сильная феодальная раздробленность этих стран, которая лишь крайне медленно преодолевалась понемногу крепнувшей центральной властью, сыграла роковую роль в их исторических судьбах. Византия в середине XV в. рухнула под натиском турок, названные три страны на долгое время были покорены: Русь — монголо-татарами, Грузия и Армения — и арабами, и монголо-татарами, и турками, и персами. Русь при этом сыграла роль щита, охранившего от несметных полчищ преемников Чингисхана Западную Европу. Иноземные нашествия надолго задержали культурное и научное развитие восточнохристианских стран и даже отбросили их назад. В России, в частности, нашествие монголов и борьба с ними на протяжении XIII — XV вв. резко задержали начавшийся перед тем в Киевской и Новгородской Руси подъем. Пушкин как-то заметил, что татары не походили на мавров: завоевав Россию, они не подарили ей ни алгебры, ни Аристотеля. В результате к концу Средних веков в развитии наук восточнохристианские страны значительно отстали от стран Западной Европы.

---

[1] *Ф. Энгельс.* Диалектика природы, стр. 158.

Математика в Византии

Рассмотрим прежде всего математику в странах Восточной Европы. В первые столетия Византийской империи продолжали существовать эллинистические философские и научные школы. После разгрома научной школы в Александрии в V в. и запрета императором Юстинианом преподавания на территории империи языческой философии многие ученые эмигрировали из Византии в Иран и Сирию.

В VI в. в Византии появляются христианские ученые, однако о развитии математики мы имеем крайне мало сведений вследствие изуверского иконоборчества византийской церкви в VII — IX вв., когда было уничтожено много старинных рукописей.

В V в. в Афинах работал переехавший сюда из Александрии уроженец Византии Прокл Диадох (410—485). Он был философом-платоником и возглавлял афинскую «Академию» — философскую школу последователей Платона (διάδοχος — преемник). Прокл был автором комментариев к I книге «Начал» Евклида, являющихся одним из наиболее важных источников по истории античной математики (выше мы неоднократно цитировали эти комментарии). Из собственных математических результатов Прокла наиболее важна его попытка доказать V постулат Евклида.

К началу VI в. относится деятельность уроженца византийской крепости Аскалон в Палестине Евтокия. Евтокию принадлежат комментарии ко многим сочинениям Архимеда и Аполлония. Комментарии Евтокия также содержат много сведений по истории античной математики.

В это же время в Афинах, а затем в Иране при дворе сасанидского царя Хосрова Ануширвана работал уроженец Киликии Симпликий (ум. 549). Симпликий был автором известных комментариев к Аристотелю и к «Началам» Евклида.

Первыми христианскими византийскими математиками были Анфемий (ум. 534) из Тралл и его ученик Исидор из Милета. Анфемий известен главным образом как строитель собора св. Софии в Константинополе (ныне мечеть Айя-София); ему принадлежит трактат о зажигательных зеркалах, весьма интересный для истории конических сечений. Один из учеников Исидора (автор сочинения о правильных многоугольниках, часто присоединяемого к «Началам» Евклида в качестве XV книги), говоря о правиле нахождения углов между гранями правильного многоугольника, указывает, что этот вопрос был предложен «по инициативе Исидора, великого нашего учителя».

Во второй половине XI в. жил Михаил Пселл (1018 — после 1078). Ему приписывается одно сочинение по арифметике и геометрии. В арифметической части дается лишь классификация чисел и отношений. В геометрическом отделе автор утверждает, что, хотя мнения о том, как найти площадь круга, расходятся, наибольшей популярностью пользуется метод, при котором берется среднее геометрическое между площадями вписанного и описанного квадратов. Это дает для π весьма грубое значение $\sqrt{8} = 2{,}828$. Любопытно небольшое послание Пселла, где приводятся названия алгебраических степеней, причем x^5 он называет ἄλογος πρῶτος (первое невыразимое), а x^7 — ἄλογος δεύτερος (второе невыразимое). Эти названия показывают, что, в отличие от Диофанта, который называл x^5 «квадрато-кубом» ($x^5 = x^{2+3}$), а x^6 — «кубо-кубом» ($x^6 = x^{3+3}$), т. е. пользовался аддитивной системой названий степеней, где показатели степени выражаются в виде суммы 2 и 3, Пселлу была известна мультипликативная

система, в которой показатели выражаются в виде произведений 2 и 3 (например, $x^6 = x^{2 \cdot 3}$), а x^5 и x^7 не выражаются таким образом. Впоследствии эта система была распространена в Западной Европе.

К XIII в. относится деятельность Максима Плануда (ок. 1260—ок. 1310) из Никомедии, монаха, который был в 1297 г. послом императора Андроника II в Венеции. Плануд написал комментарии к первым двум книгам «Арифметик» Диофанта, в которых, однако, он обошел более трудные места. Плануду же принадлежит «Арифметика по образцу индийцев», где излагается арифметика с помощью девяти знаков чисел от 1 до 9, а также знака, называемого «цифра» (τζίφρα), и обозначающего «ничто». Начертания цифр у Плануда — восточно-арабские. Излагая проверку с помощью девятки, Плануд указывает, что она была открыта индийцами и передана нам арабами.

В 1252 г. примерно в то же время, что и книга Плануда, в Византии появилась книга под тем же почти названием, но не с восточно-арабскими, а с западно-арабскими начертаниями цифр. Иногда позиционная система применялась в Византии и без цифр, заимствованных у арабов: в одной из рукописей XIV в. мы встречаемся с позиционным применением алфавитных цифр, например 18 записывается в виде $\alpha\eta$, дробь $\frac{13}{28}$ — в виде $\frac{\alpha\gamma}{\beta\eta}$.

К XIV в. относятся сохранившиеся греческие переводы арабских астрономических таблиц с большим количеством астрономических терминов арабского происхождения. Мы видим, что математики и астрономы Византии находились под значительным влиянием арабов. Ученик и друг Плануда Мануил Мосхопулос (XIII — XIV вв.) написал трактат о магических квадратах, где сообщает правила их построения для $n = 2m + 1$ и $n = 4m$; при этих построениях Мосхопулос применял циклические перестановки.

В XIV в. жили Иоанн Педиасим и Исаак Аргир. Педиасим был хранителем печати патриарха в Константинополе в период царствования Андроника III (1328—1341). Ему принадлежат замечания о трудных вопросах арифметики, трактат об удвоении куба и «Геометрия»—сочинение, весьма близкое к «Измерениям» Герона. Аргир был монахом, одним из многочисленных византийских переводчиков персидских астрономических сочинений. Он написал «Геодезию» и комментарии к первым шести книгам «Начал» Евклида, а также трактат об извлечении квадратных корней, содержащий их таблицу для чисел от 1 до 102 в шестидесятиричных дробях.

Деятельность этих ученых приходится на время политического упадка Византии, вокруг которой все плотнее смыкалось кольцо турецких армий. В 1453 г. Константинополь пал. Часть византийских ученых бежала на Запад, где помогла в изучении греческого рукописного наследия.

Математика в Грузии и Армении

Грузины и армяне, создавшие свои алфавиты на основе греческого, пользовались алфавитной нумерацией, построенной по образцу греческой буквенной нумерации. Так как в грузинском и армянском языках больше согласных звуков, чем в греческом, то к греческим был добавлен ряд

новых букв, что дало возможность обозначать ими не только единицы, десятки и сотни, как греки и их предшественники, но также и тысячи.

Во второй половине VII в. работал выдающийся армянский ученый вардапет (учитель) Анания Ширакаци, уроженец Ширака. Из приписываемой ему автобиографии известно, что он, «сильно возлюбив числительное искусство», долго искал хорошего учителя и в конце концов нашел его в лице греческого математика Тюхика в Трапезунде. Вернувшись на родину, Анания написал ряд сочинений, среди них «Космографию и летоисчисление» и сборник арифметических задач «Вопросы и решения», сохранившийся неполностью — без вводной теоретической части. В сборнике 24 задачи с ответами, но без вывода; почти во всех задачах так или иначе отражена жизнь армянского народа: или в условии говорится о событиях армянской истории, или применяются армянские меры. Задачи — линейные, с одним неизвестным, в одной (№ 22) требуется разделить величину в арифметической прогрессии; есть древнегреческая задача на заполнение бассейна тремя трубами (№ 24). Встречающиеся в задачах дроби записаны в виде сумм долей единицы; например, ответ задачи № 24, который мы записали бы как 6/11, дается в виде суммы $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22}$ (хотя эту же дробь можно было бы записать гораздо проще — в виде $\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$). Анания Ширакаци составил также обширные таблицы сложения, вычитания и умножения, а также чисел вида $\frac{6000}{n}$, где n пробегает все значения букв армянского алфавита, а частные округляются до целого числа.

Аналогичные таблицы имелись в Армении и для чисел вида $\frac{5000}{n}$, $\frac{4000}{n}$ и некоторых других.

В первой половине XI в. в Армении работал просветитель Григорий Магистрос (ок. 990—1058); до нас дошло начало выполненного Магистросом перевода «Начал» Евклида. В конце XI — начале XII в. в Армении работал астроном Ованес Саркаваг (ок. 1045—1129), автор хронологических работ. Сочинение Саркавага «Многоугольные числа» опиралось на «Арифметику» Никомаха.

В XI—XII вв. в Грузии в Гелатской академии (вблизи г. Кутаиси), основанной грузинским царем Давидом Строителем, работал Иоане Петрици (ок. 1055—1130). Петрици переводил на грузинский язык философские сочинения неоплатоников, в частности Прокла Диадоха; от Прокла Петрици, по-видимому, заимствовал интерес к геометрии. В сочинениях Петрици мы встречаем рассуждения об основных понятиях геометрии: «Геометрия считает свои три измерения первичнее всего, а два из них она производит из одного... Ибо если точка растянется, возникает прямая линия, которая является первым ее отпрыском, а если линия расширяется, производит плоскость» [1].

В XIV в. в Византии работает армянин Николай Рабдас Артавазд, уроженец Смирны. Ему принадлежит издание сочинения Плануда по индийской арифметике с собственными дополнениями. Сохранились два сочинения самого Артавазда на греческом языке в форме писем. Одно из

---

[1] *И. Петрици.* Рассмотрение платоновской философии и Прокла Диадоха. Тбилиси, 1942, стр. 239.

них называется: «Краткое и весьма ясное изложение науки счисления, сочиненное в Константиновской Византии Рабдасом Николаем Артавздом из Смирны, арифметиком и геометром, по просьбе почтеннейшего судебного докладчика, адвоката Георга Хачика, весьма легкое для желающих изучить его». Здесь разъясняются алфавитная система счисления и счет на пальцах до 9999: на левой руке откладывались единицы и десятки, а на правой — сотни и тысячи. При изложении действий арифметики Артавазд замечает, что в случае больших чисел хорошо пользоваться «великим индийским счислением»; в конце письма приведены большие таблицы сложения, вычитания и умножения в алфавитной нумерации, близкие к таблицам Анании Ширакаци.

Во втором письме, обращенном к другу автора — Феодору из Клазомен близ Смирны, рассмотрены дальнейшие арифметические вопросы. Изложены действия с дробями и приближенный способ извлечения квадратных корней, восходящий к Герону. Дроби постоянно сводятся к суммам долей единицы и $^2/_3$. При умножении и делении дроби сначала приводятся к общему знаменателю, но результат опять выражается в долях единицы. Наряду с задачами на тройное правило есть ряд задач, которые можно записать линейными уравнениями с одним и двумя неизвестными. Много места Артавазд отводит календарным вычислениям.

Древнерусская нумерация

Восходит к греческой буквенной нумерации и древнерусская нумерация. Славянский алфавит содержал ряд букв, добавленных к греческим и обозначавшим звуки, отсутствующие в греческом языке: таковы буквы Б (греческая «бета» у византийцев произносилась, как «в», и называлась «вита», что отразилось в слове «алфавит»), Ж, Ц, Ч, Ш, Щ и др. Однако, в отличие от грузин и армян, славяне не придали числовых значений новым буквам, за исключением букв Ч и Ц, которыми они заменили архаические греческие буквы «коппу» и «сампи». Числовое значение 6 имела славянская буква «зело», похожая на греческую букву ς — концевую сигму, которой греки заменили первоначально имевшую это числовое значение архаическую дигамму. Славянские буквенные нумерации, основанные на обоих славянских алфавитах — кириллице и глаголице — изображены во втором и третьем столбцах таблицы на стр. 63. Десятки и единицы писались в том порядке, в котором они произносятся; например, пятнадцать (пять-на-десять) обозначалось єї, а двадцать пять — кє. Тысячи обозначались теми же буквами, что и единицы, но со знаком ҂. Большие числа записывались теми же буквами, что и единицы, но с различным обрамлением. Наибольшее распространение получила кириллическая нумерация.

Древнерусские математические сочинения

О высоком уровне математических знаний Киевской Руси свидетельствуют замечательные памятники архитектуры Киева.

Первый дошедший до нас математический документ на Руси — математические задачи юридического сборника «Русская правда», написанные в XI в. Эти задачи представляют собой «статьи» о приплоде скота, количестве зерна или сена, собираемого с определенной площади, и т. д.

	10^{3}	тысяща
	10^{6}	тьма
	10^{12}	легеон
	10^{24}	леодр
	10^{48}	ворон
	10^{49}	колода

Древнерусские обозначения больших чисел

В Новгороде — вечевой республике с выборным князем, находившейся в тесных торговых отношениях с «вольными городами» Западной Европы,— было написано первое дошедшее до нас русское математическое сочинение «Учение им же ведати человеку числа всех лет». Автор этого сочинения — ученый монах Кирик (род. 1100). «Учение» написано им в 1136 г. Сочинение посвящено подсчету числа месяцев, недель и дней «от сотворения мира» (1136 г. н.э. считался 6644-м годом «от сотворения мира»), далее подсчитывались также числа и дробные доли чисел. Находились также «солнечные круги» — 28-летние периоды, за которые дни недели возвращаются на те же числа, и «лунные круги» — 19-летние периоды, за которые на те же числа возвращаются фазы Луны. Эти подсчеты Кирика были, несомненно, связаны с хронологическими вычислениями, проводившимися в это время в Западной Европе.

Татарское нашествие (XIII — XV вв.) надолго задержало развитие науки на Руси. Полчища Батыя, так же как и войска его двоюродных братьев Хулагу и Хубилая, беспощадно разрушали все культурные центры завоеванных стран. При этом на Руси не нашлось ученых, которые, сотрудничая с захватчиками, организовали бы в условиях татарского ига центры науки, подобные астрономическим обсерваториям в Мараге или Ханбалыке. Все силы русского народа в это время были направлены на сопротивление захватчикам. Значение этой борьбы для развития мировой науки общеизвестно: ценой огромных потерь Русь остановила татарские орды и спасла от них Европу, создав тем самым возможность дальнейшего развития науки на Западе.

Первые математические сочинения в Западной Европе

В эпоху раннего феодализма и полного господства религии в духовной жизни не было стимулов для научных занятий естествознанием и математикой. В хозяйстве и в быту необходимые математические сведения не выходили за пределы начальных действий с целыми и дробями и правил измерения простейших фигур. Несколько бо́льшие требования к математике предъявлялись в монастырях, являвшихся как религиозно-идеологическими, так и крупными хозяйственными организациями; но и здесь интерес к математике ограничивался вопросами практической арифметики и геометрии, а также вычислениями календарей и дней церковных праздников.

Для воспитания образованных людей было написано несколько книг, содержавших начальные сведения о семи «свободных искусствах», разделявшихся на тривиум (трехпутье) и квадривиум (четырехпутье) — эта классификация восходила к первым векам Римской империи. Тривиум охватывал грамматику, риторику как искусство красноречия с началами правоведения, и диалектику — в смысле умения вести спор. Квадривиум включал арифметику — изложение без доказательств простейших свойств чисел в комбинации с числовой мистикой, геометрию — краткие сведения об основных геометрических образах и мерах и по географии, астрономию, включая календарь, и, наконец, музыку как учение о гармонических интервалах.

Одним из наиболее популярных в Средние века авторов сочинений по квадривиуму был Аниций Манлий Северин Боэций (ок. 480—524). Боэций был государственным деятелем при дворе остготского короля Теодориха Великого и философом-неоплатоником. Он учился в Афинах в Академии платоников, написал ряд философских сочинений и трактат о музыке. Боэций был казнен по обвинению в государственной измене. В тюрьме он написал очень популярное в Средние века философское сочинение «Утешение в философии». Боэций перевел на латинский язык «Арифметику» Никомаха и часть «Начал» Евклида; в перевод Никомаха он включил числовые примеры, а в книге Евклида довольствовался геометрическими примерами и не приводил строгих доказательств. Популярностью Боэция объясняется то, что ему приписывали и ряд позднейших сочинений.

Из авторов V — VI вв. следует упомянуть также римлян Марциана Капеллу (ок. 450), Флавия Кассиодора (ок. 480 — ок. 575) и епископа Севильи Исидора (ок. 570—636). Сочинение последнего «Происхождения» (Origines) было посвящено разъяснению смысла и происхождения многих научных терминов.

Одним из первых математиков Западной Европы был ирландский монах Беда Достопочтенный (ок. 673—735). Беда был разносторонним ученым. О себе он говорил, что всегда любил либо учиться, либо учить, либо писать. Велики заслуги Беды как историка, но он оставил след и в развитии математики. Беда был автором специального хронологического трактата, значительная часть этого трактата посвящена вычислению для пасхи, с которым жестко связаны многие другие важные христианские праздники. Первый день пасхи устанавливается правилами, которые, по существу, дают решение в целых числах неопределенных линейных уравнений. Главную роль играет требование, чтобы пасха начиналась

в первое воскресенье после полнолуния, приходящегося на день весеннего равноденствия или ближайший вслед за этим день. Определенный день недели (скажем, первое мартовское воскресенье) приходится в разные годы на разные числа, повторяясь с 28-летним циклом (солнечный круг), фазы Луны повторяются с периодом в 19 лет (лунный круг). Поэтому дни пасхалии перемещаются в календаре в некоторой последовательности с периодом в 532 года (великий круг). Мы указали только основные моменты пасхалии, вычисление которой усложнено рядом дополнительных условий. В христианской церкви, в частности, в ирландской и английской, долго шли споры по поводу пасхалии.

В этом же трактате имеется полное описание счета на пальцах. Различные загибы пальцев рук изображали единицы, десятки, сотни и тысячи, а жесты рук позволяли продлить счет до миллиона.

К пальцевому счету восходит характерное для средневековой арифметики, начиная с Боэция, деление чисел на digiti (пальцы) — единицы, articuli (суставы) — десятки и numeri compositi — прочие «составные числа».

При дворе франкского короля Великого, впоследствии объявленного римским императором, работал епископ Алкуин (735—804). Алкуин — уроженец Иорка, ученик друга Беды Достопочтенного. Алкуин был организатором школ и автором ряда руководств. Из них наибольший интерес представляют «Задачи для изощрения ума юношей» (Propositiones ad acuendos iuvenes), среди которых имеется ряд задач индийского происхождения.

Вместе с распространением торговли начали завязываться и научные связи с арабской культурой, прежде всего через Испанию и Сицилию, в то время находившиеся в руках арабов.

Одним из первых посетил Испанию, точнее — Каталонию, французский ученый монах Герберт (ок. 940—1003), который был в 999—1003 гг. римским папой под именем Сильвестра II.

В 972—982 гг. Герберт жил в Реймсе, где преподавал в прославившейся вскоре школе предметы квадривиума. Кроме математики, логики и философии, Герберт занимался астрономией. Около 994 г. он соорудил в Магдебурге солнечные часы, для чего вел наблюдения над Полярной звездой.

Герберту приписывают несколько математических сочинений, но неизвестно в точности, он ли их автор.

С большей уверенностью это можно сказать о «Книжке о делении чисел» (Libellus de numerorum divisione), с меньшей — о «Правилах счета на абаке» (Regula de abaco computi). Во всяком случае, оба названных труда, сохранившихся в рукописях более позднего времени, должны быть по содержанию близки к написанным Гербертом. Числа в обеих рукописях пишутся словами или изображаются римскими цифрами. Преимущественно римское влияние отразилось и на третьем, приписываемом Герберту сочинении по геометрии, дошедшем до нас в списках XII в. Здесь изложены простейшие предложения геометрии и правила землемерия, а также приемы вычисления фигурных (многоугольных и пирамидальных) чисел.

Популяризируя сочинения Боэция, фрагменты «Начал» Евклида и практическую геометрию римских агрименсоров, Герберт подходил к основным понятиям геометрии критически. Он указывал, что в действительности ни одна точка, ни одна линия и поверхность не встречаются иначе

чем в связи с каким-нибудь телом. Лишь мысленно мы отрываем точки, линии и поверхности от тел.

Для низкого состояния математической культуры того времени характерно, что среди обвинений, выдвинутых против Герберта, сторонника всемерного усиления церкви и папского престола, было и то, что он владеет умением делить любые большие числа. Это в глазах церкви с несомненностью свидетельствовало о том, что он продался дьяволу.

Абак, о котором писал Герберт, был заимствован у римлян. Во времена Герберта абак представлял собой гладкую доску, посыпанную песком и разделенную на 30 столбцов, из которых три отводились для дробей, а прочие группировались по три столбца, всего в десять групп. Иногда групп столбцов бывало меньше. Сверху столбцы завершались дугами, которые называли пифагоровыми: изобретение абака приписывали Пифагору. В столбцах, повторно помеченных наверху слева направо буквами C (centum — сто), D (decem — десять) и S или M (singularis или monas — единица), клали или писали знаки единиц соответствующих разрядов. В отличие от древних форм счетной доски, единицы изображались не с помощью нескольких камешков, а с помощью особых нумерованных жетонов с их изображениями. Те и другие назывались «апексами» (apices).

Ученик Герберта Рише из Реймса (вторая половина X в.) приписывает своему учителю употребление нумерованных жетонов, вырезанных из рога и имеющих вид, близкий к западноарабским цифрам «губар». Нуль на абаке не применялся, так как вместо него оставлялся пустой столбец.

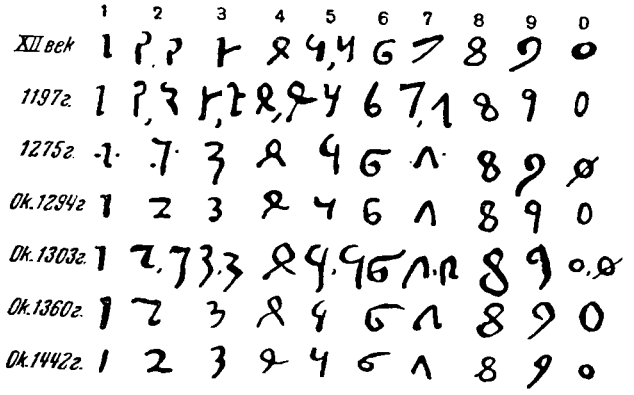
Апексы Герберта имели названия: 1 — игин, 2 — андрас, 3 — ормис, 4 — арбас, 5 — квимас, 6 — кальтис, 7 — зенис, 8 — темениас, 9 — целентис, происхождение которых неясно: если названия апексов 4, 5, 8 близки к соответственным арабским числительным «арба'», «хамс», «саман», то названия апексов 1, 3, 9 близки к венгерским числительным egy, harom, kilenc. Позже появился апекс, обозначающий 0, имевший форму нуля. Этот апекс назывался «сипос» — то ли от арабского названия нуля «сыфр», то ли от греческого названия счетного камешка ψῆφος.

Замена камешков или других однородных марок апексами не представляла преимуществ с точки зрения удобства выкладок, и впоследствии возвратились к помеченным жетонам. Но апексы имели иное значение в развитии математики: в них мы видим ближайших предков современных европейских цифр. Конечно, в течение столетий форма цифр менялась, в частности упрощалась. Тем не менее сходство во многих случаях бросается в глаза.

Распространение позиционной арифметики

Вскоре европейцы начинают пользоваться индийско-арабскими цифрами и в письме. Как уже говорилось, было воспринято в форме ciffra и в других производных от нее (ср. стр. 183) и арабское слово «сыфр», обозначающее нуль; впоследствии в ряде языков так стали называть любой из знаков 0, 1, ..., 9 (ср. русское слова «цифра»; от французской формы этого слова chiffre происходит наше слово «шифр»).

В латинских рукописях XII — XIII вв. нуль называется также circulus (кружок), nihil (ничто) или figura nihili (изображение, знак ничего).



Эволюция «арабских цифр»

Возможно, что уже тогда появляется термин nullus, т. е. никакой, откуда происходит наше слово «нуль».

Решающее значение для принятия в Европе десятичной позиционной нумерации и новых цифр имело ознакомление, начиная с XII в., с латинскими переводами арабских книг по арифметике, в первую очередь с арифметикой ал-Хорезми. Имя ал-Хорезми в его латинских формах — чаще всего Algorithmus или Algorismus — превратилось в название новой арифметики, алгоритм или алгоризм (о позднейшем значении слова «алгоритм» см. стр. 212). Примерно тогда же стали говорить об «алгористах», т. е. приверженцах алгористической арифметики, в противоположность «абацистам», как называл вычислителей на абаке еще Герберт.

Распространению новой арифметики содействовало появление чисто светских школ, в которых обучались молодые люди, чтобы затем работать по торговой или финансовой части. По-видимому, первые такие школы появились в Италии. В 1338 г. во Флоренции имелось шесть школ абака (это слово стало означать арифметику в целом), в каждой из которых насчитывалось до 1200 учащихся. Первые монеты с новыми цифрами появились в 1424 г. в Швейцарии, в 1458 г. в Германии, в 1478 г. в Швеции, в 1485 г. во Франции, в 1539 г. в Шотландии, в 1551 г. в Англии. На могильных плитах эти цифры появляются раньше: в Пфорцгейме (Баден) в 1371 г. и в Ульме в 1388 г. Сравнительно позднее появление новых цифр на монетах объясняется тем, что вначале они не имели четко установившейся формы, что могло привести к недоразумениям.

Переводы с арабского и греческого

Огромное значение для прогресса математических знаний в Европе имели, как уже говорилось, переводы с арабского как оригинальных сочинений, так и греческой литературы, имевшейся на арабском языке. Переводами с арабского особенно интенсивно занимались в XII — XIII вв., но изучение арабских рукописей продолжало обогащать европейских математиков и в XV — XVII в.

Распространению знаний содействовали арабские и европейские врачи и астрологи, которых держали при дворах некоторые западноевропейские правители. Но основная переводческая работа велась на территории Пиренейского полуострова, постепенно отвоевываемой испанцами у арабов. Когда в 1085 был взят Толедо, сюда ринулись жаждущие знаний, и через некоторое время здесь под покровительством архиепископа Раймонда I (1126—1151) уже работала целая школа переводчиков и компиляторов. Переводами занимались также в Барселоне и Сеговии. В этом деле принимали участие люди разных национальностей: принявшие христианство арабы (так называемые муджеры), испанцы (в том числе перешедшие ранее в мусульманство, так называемые мозарабы), испанские евреи, англичане, итальянцы, славяне, фламандцы. Результатом явилось создание поистине огромной научной и философской литературы на латыни, которая в течение всего рассматриваемого периода служила в Западной Европе общим языком всех ученых.

При короле Альфонсо X (1226—1284), покровительствовавшем наукам и прозванном Ученым, ряд арабских сочинений по астрономии и прилегающим отраслям знания был переведен в Толедо на испанский язык. Так, под общим названием «Книги астрономических знаний» (Libros de saber de astronomia) на испанском языке появился перевод, частью компиляция, целой серии арабских сочинений по астрономии и астрономическим инструментам. Особенную популярность получили так называемые «Альфонсовы таблицы», составленные на основе таблиц астронома XI в. аз-Заркали (известного в Европе как Арзакель).

Одним из первых переводчиков был крупный английский ученый и мыслитель Аделард из Бата, автор ряда философских сочинений, в которых рассматривались и вопросы натурфилософии, а также книги «Правила абака» (Regula abaci); позднее он по достоинству оценил позиционную арифметику. Аделард побывал во Франции, Сицилии и на Ближнем Востоке. В 1126 г. он перевел астрономические таблицы ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити, ознакомив тем самым европейских ученых с начальными понятиями тригонометрии. Крупной работой явился его перевод с арабского «Начал» Евклида в пятнадцати книгах. Быть может, Аделард перевел и арифметический трактат ал-Хорезми. Другой англичанин, Роберт из Честера, перевел в Сеговии в 1145 г. алгебраический трактат ал-Хорезми, положив начало алгебраическим знаниям европейских ученых. Славянский ученый Герман из Далмации, живший в Испании, около 1140 г., перевел с арабского «Планисферий» Птолемея, греческий текст которого утерян, и ряд других сочинений по астрономии и математике.

Иногда переводчики с разных языков работали совместно. Так, испанский философ Доминго Гонзалец сотрудничал с Иоанном Севильским, работавшим в Толедо в XII в. По-видимому, Иоанн переводил с арабского на кастильское наречие, а Гонзалец далее — на латынь. Им принадлежат переводы около двадцати сочинений, преимущественно по астрономии и философии, часть которых была напечатана в XV — XVI вв., обработка арифметического трактата ал-Хорезми.

Итальянец Платон из Тиволи, находившийся около 1134—1145 гг. в Барселоне, переводил совместно с еврейским математиком Абраамом бар Хийя (ок. 1070 — ок. 1136), известным в латинской литературе как Савасорда.

Наиболее выдающимся переводчиком той эпохи был итальянец Герардо из Кремоны в Ломбардии (1114—1187). По свидетельству его ученика,

Герардо привлек в Толедо интерес к «Алмагесту», недоступному в Италии. Богатство арабской научной литературы поразило Герардо; он изучил арабский язык и посвятил свою жизнь переводческой деятельности. Переводы Герардо Кремонского относятся к логике и философии, математике и астрономии, алхимии, физике и медицине; число переведенных им с арабского сочинений приближается к девяноста. Он перевел «Начала» и «Данные» Евклида, «Измерение круга» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Алмагест» Птолемея, сочинения Феодосия и Менелая, алгебру ал-Хорезми, комментарии к первым десяти книгам «Начал» ан-Найризи, сочинения Сабита ибн Корры, Ибн ал-Хайсама и других. Ряд переводов Герардо был напечатан в XV — XVII вв.

Новый перевод «Начал» Евклида в пятнадцати книгах дал около 1250—1260 гг. математик-астроном Джованни Кампано из Новары (близ Милана). При этом был использован наряду с арабскими источниками более ранний перевод Аделарда из Бата. Кампано дополнил перевод собственными пояснениями и размышлениями, в частности по вопросу о свойствах угла касания, т. е. угла между дугой окружности и касательной в ее конце, а также об общих свойствах непрерывных величин. Вопросы эти оживленно обсуждались в средневековой латинской литературе. Первое печатное издание «Начал», вышедшее в Венеции в 1482 г., воспроизводило перевод Кампано.

Переводы с греческого долгое время были редкостью. Одним из наиболее ранних явился латинский перевод «Алмагеста», выполненный анонимным автором, жившим в Сицилии около 1160 г. Этот перевод, несколько более ранний, чем перевод Герардо из Кремоны с арабского, видимо, не получил известности, и в 1451 г. «Алмагест» был переведен заново, впрочем малоудачно, в Италии греком Георгием Трапезундским (1393—1486). Мы особо упомянем как неутомимого деятеля в этой области фламандца Виллема из Мербеке (ок. 1215—ок. 1286), дважды побывавшего в Греции, одно время в чине архиепископа Коринфа. Помимо переводов из Аристотеля и Прокла, ему принадлежат переводы сочинений Архимеда и Герона. Этот перевод использовал Тарталья в издании трудов Архимеда, вышедшем в Венеции в 1543 г. «Начала» Евклида были впервые переведены на латынь с греческого только Бартоломео Дзамберти в конце XV в. Этот текст опубликован в Венеции в 1505 г.

Первые университеты

Важную роль в развитии математики сыграли университеты. Древнейший в Европе университет — медицинский — был основан в Салерно не позднее первой половины XI в. Около 1100 г. был открыт университет в Болонье, вначале представлявший собой школу, где на основе римского права разрабатывались юридические нормы, интерес к которым возрастал вследствие развития городов. На базе нескольких монастырских школ в конце XII в. вырос Парижский университет, где обучались тысячи студентов со всех концов Европы; примерно тогда же был создан Оксфордский и в 1209 г. Кембриджский университеты. В XIV в. появляются университеты в Праге — в 1348 г., в Кракове — 1364 г., в Вене — 1365 г., в Гейдельберге — 1385 г., затем в Лейпциге — 1409 г., в Базеле —1459 г. и т. д. Все эти университеты, в отличие от первых двух, не были узкопрофессиональными школами. Организация преподавания была пример-

но такова: университет состоял из четырех факультетов — искусств, богословия, права и медицины. Студент, нередко подросток, поступал прежде всего на факультет искусств, где обучался около шести лет, и после испытаний мог перейти на какой-либо другой факультет. Наиболее популярным и влиятельным был богословский факультет, где обучение продолжалось около восьми лет и завершалось испытанием и диспутом. Преподаватели делились на младших — бакалавров, магистров — и докторов. Во главе университетов стояли монахи-богословы.

Математике обучали в объеме квадривиума на факультете искусства, а некоторые более тонкие вопросы излагались в курсах философии, особенно после укрепления в конце XIII в. аристотелизма. Впоследствии в курс математического образования включают изложение одной или двух первых книг «Начал», введение в сферическую астрономию, затем лекции по началам оптики, теории движения планет, теории пропорций, учение о широте форм (о котором будет сказано далее). Но в течение нескольких столетий математика оставалась только вспомогательной дисциплиной и отдельных кафедр, да и особых преподавателей математики не было. По-видимому, первым специализировался на преподавании одних математических наук магистр Венского университета Иоганн из Гмундена (ок. 1380—1442). С 1412 г. он читал в Вене лекции по «алгоритму целых и дробей», т. е. по арифметике, основанной на позиционной нумерации, по оптике, сферике, церковно-календарным вычислениям и, позднее, курс астролябии.

Подсобная роль математики в университетах отрицательно сказывалась на знаниях студентов, которые, например, в теоретической геометрии часто не шли далее нескольких первых теорем I книги «Начал». Еще в начале XVI в. в Парижском университете кандидаты на степень магистра искусств вместо сдачи экзамена по геометрии должны были присягать в том, что прослушали лекции по шести первым книгам «Начал». Все же, несмотря на преобладание в преподавании духа авторитарности и схоластики, несмотря на подчиненное положение математики, университеты были важными центрами распространения и развития математических знаний, преимущественно в более отвлеченных направлениях. В недрах самого богословия и схоластической науки шла почти непрестанная борьба между более передовыми мыслителями и ортодоксами. В Оксфордском университете, например, учились и работали такие прогрессивные философы и ученые, как Роберт Гроссетест и его знаменитый ученик Роджер Бекон, призывавшие положить в основание естественных наук опыт и математическую дедукцию. И хотя подготовка математиков не была специальной целью университетов, из них вышли такие замечательные математики, как Томас Брадвардин в Англии, Николь Орем во Франции, Иоганн Мюллер-Региомонтан в Германии и Николай Коперник в Польше.

Леонардо Пизанский

Первым самостоятельным математиком Западной Европы, полностью осветившим все достижения математиков стран ислама и продвинувшимся дальше их, был итальянец Леонардо Пизанский (1180—1240), известный также под именем Фибоначчи (Fibonacci — сын Боначчи). Леонардо родился в Пизе — крупном торговом центре Италии того времени. Его отец в

конце XII в. торговал в Буджии (Алжир), где Леонардо изучал математику у арабских учителей. Леонардо посетил также Египет, Сирию, Византию и Сицилию.

Основной труд Леонардо — «Книга абака» (Liber abaci) — написан им в 1202 г. и переработан в 1228 г. Под словом «абак» Леонардо подразумевает не счетную доску, а арифметику вообще. Эта замечательная книга послужила одним из важных средств распространения новой арифметики и других математических знаний в Европе. Леонардо систематизировал в ней огромное количество сведений, почерпнутых из арабских трудов, добавил, как он выражается сам, кое-что из геометрического искусства Евклида, а по существу — из античного наследия вообще, а также присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Арифметику и алгебру линейных и квадратных уравнений Леонардо изложил с непревзойденной ни ранее, ни долгое время спустя полнотой и глубиной, что относится и к латинской и к арабской литературе.

С первых строк Леонардо выступает решительным сторонником методов, которые называет индийскими, в сравнении с которыми «дуги Пифагора», т. е. приемы абацистов, представляются ему отклонением от верного пути.

Всего в книге пятнадцать глав. Первые пять из них посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации. Чтобы показать читателю ее преимущества, Леонардо приводит таблицу, в которой некоторые числа записаны римскими и здесь же «индийскими» цифрами:

MI	MMMXX	MCXI	...	MMMMCCCXXI
1001	3020	1111	...	4321

В главе об умножении приводится проверка с помощью девятки, причем «пробой», т. е. остатком от деления на 9 суммы цифр данного числа, у Леонардо может быть и нуль, который тем самым выступает как настоящее число. В главе о делении рассмотрено разложение чисел на простые множители, говорится о признаках делимости на 2, 3, 5, 9, вводится проверка семью и одиннадцатью.

В главах VI и VIII Леонардо учит действиям над смешанными числами и дробями, причем дроби приводятся к общему знаменателю более рациональным образом, чем у арабских математиков,— с помощью нахождения наименьшего общего кратного знаменателей.

В следующих главах (VIII — X) изложены приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях. Здесь излагается тройное правило, правило пяти величин, называемое им figura cata или chata (от арабского «шакл ал-кита'» — «фигура секущих» — названия теоремы Менелая о полном четырехстороннике, формулировавшегося в виде составного отношения, к которому сводится и правило пяти величин), а также правила семи и девяти величин. К этому кругу вопросов у Леонардо примыкают задачи на правило товарищества, т. е. на раздел некоторой суммы пропорционально долям участников, и т. п.

В главе XI рассмотрены задачи на смешение, решение которых дается в форме рецептов. В одной группе задач требуется определить пробу сплава, составленного из известных количеств сплавов данного состава, в другой нужно узнать отношения количеств данных сплавов, дающих вместе сплав данной пробы. Среди этих задач находится и вариант задачи о птицах: 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голу-

би по 2 и пара воробьев по монете; спрашивается, сколько птиц каждого вида. Леонардо трактует ее как задачу на сплав (сплав достоинства 30:30=1 должен быть составлен из целочисленных количеств достоинства 3, 2, $^1/_2$) и приводит единственное целое положительное решение 3, 5, 22. Подробный разбор задачи о птицах с другими числовыми данными Леонардо изложил позднее в письме к состоявшему при дворе императора Фридриха II магистру Теодору.

В XII главе приводятся задачи на суммирование рядов — арифметической и геометрической прогрессий, ряда квадратов и, впервые в истории математики, возвратного ряда. Любопытным примером шуточной задачи, обошедшей многие страны, является задача о 7 старухах, направляющихся в Рим, у каждой из которых по 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, при каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах. Сколько всего предметов? (137 256). Подобная задача встречалась еще в древнем Египте (см. стр. 23).

Возвратный ряд появляется в задаче о кроликах. Спрашивается, сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной в свою очередь через месяц к размножению, и если ни одна пара не погибает. Ответ дается суммой ряда $1+1+2+3+5+\ldots+144=376$, каждый член которого, кроме первых двух, равен сумме двух предыдущих, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$. Ряд этот теперь носит название «ряда Фибоначчи» и представляет частный случай важного класса возвратных рядов, члены которых выражаются линейными комбинациями нескольких предыдущих.

Отметим также впервые появляющуюся у Леонардо весьма важную и популярную впоследствии задачу о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие некоторого заданного. Ответ Леонардо 1, 3, 9, 27,.. основан на том, что всякое целое число можно представить суммой или разностью различных степеней числа 3 и 1.

Большое место занимают у Леонардо различные задачи, приводящиеся к линейным уравнениям, для решения которых он применяет различные приемы: метод одного ложного положения, словесно-алгебраическое решение, приводящее в порядке неполной индукции к формулировке общих правил решения систем некоторого специального вида, наконец, правило двух ложных положений, излагаемое в главе XIII. Многие задачи — восточного или древнегреческого происхождения, так же как и способы решения, в разработке которых Леонардо, однако, пошел вперед.

Леонардо излагает и другой прием решения линейных уравнений, который называет прямым правилом (regula recta) и о котором сообщает, что он применяется арабами и заслуживает высокой похвалы, так как с его помощью можно решить бесчисленное множество задач. Прямое правило — это алгебраическое решение, которое Леонардо, подобно восточным математикам, приводит без символики. Неизвестную он именует здесь res, т. е. вещью (перевод арабского «шай»). Задача такова: если первый человек получит от второго 7 денариев, то он будет впятеро богаче второго; если второй человек получит от первого 5 денариев, он будет всемеро богаче первого. Сколько было у каждого? Леонардо принимает имущество второго за вещь и 7 денариев; тогда первый человек по условию должен иметь 5 вещей без 7 денариев. Если первый даст второму 5 денариев, то у первого останется 5 вещей без 12 денариев, а у второго будет вещь и 12 денариев. Таким образом, вещь и 12 денариев в семь раз

больше, чем 5 вещей без 12 денариев, откуда 34 вещи составляют 96 денариев, одна вещь есть $2\frac{14}{17}$ денариев и т. д. Далее решаются задачи с более чем двумя участниками. Имеются специальные примеры «неразрешимых вопросов», условия которых приводят к противоречиям.

Леонардо применяет алгебраическое решение и к другой популярной в Средние века группе задач, в которых требуется определить имущество нескольких человек, причем каждый из них может купить некий предмет, только сложив свою наличность с теми или иными долями капиталов других. Стоимость предмета в них, кроме одной, не указана, так что задачи являются неопределенными, но эта неопределенность устраняется, так как требуется найти решение в наименьших целых числах.

Леонардо рассматривает задачи с двумя, тремя и четырьмя участниками. В последнем случае его задача сводится к системе уравнений вида

$$x_1 + \frac{a_1}{b_1} x_2 = s,$$

$$x_2 + \frac{a_2}{b_2} x_3 = s,$$

$$x_3 + \frac{a_3}{b_3} x_4 = s,$$

$$x_4 + \frac{a_4}{b_4} x_1 = s.$$

Леонардо словесно формулирует общий регулярный прием решения таких систем. Мы не будем приводить словесного правила Леонардо, весьма, впрочем, краткого и ясного, — в нем речь идет о действиях над числителями и знаменателями следующих по порядку коэффициентов неизвестных. Ограничимся лишь выражением первого неизвестного через параметр s:

$$x_1 = \frac{\{[(b_1 - a_1)\, b_2 + a_1 a_2]\, b_3 - a_1 a_2 a_3\}\, b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - a_1 a_2 a_3 a_4}\, s.$$

У Леонардо s принят равным знаменателю, и речь идет поэтому только о составлении числителя. Этот алгоритм Леонардо явился выдающимся достижением XIII в. По сравнению с древнекитайским методом фан-чэн алгоритм Леонардо выгодно отличается формулировкой окончательного правила выражения неизвестных.

Далее задачи усложняются. Задача Леонардо

$$x + \frac{1}{3}(r + y) = s,$$

$$y = \frac{1}{4}(x + r) = s,$$

$$r + \frac{1}{5}(x + y) = s$$

точно совпадает с задачей I, 24 «Арифметик» Диофанта; следующая аналогичная задача с четырьмя неизвестными в каждом уравнении отличается у Леонардо от задачи I, 25 Диофанта только частью коэффициентов. Последняя задача есть у ал-Караджи, и не исключено, что Леонардо взял ее из «Ал-Фахри», хотя в целом эта группа задач, несомненно, встретилась ему в Византии. Как бы то ни было, Леонардо самостоятельно разработал новые алгебраические приемы их решения.

С исследованием линейных уравнений связана другая выдающаяся заслуга итальянского математика. Рассматривая некоторые невозможные задачи этого рода, он — первый в Европе — пришел к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга.

В XIV главе Леонардо на числовых примерах разъясняет способы приближенного извлечения квадратного и кубического корней. В первом случае он либо пользуется предварительным умножением подкоренного числа на 10^{2n}, либо применяет итерационный алгоритм, причем, как и его предшественники, Леонардо останавливается на третьем приближении.

Правило извлечения кубического корня по приближению

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$$

Леонардо считает своим изобретением, откуда видно, что он не был знаком с арифметическими трактатами Кушьяра ибн Лаббана и ан-Насави. В случае кубических корней Леонардо ограничивается этим вторым приближением, которое часто обеспечивает неплохую точность. Например, $\sqrt[3]{900} \approx 9 + \frac{171}{271}$, т. е. $\approx 9{,}631$, причем Леонардо заменяет еще $\frac{171}{271}$ на $\frac{2}{3} \approx 0{,}667$; между тем верное с четырьмя знаками значение будет 9,655.

За извлечением квадратных корней следуют задачи на действия с квадратичными иррациональностями, свидетельствующие о том, что Леонардо хорошо владел материалом X книги «Начал».

Наконец, в XV книге собран ряд задач геометрии на применение теоремы Пифагора и большое число примеров на квадратные уравнения, решаемых с помощью «алгебры и алмукабалы». Здесь Леонардо существенно опирается на арабскую литературу. Он рассматривает те же шесть канонических форм уравнений, что и ал-Хорезми, к которым через ряд промежуточных звеньев восходит и одно из взятых Леонардо для образца уравнений, именно $x^2 + 10x = 39$. Многие задачи заимствованы из «Книги измерений» Савасорды и особенно из алгебраического трактата Абу Камила, но Леонардо предлагает и собственные задачи.

Изложение у Леонардо — словесное, но в текст вкраплены обозначения одной или двумя буквами отрезков, изображающих данные и искомые величины или их комбинации. Квадрат неизвестной называется census — имущество, состояние, ценз, quadratus — квадрат, неизвестная — res — вещь или radix — корень, данное число — numerus или denarius; это латинские переводы арабских терминов: мал, мурабба', шай, джизр, 'адад, динар. К новым квадратным уравнениям Леонардо относится

$$x^2 = \sqrt{6x}\sqrt{5x} + 10x = 20.$$

Найдя его корень

$$x = 5 + \sqrt{7\tfrac{1}{2}} + \sqrt{52\tfrac{1}{2} + \sqrt{750}},$$

Леонардо считает нужным сообщить, что оно приближенно равно $16\frac{2}{3}$ (с точностью до сотых $x = 16{,}68$).

Среди систем с двумя неизвестными, решаемых Леонардо, также немало новых вроде

$$x + y = 10, \qquad \frac{xy}{x-y} = \sqrt{6},$$

где

$$x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}, \qquad y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}.$$

Но особенно интересно новое решение системы

$$x + y = 10 \qquad \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4},$$

имевшейся и у Абу Камила. В анализе этой задачи у обоих авторов много общего. Например, оба они подробно обосновывают равенство произведения и суммы частных от деления любого числа на две его части, т. е.

$$\frac{a}{x}\frac{a}{y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$$

при $a = x + y$. Но Абу Камил, заменив во втором уравнении 10 на $x + y$, сводит дело к уравнению, квадратному относительно y / x. Леонардо же полагает одну часть (x) равной $2 - z$, так что другая (y) есть $8 + z$; тогда $(2 - z)(8 + z) = 16$. «Действуй согласно алгебре (secundum algebra), — говорит Леонардо,— и найдешь, что вещь есть нуль (invenies rem esse nihil), так что одна из двух частей будет 2, а другая 8» [1]. Это, кажется, первый случай употребления корня, равного нулю, к нему вновь пришли столетия спустя. Второй отрицательный корень —6 Леонардо здесь, естественно, оставил без внимания. Любопытно, что данной задачей и ее числовыми вариантами заканчиваются и алгебраический трактат Абу Камила и «Книга абака».

«Книга абака» резко возвышается над арифметико-алгебраической литературой XII—XIV вв. разнообразием и силой методов, богатством задач, доказательностью изложения. В предисловии Леонардо писал, что предпринял труд, дабы «род латинян» не пребывал более в незнании излагаемых в нем вещей. Но это был труд не для учащихся и не для тех, кто ожидал от математики одних правил решения, стандартных вопросов коммерческого дела и т. п. «Книга абака» оказалась по плечу ученым, отчасти современникам, но еще более потомству.

Последующие математики широко черпали из нее как задачи, так и приемы решения, которые в XV—XVI вв. разошлись по многочисленным итальянским, немецким, французским, английским и русским рукописям и печатным книгам. Задачи Леонардо переходили из одних сочинений в другие, их можно встретить и в знаменитой «Алгебре» Эйлера (1768) и много позднее.

Большое значение имели для развития математики и другие труды Леонардо. В 1220 г. он написал «Практику геометрии» (Practica geometriae) — книгу, которая, вопреки своему названию, не была руководством специально по прикладной землемерной геометрии, а содержала разнообразные теоремы (с доказательствами), относящиеся к измерению величин, к арифметике, планиметрии и стереометрии. Кроме результатов, известных из древности, имеются и принадлежащие самому Леонардо или снабженные оригинальными доказательствами. Так, он не просто приводит утверждение, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (что было

[1] *Leonardo Pisano.* Capitulum quintum decimum de regulis geometriae pertinentibus et de quaestionibus algebrae et almuchabile... В кн.: *G. Libri.* Histoire des sceiences mathématiques en Italie, v. 2. Paris, 1838, p. 470.

известно еще Архимеду), а доказывает его. Не встречается у Евклида теорема Леонардо о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда. С собственно геометрическими предложениями переплетается изложение некоторых землемерных приемов в последнем, седьмом разделе книги. Здесь же Леонардо учит определению расстояний и высот с помощью определенным образом размеченного квадрата. Имеются и задачи на деление фигур. В целом книга несет печать влияния как греческой, так и арабской литературы. При определении π Леонардо вычисляет периметры правильных вписанного и описанного 96-угольников и получает неравенства

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}.$$

Арифметическое среднее $\frac{4}{9}$ и $\frac{1}{5}$ есть $\frac{29}{90}$ или почти $\frac{1}{3}$, и за π принимается $\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275}$, что равно 3,1418...

Упомянем еще геометрические задачи, решаемые с помощью алгебры, именно приведением к квадратным уравнениям; такие задачи встречаются и в других сочинениях Леонардо. Некоторые вопросы (например, о вписании в квадрат, а также в равносторонний или в равнобедренный треугольник правильного пятиугольника) непосредственно примыкают к упоминавшемуся ранее труду Абу Камила о пятиугольнике и десятиугольнике. Иррациональные корни возникающих при этом квадратных уравнений Леонардо вычисляет с высокой степенью приближения в шестидесятиричных дробях (до кварт).

Особняком стоит в конце «Практики геометрии» задача об отыскании квадратного числа, в сумме с числом 5 дающего квадратное число; ею занимались ранее математики стран ислама.

Около 1225 г. Леонардо написал «Книгу квадратов» (Liber quadratorum), содержащую задачи на неопределенные квадратные уравнения. В одной задаче, предложенной ему магистром Иоанном Палермским, философом императора Фридриха II, в присутствии последнего, требовалось найти (рациональное) квадратное число, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, вновь дает (рациональные) квадратные числа. Леонардо был, вероятно, знаком с приемами решения таких задач в арабской литературе, но он применил собственный прием, исходя из того, что всякое квадратное число n^2 является суммой первых n нечетных чисел, и используя изящно полученные им формулы суммирования последовательных четных и нечетных натуральных квадратов.

В другой задаче требуется найти числа x, y, z такие, чтобы каждая из сумм $x + y + z + x^2$, $x + y + z + x^2 + y^2$, $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ была квадратным числом. Он дает решение $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$. Эта работа Леонардо — единственное ценное исследование по теории чисел в Европе за рассматриваемый период.

Иоанн Палермский предложил Леонардо еще одну трудную задачу — решить кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

о которой идет речь в трактате «Цветок» (Flos). Сначала доказывается, что x не может быть целым (положительным) числом, поскольку из

$$x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$$

следует, что x меньше 2, а $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$. Но x также не может быть (рациональной) дробью, равно как и квадратным корнем рационального числа. В последнем случае, поскольку наше уравнение можно переписать как $x = \frac{20 - x^2}{10 + x^2}$, иррациональное число x было бы равно рациональному. Затем Леонардо показывает, что x не может также иметь вида ни одной из иррациональностей, встречающихся у Евклида, и приводит приближенное решение в шестидесятиричных дробях $x = 1; 22,7,42,33,4,40$, не указывая, однако, способа, которым он его получил. Этот замечательный по точности результат только примерно на $1^1/_2$ сексты, т. е. на $3 \cdot 10^{-11}$, превосходит истинное значение корня. Доказательство невозможности решения кубического уравнения при помощи квадратных иррациональностей было, несмотря на свою неполноту и отсутствие общности, первым шагом вперед в исследовании вопроса о решении кубических уравнений в радикалах.

Иордан Неморарий

Современником Леонардо Пизанского был Иордан Неморарий, математические сочинения которого пользовались большой известностью, хотя по оригинальности и богатству содержания они значительно уступали сочинениям Леонардо. О личности Иордана точных сведений не имеется. Возможно, что это был не кто иной, как Иордан Саксонский — второй по счету генерал монашеского ордена доминиканцев, уроженец Германии, одно время живший в Париже и умерший в 1237 г. Иордан Неморарий был выдающимся механиком и математиком, автором многих сочинений по арифметике, алгебре и геометрии.

В «Арифметике, изложенной в 10 книгах» (Arithmetica decem libris demonstrata) Иордан следует в основном позднеантичной традиции Никомаха и Боэция, излагая общие арифметические свойства чисел. Интересной особенностью этого труда является применение для общности букв вместо конкретных чисел. Сам по себе такой прием не был новым, но Иордан Неморарий применяет его более систематически, чем его предшественники. При формулировке предложений или правил решения задач он не выражает величины с помощью отрезков и прямоугольников, и поэтому буквенный символ выступает у него как чисто арифметический знак произвольного числа. Еще у Леонардо буквенное обозначение относилось по большей части одновременно к величине и представляющему ее геометрическому образу и, собственно, переносилось со второго на первую. Далее, Иордан регулярно обозначает каждую величину одной буквой и не колеблется более между употреблением то одной, то сразу двух букв, как Леонардо. Вместе с тем у Неморария по-прежнему отсутствуют знаки равенства и алгебраических операций (лишь вместо нашего $a + b$ он пишет ab), благодаря чему он вынужден применять для результатов каждого отдельного действия все новые и новые буквенные обозначения.

Этот же прием, как мы сейчас увидим, Иордан использовал в своей алгебре. Алгебра Иордана, сочинение «О данных числах» (De numeris

datis) состоит из четырех книг и содержит 115 задач на линейные и квадратные уравнения и их системы.

Некоторые задачи Неморария и Леонардо совпадают, но в целом их изложение алгебры отличается и составом задач и приемами решения. Неморарий отвлекается от конкретного содержания задач, которые все у него представляют собой отвлеченные числовые примеры; он оставляет в стороне какие бы то ни было приложения к геометрии или коммерческой арифметике и т. д. Трактат «О данных числах» — это, так сказать, университетский курс абстрактной алгебры XIII в., построенный на основе методически расположенных примеров, которые решаются в общем виде, а затем иллюстрируются числовыми образцами. Название сочинения связано с тем, что в примерах при задании некоторых чисел оказываются данными другие, зависящие от них.

В I книге трактата собраны задачи второй степени с двумя неизвестными. Исходными являются задачи

$$№ 1 \begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases} \quad № 3 \begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases} \quad \text{и} \quad № 5 \begin{cases} x - y = a, \\ xy = b, \end{cases}$$

правила решения которых сформулированы чисто словесно. Последние две системы не приводятся к квадратному уравнению, но с помощью несложных преобразований сводятся к системе № 1, линейной. К этим трем системам сводятся, далее, другие, в которых данными являются, помимо суммы или разности искомых чисел, различные комбинации из квадратов, отношений и т. д. Задача № 7, непосредственно выражающаяся квадратным уравнением $x^2 + ax = x(x + a) = b$, приводится здесь к системе № 5. Во многих числовых примерах первое условие есть $x + y = 10$, как у ал-Хорезми, Абу Камила и, добавим, Леонардо Пизанского. Но ход решения у Иордана другой: все названные авторы сводили такие системы к квадратному уравнению. Задачи книги II, выраженные в основном с помощью пропорций, представляют собой линейные уравнения, начиная с простейших и кончая системами с четырьмя неизвестными.

В книге III рассмотрены задачи на пропорции, а в книге IV среди прочего даны правила решения трех типов квадратных уравнений при помощи дополнения до квадрата. Характерно, что и здесь задачи № 21—22 на системы

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ x^2y^2 = b, \end{cases}$$

посредством извлечения квадратного корня сводятся к задачам № 3 и 5 книги I, а не к квадратным уравнениям.

Геометрии посвящены четыре книги сочинения «О треугольниках» (De triangulis). Вначале в них даются определения понятий, характер которых виден на таком примере: «Непрерывность есть неразличимость границ совокупно с возможностью разграничений». Эти слова представляют собой некий вариант определения в «Физике» Аристотеля. В первых двух книгах изложены теоремы о различии прямоугольных, остроугольных и тупоугольных треугольников по соотношениям длин противоположных сторон и медиан, о делении отрезков и фигур, ограниченных прямыми линиями. Например, дается оригинальный способ деления треугольника на три равных, фактически — построение его центра тяжести и т. п. В работе заметно влияние греческих и арабских источников.

Развитие физики

На протяжении XIII и XIV вв. в английских и французских университетах видное место заняла разработка вопросов физики, причем отправным пунктом служили натурфилософские сочинения Аристотеля и его последователей на арабском Востоке. Особенное внимание привлекали механика, с одной стороны, и некоторые свойства тепловых, оптических и иных явлений — с другой.

Одним из пионеров этого движения был английский философ и ученый Роберт Гроссетест (ок. 1175—1253) (grosseteste — большеголовый), епископ Линкольнский. Роберт получил образование в Оксфорде и, быть может, в Париже, а затем был лектором и первым канцлером Оксфордского университета. Другим, еще более прославленным лидером явился ученик Гроссетеста Роджер Бекон (ок. 1214—1294), воспитывавшийся в Оксфорде и Париже и преподававший в обоих университетах. Оба они обладали огромной эрудицией, почерпнутой главным образом из сочинений греческих и арабских авторов, и были знатоками Аристотеля. Деятельность Гроссетеста и Бекона обняла всю совокупность знаний. Они писали по астрономии, по оптике, бывшей тогда важнейшей из физических наук, о календаре, подчеркивая необходимость его реформы, которая, впрочем, была произведена гораздо позднее. «Главный труд» (Opus majus) (1266—1267) Бекона представлял собой вместе с двумя приложениями подлинную энциклопедию наук XIII в., включая географию, алхимию и т. д.

Мировоззрение Гроссетеста и Бекона было ограничено, ибо они подчиняли философию догматам религии, но они смело вносили новый дух более свободного исследования, более критического отношения к признанным тогда авторитетам натурфилософии. Бекон под конец жизни поплатился за это, как и за смелое обличение испорченных нравов духовенства и высших сословий, многолетним тюремным заключением. Гроссетест и с еще большей силой Бекон отстаивали ту новую для их времени мысль, что познание физического мира должно основываться на наблюдении и опыте, а не на текстах, одобренных церковью. Наконец, оба мыслителя высоко ценили математику, как главное пособие физики. Предвосхищая Галилея, Гроссетест писал: «Все принципы природных действий должны быть даны посредством линий, углов и фигур» [1]. Бекон в IV части «Главного труда», носящей характерное заглавие «О пользе математики», восхваляет эту науку, называя ее вратами и ключом к другим наукам. Из трудов Бекона видно, что он был знаком с «Началами» и «Оптикой» Евклида, «Оптикой» и «Алмагестом» Птолемея, рядом результатов Архимеда, Аполлония, Зенодора и т. д.

Дело не ограничивалось декларациями. Бекону принадлежит, например, правило, выражающее степень интенсивности смеси двух количеств с разными интенсивностями, формально совпадающее с калориметрической формулой, вновь найденной и экспериментально проверенной в XVIII в. Г. В. Рихманом. Более сложные вопросы математики находили применение в оптике, основывавшейся на переводе знаменитого труда Ибн-ал Хайсама. Это особенно хорошо видно из «Оптики» (Optica) польского ученого Вителo (ок. 1225 — ок. 1280), который обучался около 1250 г. в Париже и был другом упоминавшегося ранее переводчика Виллема из Мербеке.

---

[1] *См. В. П. Зубов.* Из истории средневековой атомистики. Труды Института истории естествознания, 1947, т. I, стр. 293.

Внимание к учению о бесконечном и континууме привлекали проблемы атомистики, которой отведено такое важное место в сочинениях Аристотеля и на которую опирался в своей оптике Ибн ал-Хайсам. И здесь одним из зачинателей в средневековой Европе был Гроссетест, сам стоявший на позициях математического атомизма. У него мы встречаем по крайней мере постановку вопроса о сравнении различных бесконечностей вроде сумм некоторых простейших(расходящихся) рядов.

Экспериментальная основа физики XIII в. была ничтожна. Мечта Бекона об экспериментальной науке — сам термин scientia experimentalis, кажется, принадлежит ему — смогла быть осуществлена в сколько-нибудь широком масштабе много позднее. Через столетия были разработаны и основы математического аппарата нового естествознания. Вместе с тем ранние попытки математизации физики обусловили развитие нескольких математических теорий, таких, как учение об отношениях, учение о континууме и весьма своеобразное учение о широтах форм.

Томас Брадвардин

Во всех этих направлениях заслуживающие внимания результаты (в теории континуума, в частности) были получены выдающимся английским мыслителем, магистром Томасом Брадвардином (ок. 1290—1349), который учился и преподавал в Оксфордском университете, а под конец жизни стал архиепископом Кентерберийским. Брадвардину принадлежат три сочинения по математике и одно по механике. Наименьший интерес представляет «Теоретическая арифметика» (Arithmetica speculativa) — сокращение арифметики Боэция. Более оригинальна «Теоретическая геометрия» (Geometria speculativa), состоявшая из четырех отделов, каждый из которых открывался соответствующими определениями. В первом отделе рассматриваются звездчатые многоугольники, получаемые из правильных выпуклых многоугольников (начиная с пятиугольника) путем продолжения их сторон до пересечения. Из этих звездчатых многоугольников первого порядка (начиная с семиугольника) Брадвардин образует звездчатые многоугольники второго порядка и т.д., всякий раз увеличивая число вершин на две. Брадвардин установил, что сумма острых углов звездчатого пятиугольника равна двум прямым и увеличивается каждый раз на два прямых с каждой новой вершиной. Исследование звездчатых многоугольников представляет собой самостоятельный вклад Брадвардина в науку. Сумма углов звездчатого пятиугольника была найдена несколько ранее Джованни Кампано в комментариях к его переводу «Начал» Евклида.

Во втором отделе Брадвардин занимается изопериметрическими свойствами многоугольников, круга и шара, следуя основанному на труде Зенодора анонимному латинскому переводу с арабского. Третий отдел посвящен учению о пропорциях. Здесь говорится об иррациональности $\sqrt{2}$ как отношения диагонали квадрата к его стороне, упоминается «Измерение круга» Архимеда как сочинение, изобилующее трудными и сложными местами, — из него приводятся теоремы о равенстве круга прямоугольному треугольнику со сторонами, равными полуокружности и полудиаметру, а также приближение $\pi \approx 22/7$. В четвертом отделе речь идет о существовании только пяти правильных многогранников и рассматривается, со ссылкой на Аверроэса, вопрос о заполнении пространства теми или иными

правильными телами (Аверроэс неправильно полагал, что такое заполнение возможно не только с помощью кубов, но и с помощью других тел); некоторые предложения о кругах на сфере примыкают к Феодосию.

Большое место во втором отделе «Теоретической геометрии» занимает обсуждение проблемы угла касания. Для Брадвардина, как и для Кампано, угол касания есть величина, находящаяся к прямолинейным углам в некоем иррациональном отношении, характер которого, однако, отличен от иррационального отношения диагонали и стороны квадрата.

«Теоретическую геометрию» Брадвардина высоко ценили математики XIV—XV вв. Она была напечатана почти через полтораста лет после его смерти, в 1495 г., и выдержала вскоре еще два издания. Руководство Брадвардина по арифметике печаталось, начиная с 1495—1496 гг., 12 раз.

В «Трактате об отношениях или об отношениях скоростей при движениях» (Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in notibus, 1328) наибольший интерес представляет попытка Брадвардина математически выразить зависимость между скоростью v, движущей силой F и сопротивлением R. Английский ученый подвергает критике положение перипатетиков, согласно которому, говоря по-современному, скорость пропорциональна отношению движущей силы к сопротивлению. Мы оставим в стороне остроумные доводы, отчасти предвосхищающие позднейшую аргументацию Галилея, как и то обстоятельство, что сами понятия скорости и силы оставались весьма неясными. Существенно, что Брадвардин приходит к новому закону скорости, по-своему толкуя текст Аристотеля. По Аристотелю, при удвоении, утроении и т.д. отношения F/R соответственно удвоится, утроится и т. д. скорость. Брадвардин считает, что здесь должно иметь место образование составного — двойного, тройного и т. д. — отношения, другими словами, что

$$\frac{F}{R} = n^v.$$

В связи с вопросами механики подробно излагается учение о составных отношениях, причем Брадвардин приближается к идее дробных показателей степени. Если в прежней теории отношений оперировали двойными, тройными и другими целыми отношениями, соответствующими возведению в квадрат, куб и т. д., то Брадвардин вводит «половинное» отношение, соответствующее $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Он не знал, что имел в этом далекого предшественника в лице Архимеда, говорившего о «полуторном» отношении $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$. Под влиянием Брадвардина учение о дробных отношениях вскоре получило широкое развитие у Н. Орема.

«Трактат о континууме» (Tractatus de continuo), написанный между 1328 и 1335 гг., посвящен учению о непрерывном и дискретном, лежащему на границе между физикой, математикой и философией. Европейским ученым из трудов Аристотеля и арабских философов были известны различные точки зрения на вопрос о строении континуума. Брадвардин насчитывает пять концепций, распространенных ранее и в его время.

«Одни,— пишет он,— как Аристотель, Аверроэс и большинство нынешних, утверждают, что континуум не составляется из атомов, но из частей, которые делимы без конца. Другие же говорят, что он составляется из неделимых, притом двояко, ибо Демокрит полагает, что континуум составляется из неделимых тел, а другие,— что из точек. И эти разделяются надвое, ибо Пифагор, глава этого направления, Платон и наш совре-

менник Вальтер полагают, что континуум составляется из конечного числа неделимых, а другие,— что из бесконечного числа. И эти последние делятся надвое, ибо одни, как наш современник Генрик, утверждают, что континуум составляется из бесконечного числа неделимых, непосредственно связанных друг с другом, а иные, как Роберт Линкольнский,— из бесконечного числа их, связанных друг с другом опосредованным образом» [1].

Упоминаемые Брадвардином современники — это англичане Уолтер Кеттон (ум. 1342), оксфордский ученый Генри Харклей (ум. 1371) и Роберт Гроссетест. И Роджер Бекон занимался этими вопросами, стоя на стороне перипатетиков. Против мнения, что континуум составлен из неделимых частей, он выдвигал вслед за древними такое соображение. Если плоскость состоит из точек, то диагональ квадрата равна его стороне, так как обе состоят из одинакового числа точек. Но диагональ не равна стороне и, значит, плоскость не состоит из точек.

Брадвардин также отстаивает концепцию Аристотеля. Аргументация его подробна и во многом оригинальна. Книга начинается с определений, за которыми следуют предположения и заключения, доказываемые, как теоремы. Континуум есть количество, части которого взаимно связаны. Отдельно определяются пребывающий континуум и его виды — тело как континуум, пребывающий и обладающий длиной, шириной и глубиной, поверхность, линия. Время есть последовательный континуум, измеряющий следование. Даются определения точки как неделимого, обладающего положением, и мгновения. Движение есть прохождение пространственного континуума во временно́м. Проводится различие между видами бесконечности: категорематической и синкатегорематической. Если отвлечься от некоторых оттенков мысли, то первая из них есть актуальная, трансфинитная, а вторая — потенциальная бесконечность, которая происходит из конечной величины неограниченным увеличением, подобно тому как растут последовательные натуральные числа.

Свою позицию Брадвардин формулирует в словах: «Утверждение, полагающее, что континуум состоит из конечного числа неделимых, враждебно всем наукам, всем им противоборствует и потому всеми ими единодушно отвергается» [2]. Из множества аргументов против финитно-атомистической концепции укажем один — от опыта. Если представить себе, что число точек диаметра окружности конечно, например 10, то столько же точек будет в полуокружности, что ясно, если восставить в каждой точке диаметра перпендикуляр. Получается, что длина окружности вдвое больше диаметра. В противовес этому Брадвардин выдвигает несколько теоретических доводов, но этим не ограничивается и ссылается на плотников, каменщиков и всех других мастеров, опыт которых показывает ложность подобного заключения.

Критикуя инфинитно-атомистическую концепцию, Брадвардин стремится показать, что из нее вытекают противоречивые следствия. Он строит примеры, в которых устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами бесконечных множеств. Так, берутся совокупности точек двух разных отрезков: c и f, $c > f$, проходимых (с разными скоростями) за одно время h. Тогда каждому мгновению будет соответствовать по одной точке в каждом отрезке, и, следовательно, точек в них поровну. Если же

---

[1] См. *В. П. Зубов.* Трактат Брадвардина «О континууме». «Историко-математические исследования», 1960, вып. 13, стр. 402—403.

[2] Там же, стр. 441.

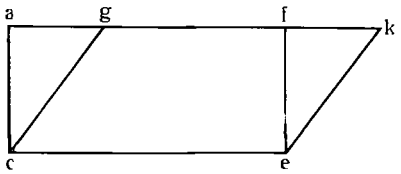


Рис. 72

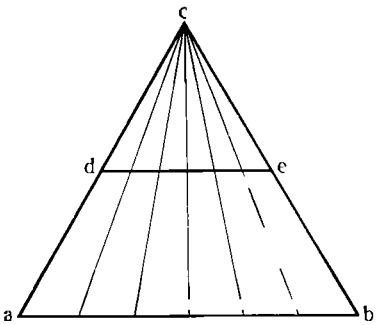


Рис. 73

отрезок *c* будет пройден за то же время *h*, а *f* — за большее время *k*, то получится, что в *f* больше точек, чем в *c*. Точно так же можно доказать, что в *f* меньше точек, чем в *c*.

В рассмотрении этого и подобных парадоксов Брадвардин подходил к постановке теоретико-множественных проблем. В других случаях мы находим у него предвосхищение идей метода неделимых Б. Кавальери и аргументов противников этого метода. Так, по мнению Брадвардина, из критикуемого им учения следует парадокс: конечная площадь может в любом конечном отношении превзойти другую, равновеликую ей площадь. В самом деле, известно, что параллелограмм равновелик прямоугольнику с теми же основанием и высотой. Проведем в параллелограмме *cgke* (рис. 72) от всех точек основания *ce* «все прямые» к точкам противоположной стороны *gk* параллельно *cg*. Этих прямых будет столько же, сколько соответствующих перпендикуляров в прямоугольнике *cafe*, а по длине они превосходят эти перпендикуляры в отношении *cg* : *ca*. Если площади состоят из линий, то получается, что параллелограмм больше равного ему прямоугольника в *cg* : *ca* раз.

Аналогично можно показать, что треугольник *dec* с основанием, делящим пополам стороны равностороннего треугольника, и по площади равный четверти последнего одновременно равен его половине, ибо каждая линия в *dec* равна половине соответствующей линии в *abc* (рис. 73).

Размышления Брадвардина о непрерывном и бесконечном не были направлены на создание алгоритмов решения каких-либо определенных задач геометрии и физики. Он, как и другие схоласты, работавшие в том же направлении, имел целью при помощи математики выяснить некоторые весьма общие количественные свойства понятий пространства, времени, движения, не выходя особенно за пределы аристотелевой философии. Хотя при этом не были получены конкретные математические результаты, однако дискуссии о природе континуума оказали влияние на разработку исчисления бесконечно малых в XVII в.

Ричард Суайнсхед

В середине XIV в. возникло еще одно замечательное направление средневековой математики, выступавшее под различными названиями: учение о конфигурациях качества, или о широтах форм, или равномерности и неравномерности интенсивностей и т. д. В этом учении содержатся

прообразы идей функциональной зависимости и ее графического изображения,— кристаллизация соответствующих понятий и методов произошла только в XVII столетии.

Истоки этого направления, сложившегося в Оксфорде и Париже, были связаны со спорами о логико-философском понятии «формы» и ее изменениях, восходящем к Аристотелю. Шотландский философ-номиналист Дунс Скотт (ок. 1265—1308), названный Марксом «первым выразителем материализма в Средние века», понимал под формой как бы чувственно воспринимаемое качество вещей, существующих ранее общих понятий. Выступая против так называемых реалистов, последователей Фомы Аквинского (1225—1274), он защищал множественность форм, их изменчивость, отличая при этом интенсивность, или усиление (intensio), формы от ее ремиссии, или ослабления (remissio).

Довольно широкое развитие в математическом и натурфилософском плане новое учение получило в «Книге калькуляций» (Liber calculationum) воспитанника Оксфордского университета Ричарда Суайнсхеда или Суисета (ок. 1350). Интенсивность формы выступает как переменная интенсивность качества, например как степень (gradus) теплоты или холода, разреженности или плотности, как скорость механического движения и т. п. При этом впервые появляется понятие о мгновенной, или точечной, скорости (velocitas instantanea, velocitas punctualis), между тем как ранее скорость рассматривалась только за какой-либо конечный промежуток времени. Впрочем, этому новому понятию не дается четкого определения, и оно, по существу, рассматривается как интуитивно очевидное; к тому же наше современное определение было тогда немыслимо. Дело в том, что и в древности, и в Средние века ставили в отношение между собой лишь однородные величины и потому нельзя было относить путь ко времени: для сравнения скоростей двух движений сопоставляли либо пути, пройденные за одно и то же время, либо времена, за которые проходится один и тот же путь. Появляется также понятие об ускорении как интенсивности скорости или же движения; французский математик Н. Орем, младший современник Суайнсхеда, ввел для ускорения специальный термин velocitatio. Эти новые идеи применяются к изучению неравномерных движений. Синтез кинематической и математической мысли имел в теории калькуляций основное значение. Плодом его было выделение идеи функциональной зависимости, которая до того существовала только в скрытом виде. «Вся кинематика,— замечает Н. Бурбаки, — опирается на интуитивную, а в некотором роде и экспериментальную концепцию изменяющихся во времени величин, т. е. функций времени» [1]. Одновременно понемногу вызревает представление о законах природы, как законах функционального типа.

С помощью не всегда ясных рассуждений Суайнсхед анализирует примеры изменения интенсивностей. Анализ этот носит чисто абстрактный характер, и ни исходные посылки, ни результаты не связываются с реальными количественными измерениями, с данными эксперимента или наблюдения. Так, Суайнсхед говорит, что при равномерном росте интенсивности средняя интенсивность на некотором промежутке есть средняя арифметическая начальной и конечной интенсивностей. Этот результат

---

[1] *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под ред. К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 202.

равносилен интегральной формуле (скорость $v = kt$)

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} kt\,dt = \frac{kt_2 + kt_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2};$$

в механике ему соответствует вычисление пути равномерно ускоренного движения. В другом случае находится средняя интенсивность при более сложном условии: интенсивности на последовательных участках промежутка, разбитого в геометрической прогрессии $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., растут в арифметической прогрессии 1, 2, 3, ... Тогда, согласно Суайнсхеду, средняя интенсивность равна интенсивности на втором из этих дробных промежутков. Мы можем выразить этот результат суммой бесконечного ряда

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2^2}\cdot 2 + \frac{1}{2^3}\cdot 3 + \ldots = 2,$$

впервые встречающегося в схоластической литературе; греки знали только бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. Говоря об изменении качества, Суайнсхед иногда пользуется термином «течение (fluxus) качества»; слово «течение» и его модификации впоследствии вошли в литературу по геометрии и исчислению бесконечно малых XVI—XVII вв., особенно в «методе флюксий» Ньютона (ср. современное название «текущие координаты»).

Труд Суайнсхеда издавался трижды: в Падуе около 1477 г., Павии в 1498 г. и Венеции в 1520 г. Имя Суайнсхеда пользовалось известностью еще в XVII в. В двух письмах 1670 и 1696 гг. Лейбниц отзывался о нем, как об одном из первых ученых, применивших математику в физике и введших математику в схоластическую философию.

В одно время со Суайнсхедом теорию калькуляций в Оксфорде успешно разрабатывали У. Хейтесбери и Дж. Дамблтон.

Николь Орем

Подобно Англии, и Франция выдвинула в XIV в. замечательного математика, значительно превосходившего своих современников, магистра Николя Орема (ок. 1323—1382). Орем преподавал в 1348—1361 гг. в одном парижском коллеже, затем жил главным образом в Руане, а с 1377 г. был епископом в Лизье. Орем — чрезвычайно яркий человек, живо откликавшийся на злободневные вопросы своей эпохи. Он был одним из зачинателей научной литературы на французском языке и дал ряд переводов сочинений Аристотеля; по-французски он написал «Трактат о сфере» (Traité de l'espère), в котором весьма обогатил французскую научную терминологию. Он выступал против злоупотреблений церкви, против астрологии и гаданий, хотя сам еще верил в магию. Ряд трудов Орема относится к астрономии и механике.

Для нас прежде всего интересна разработка Оремом теории отношений, которой он посвятил два сочинения: «Трактат об отношениях» (Tractatus proportionum), составленный около 1350 г. и напечатанный около 1500 г. и затем в Венеции в 1505 г. и «Алгоризм отношений» (Algorismus proportionum). В первой части последнего труда Орем вводит наряду с двойными,

тройными, вообще n-кратными отношениями четвертные, полуторные и другие дробно-рациональные отношения, которые соответствуют нашим $a^{1/2}$, $a^{1/4}$, $a^{3/2}$ и т. п. Исходя из того, что $8 = \sqrt{64}$, $4 = \sqrt[3]{64}$, он заключает, что 8 находится в полуторном отношении к 4 (в современной записи $8 = 4^{3/2}$), что записывает $\left|\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}\right| \cdot 4$ (p—первая буква слова proportio). Далее, Орем словесно формулирует многочисленные правила операций с дробными отношениями вроде

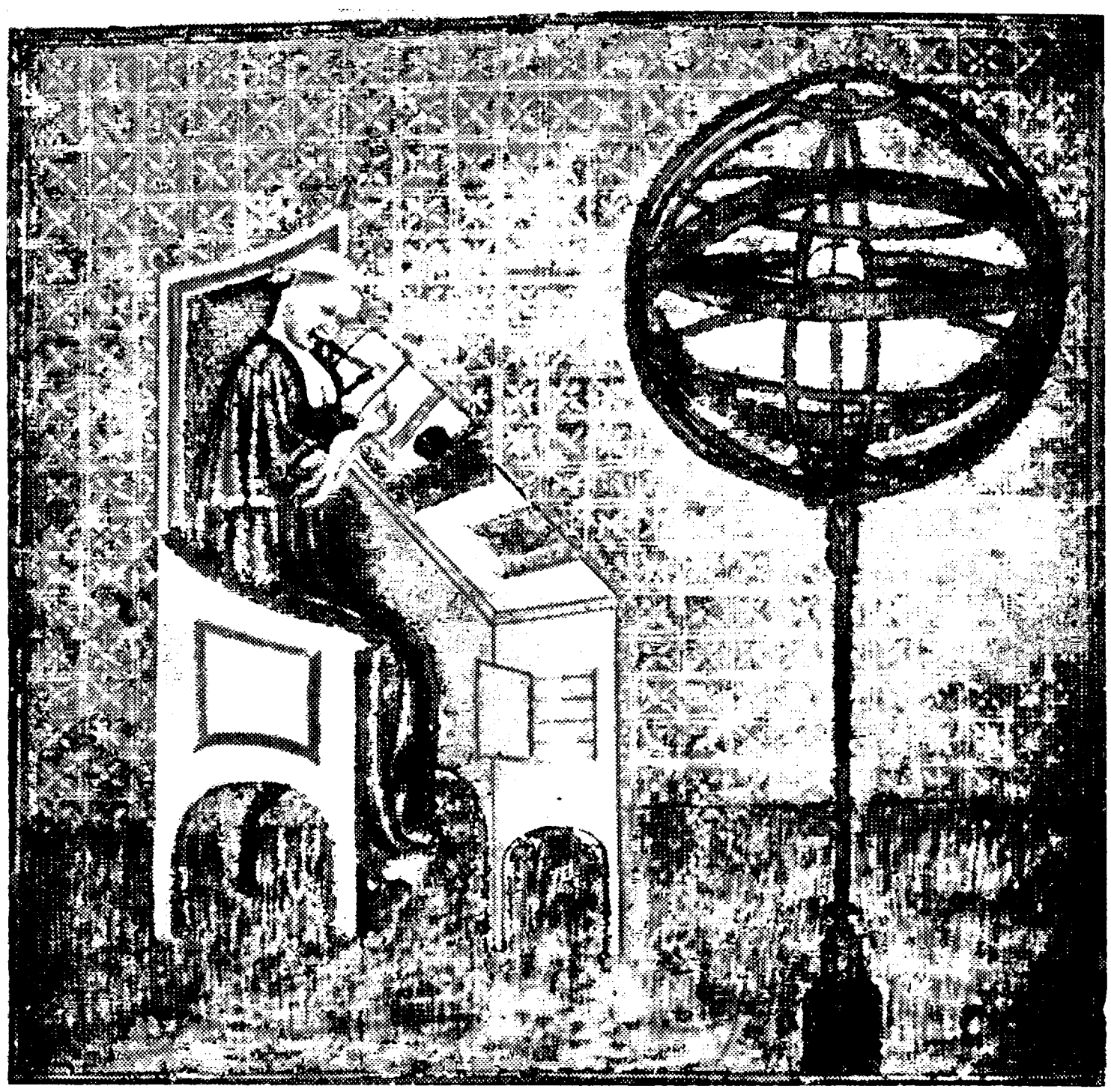
$$a^{n/m} = (a^n)^{1/m}, \qquad a^{1/n} b^{1/n} = (ab)^{1/n}, \qquad \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n},$$

$$a^{1/m} b^{1/n} = (a^n b^m)^{1/mn}, \qquad \frac{a^{1/m}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{1/mn},$$

$$(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q} = a^{(mp/n)\left(\frac{(1)}{q/n}\right)}$$

и т. д. Во втором и третьем отделах «Алгоризма отношений» даны примеры его использования в задачах арифметики, теории музыки, геометрии. Орем подошел и к понятию иррационального показателя как отношения, «знаменование» которого «невыразимо» или «непознаваемо». Такие отно-

Николь Орем с армиллярной сферой.
Миниатюра из рукописи XIV в. французского перевода Орема книги Аристотеля «О небе» (Париж, Национальная библиотека)



шения, писал Орем, можно заключать между «достаточно близкими» целыми или дробными. Вопрос об арифметическом измерении любых «отношений» был практически решен 250 лет спустя в учении о логарифмах.

Создание формального алгоритма дробных отношений, т. е. по существу, обобщение действия возведения в степень на положительные дробные показатели, явилось важным достижением средневековой алгебры. Хотя это сочинение Орема было напечатано только в XIX в., оно получило распространение и в Средние века.

Орем существенно развил и учение Суайнсхеда об интенсивности форм. Обширный труд Орема по этому предмету, написанный до 1371, г., сохранился в многочисленных списках под различными заголовками: «О конфигурации качеств» (De configuratione quantitatum), «О равномерности и неравномерности интенсивностей» (De uniformitate et difformitate intensionum), «Трактат о строении сил и мере неравномерностей» (Tractatus de figuratione potentiarum et mensura difformitatum) и др.

Орем придал этому учению большую простоту и наглядность, чем Суайнсхед, благодаря систематическому употреблению геометрических образов величин и их взаимозависимостей. Значение геометрических изображений Орем подчеркивает сразу в первой главе части I трактата. Всякая поддающаяся измерению вещь, говорит он, кроме чисел, изображается в виде непрерывной величины, и для измерения поэтому нужны точки, линии, поверхности, в которых, согласно Аристотелю, первично обнаруживается мера и отношение; в прочих вещах мера или отношение познаются посредством умственного соотнесения этих вещей с точками, линиями, поверхностями. Интенсивности качества непрерывных измеримых величин находятся в зависимости от их экстенсивностей, своего рода их протяженностей (от extensio — протяжение), как, например, скорость движения тела от пройденного пути или времени движения (ч. III, гл. IV). И поскольку среди различных видов континуума мы легче и проще всего постигаем величины и отношения линий (прямых отрезков), то интенсивности следует изображать линиями, приложенными в точках прямой, характеризующих экстенсивности. Первые отрезки Орем называет широтами (latitudo) качеств или форм, а отрезки, в концах которых прилагаются широты,— долготами (longitudo). Мера качества иногда называется также градусом (gradus — ступень, степень); «неградус» соответствует нулю. Длины широт пропорциональны интенсивностям; проводить их можно в любом направлении, но предпочтительно—перпендикулярно к линии долгот. Таким образом, зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается некоторой плоской фигурой, ограниченной сверху кривой, которую Орем именует «линией верхнего края» или «линией интенсивности». Такое рассмотрение, естественно, помогает измерению и его пониманию. Орем особо подчеркивает пользу геометрического представления: некоторым людям трудно, например, понять, что такое равномерно-неравномерное качество, но нет ничего проще того наглядного факта, что высоты прямоугольного треугольника равномерно-неравномерны (ч. I, гл. IV).

Вначале Орем говорит о качествах, интенсивности которых распределены по точкам линии — одномерного континуума, это так называемые линейные качества. Но существуют еще «плоскостные» и «телесные» качества, распределяемые по точкам двумерных или трехмерных континуумов. Плоскостные качества изображаются телами с плоскими основаниями. Вопрос об изображении телесных качеств, естественно, представляет для Орема чрезвычайную трудность, и здесь текст его, в котором можно усмотреть

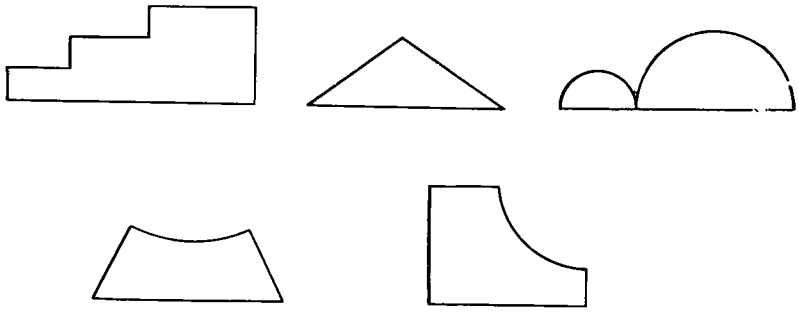


Рис. 74

некий подход к мысли о воображаемом пространстве четырех измерений, недостаточно ясен.

Мы рассмотрим только учение о линейных качествах, прежде всего их классификацию. Орем выделяет три основных типа качеств.

1. Равномерные, с постоянной интенсивностью или широтой; зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается прямоугольником, т. е. линия интенсивности — отрезок прямой, параллельной линии долгот.

2. Равномерно-неравномерные, у которых разности широт любых пар точек пропорциональны соответственным разностям долгот; зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается прямоугольным треугольником или четырехугольником с наклонной верхней стороной в зависимости от того, пересекает линия интенсивности прямую долгот или нет, т. е., как говорит Орем, кончается ли качество на «неградусе» или на градусе (ч. I, гл. XI).

3. Неравномерно-неравномерные — все остальные. Их Орем характеризует общим образом чисто отрицательно, как качества, у которых отношения разностей широт пар точек не равны отношениям разностей соответствующих долгот. Неравномерно-неравномерные качества разбиваются на две группы.

а) Простые неравномерно-неравномерные, когда линия интенсивности единая и не составлена из нескольких частей. Линия интенсивности может быть «рациональной»—дугой круга или эллипса или «иррациональной»—какой-либо другой кривой, помимо того, она может быть вогнутой или выпуклой. Всего Орем различает четыре рода простой неравномерной неравномерности (ч. I, гл. XIV—XV). Само слово «эллипс» не употребляется, говорится о кривой, у которой высоты пропорциональны высотам дуги круга.

б) Сложные неравномерно-неравномерные, получающиеся комбинированием шести предыдущих по два, три, четыре, пяти и шести; таких сочетаний будет $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$ и всего 63 (ч. I, гл. XVI). Здесь у Орема появляются и разрывные зависимости в форме ступенчатых ломаных, которые он называет ступенчатыми неравномерностями (difformites gradualis), и линии интенсивности, составленные из двух отрезков, дуг окружностей или эллипсов (рис. 74).

Понятие функции, как видно, было рассмотрено Оремом подробнее, чем оксфордскими «калькуляторами». Специального термина Орем еще не имел

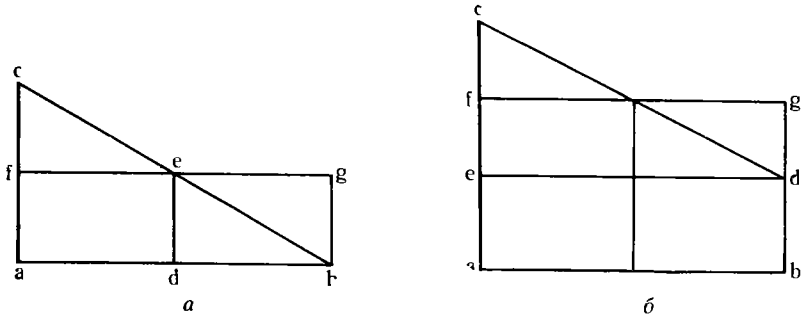


Рис. 75

и для наименования соответствия между величинами пользовался старым словом «отношение». Самые функции задавались с помощью словесных описаний и выражающих их фигур; об этих способах представления функций Орем писал: «Какое бы отношение (proportio) ни оказывалось между одной интенсивностью и другой..., такое же отношение обнаруживается между одной линией и другой, и наоборот» [1]. Аналитическое задание функции при помощи формул появилось только в XVII в. у Декарта и Ферма.

Графические изображения качеств служат не только для наглядного изображения зависимостей, но и для исследования их свойств. В части II трактата Орем особо рассматривает возможные случаи движения или течения, именуемого упоминавшимся fluxus. Здесь же введено понятие об ускорении (velocitatio) как интенсивности скорости, причем само ускорение может быть как равномерным, т. е. постоянным, так и неравномерным различных видов (ч. II, гл. V).

В VII главе III части Орем геометрически исследует движение в случае равномерно-неравномерной скорости, т. е. равномерного ускорения, и доказывает равносильность такого движения равномерному движению со средней скоростью, т. е. теорему о том, что средняя скорость равномерно ускоренного движения равна средней арифметической начальной и конечной скоростей. Для этого он доказывает равенство площадей прямоугольного треугольника *abc* или трапеции *abdc* и прямоугольника *abgf* (рис. 75), высота которого равна половине высоты треугольника или полусумме оснований трапеции. Треугольник и трапеция служат изображениями равномерно-ускоренного движения, скорость которого в конечной точке соответственно равна нулю или отлична от нуля, а прямоугольник — изображением равномерного движения со скоростью, равной скорости предыдущего движения в среднее мгновение. Орем не дает определения средней, или, по его выражению, суммарной, скорости (velocitas totalis) и не говорит прямо, что площади рассматриваемых фигур выражают пройденный путь, но такое понимание естественно следует из его рассуждений и даже лежит в их основе. Для более отчетливого выражения пропорциональности пути и площади фигуры, ординаты которых выражают мгновенные скорости, необходимо было развитое учение о бесконечно малых. Нельзя не отметить вместе с тем разительное сходство вывода Орема и более подробного доказательства той же теоремы, данного 250 лет спустя (в 1638 г.) Галилеем.

[1] *Н. Орем.* Трактат о конфигурации качеств. Перевод В. П. Зубова. «Историко-математические исследования», вып. II. М., 1958, стр. 637.

Рис. 76

Из другого сочинения Орема — «Вопросов по геометрии Евклида» (Quaestiones super geometriam Euclidis) — видно, что в изучении равномерно ускоренного движения он продвинулся еще далее. Именно он установил, что при начальной скорости, равной нулю, проходимые при этом пути возрастают пропорционально квадрату времени и что расстояния, пройденные за одинаковые промежутки времени, возрастают пропорционально последовательным нечетным числам, считая от единицы (Суайнсхед и Хейтесбери не пошли дальше нечетных чисел 1, 3 для случая деления времени движения пополам). Первое свойство является следствием 19 предложения VI книги «Начал» Евклида (площади подобных треугольников относятся, как квадраты соответственных сторон), а второе вытекает из первого. Мы обычно связываем оба с именем Галилея, благодаря которому они прочно вошли в механику.

В III части трактата разбираются примеры движения, в которых скорость меняется от промежутка к промежутку скачками. Кроме ряда, который мы видели у Суайнсхеда, в VIII главе III части имеются другие, например ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\ldots=\frac{7}{4}.$$

Сам Орем говорит, что движение на первом участке ($^1/_2$) происходит равномерно (с постоянной скоростью) в каком-нибудь градусе; на втором ($^1/_4$), начиная с этого градуса, равномерно-неравномерно (равномерно ускоренно) достигает вдвое большего градуса; на следующем участке ($^1/_8$) — опять равномерно; на четвертом участке ($^1/_{16}$) равномерно-неравномерно достигает вдвое большего градуса, чем в начале этого отрезка, и т. д. (ч. III, гл. IX). Суммирование основывается на том, что каждый нечетный член ряда находится к последующему члену в отношении 4 : 3, откуда следует, что в том же отношении находится сумма нечетных членов, равная 1, к сумме четных членов, поэтому сумма четных членов равна $^3/_4$.

Вместе с тем Орем пользуется геометрической интерпретацией рядов такого типа в виде простирающейся в бесконечность фигуры конечной площади. В случае ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ он рассматривает два единичных квадрата, один из которых подразделен параллелями к одной из его сторон на прямоугольники, высоты которых равны $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$. Тогда из второго квадрата и указанных прямоугольников Орем строит ступенчатую фигуру, которая простирается в бесконечность и имеет площадь, равную 2 (рис. 76). Располагая квадрат и прямоугольники по горизонтали, Орем истолковывает их как изображение движения, скорость которого в течение каждого дня постоянна, но каждый день в два раза меньше скорости предыдущего дня (ч. III, гл. IX). При этом, пишет Орем, тело «только за всю вечность (nunquam nisi in eternum) пройдет путь, вдвое больший того, который был

пройден за 1-ю часть времени. Но какой бы отрезок пройденного пути ни брать, он всегда будет меньше, чем удвоенный отрезок пути, пройденного в 1-й день» [1]. В заключение Орем кратко поясняет, как распространить эти идеи на простирающиеся в бесконечность тела конечного объема.

Трактат Орема не был напечатан, но в рукописях получил большое распространение. В некоторых университетах уже в конце XIV в. было введено преподавание учения о широтах форм. В Италии это учение пропагандировал и комментировал Биаджо Пелакани (ум. 1461) из Пармы; здесь же было трижды напечатано изложение теории по Орему под названием «Трактат о широтах форм» (Tractatus de latitudinibus formarum, Padua, 1482 и 1486; Venetia, 1505); в 1515 г. появилось еще одно издание в Вене. В этом трактате мы находим интересное замечание о поведении величины в соседстве с ее наибольшим значением. Автор, вероятно один из учеников или ближайших последователей Орема, утверждает, что в любой фигуре вроде полукруга интенсивность заканчивается на «высшем градусе медленности» (tarditas), а ремиссия начинается с высшего градуса медленности в средней точке, где заканчивается интенсивность. Что этот «высший градус медленности» есть, по терминологии Орема, «неградус», т. е. нуль, все же не указано. Аналогичное замечание вновь сделал в 1615 г. И. Кеплер (величина по обе стороны от максимума вначале обладает нечувствительным убыванием), а вскоре затем П. Ферма сформулировал необходимое условие экстремума гладкой кривой. В данной связи стоит упомянуть, что Орем в своем сочинении (ч. I, гл. XX—XXI) подходил к вопросу о количественной оценке кривизны (curvitas) линий и, в частности, заметил, что интенсивность кривизны окружности обратно пропорциональна радиусу.

В теории рядов к Орему восходит еще одно замечательное открытие, а именно доказательство расходимости так называемого гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Это доказательство содержится во втором из «Вопросов по геометрии Евклида». Орем рассматривает гармонический ряд в связи с проблемой делимости континуума и суммирования бесконечного множества частей непрерывной величины. Он отмечает, что если части некоторой величины a, например некоторого отрезка, равные $\frac{a}{n}$, $\frac{a}{n^2}$, $\frac{a}{n^3}$, ... при $n>1$, последовательно прибавляются друг к другу, то их сумма (totum) никогда не является бесконечной, и формулирует правило суммирования бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В то же время Орему известно, что прибавление бесконечно многих частей величины к ней, даже в случае, когда эти части неограниченно убывают, может дать бесконечно большую сумму, что иллюстрируется примером: час подразделяется на бесконечно много частей, образующих геометрическую прогрессию, и в каждую из этих частей часа проходится соответственно фут, $^1/_2$ фута, $^1/_3$ фута, $^1/_4$ фута и т. д. Тогда сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ бесконечна, так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ больше $^1/_2$, сумма от $^1/_5$ до $^1/_8$ также больше $^1/_2$, так же как сумма от $^1/_9$ до $^1/_{16}$ и т. д. Расходимость гармонического ряда (этот термин появился в XVII в.) была доказана снова независимо от Орема и другим способом П. Менголи в 1650 г., дальнейшие доказательства были даны Иоганном и Якобом Бернулли в 1689 г.

[1] *Н. Орем.* Трактат о конфигурации качеств, стр. 715.

(см. ч. II, гл. 7). Доказательство Орема была намного проще доказательств математиков XVII в. Другие «вопросы» Орема относились к несоизмеримости стороны и диагонали квадрата, к учению о широтах форм к углам касания и т. д.

Учение о широте форм содержало ряд моментов, получивших развитие в математике переменных величин в XVII и последующих веках. В центре учения Орема лежало представление о переменной широте формы и ее графическом представлении. К этому представлению наиболее выдающиеся умы схоластической науки пришли в результате попыток осмыслить с новых позиций проблемы древней и современной им натурфилософии. Если передавать взгляды Орема на современном языке, то его трактовке зависимостей между широтами и долготами ближе всего, пожалуй, соответствует наше представление о функции точки континуума одного, двух или трех измерений. Способ задания зависимости Орема только словесный и графический, недостаточное развитие алгебры не позволяло пользоваться при этом формулами, ставшими основным способом задания функций в XVII—XVIII вв. Таким образом, хотя графическое задание функций имеет для Орема решающее значение, об уравнении линии интенсивности у него нет и речи, более того, нет речи и о координатах точек. Орем дал и своеобразную классификацию функций.

После Орема учение о широте форм не было обогащено новыми идеями и застыло в том виде, какой получило в середине XIV в. Попытки его основателей связать математику с естествознанием не вышли за границы общих абстрактных умозрений, и, скажем, установив равносильность равномерно ускоренного движения и равномерного движения со средней скоростью, они не использовали этот результат в коренной проблеме движения брошенного тела. В учении Орема было несколько глубоких идей, но собственно математический аппарат для решения конкретных проблем был небогатым. Более того, этот аппарат работал вхолостую для разбора отдельных остроумных, но искусственных примеров. Из «форм» рассмотрены были только ограниченные отрезками прямых и упоминались как возможные дуги окружности и эллипса; об алгебраическом исследовании кривых, составляющем суть аналитической геометрии, Орем и не помышлял.

Интересные результаты в суммировании рядов получил последователь Орема португалец Альвар Томас, преподававший в первой четверти XVI в. в Сорбонне, где он получил степени магистра, а затем доктора медицины. Результаты Томаса содержатся в его «Книге о трояком движении и отношениях» (Liber de triplici motu proportionibus annexis, Parisii, 1509). Под «трояким движением» здесь имеются в виду три вида движения по классификации Аристотеля — перемещение в пространстве (то, что мы называем механическим движением), движение по количеству (рост и убыль) и движение по качеству (качественное изменение). Томас формулирует общее правило суммирования ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

где $|x| < 1$. Доказательство его (чисто словесное) основано на знании суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: данный ряд раскладывается в сумму рядов $\sum_{n=k}^{\infty} x^n$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, суммы которых

соответственно равны

$$\frac{1}{1-x}, \qquad \frac{x}{1-x}, \qquad \frac{x^2}{1-x}, \ldots$$

Томас суммирует также ряды вида

$$1 + x + \lambda x^2 + \mu x^3 + \lambda^2 x^4 + \mu^2 x^5 + \ldots$$

и

$$1 + \left(c + \frac{a}{b}\right) x + \left(c + \frac{a}{b\lambda}\right) x^2 + \left(c + \frac{a}{b\lambda^2}\right) x^3 + \ldots,$$

примерами которых являются соответственно ряды

$$1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{19}{16} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{5}{2}$$

и

$$1 + 3\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + 3\frac{1}{10} \cdot \frac{3^2}{5^2} + 3\frac{1}{20} \cdot \frac{3^3}{5^3} + \ldots$$

Более сложные ряды, представляющие трансцендентные функции, ему, естественно, не удается просуммировать, но все же, основываясь на сравнении с геометрической прогрессией, он указывает некоторые границы, между которыми лежит сумма ряда. Например, Томас заключает сумму ряда

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots, \qquad 1 < \lambda_k < k + 1,$$

между суммами

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

и получает оценки

$$2 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots < 4$$

и

$$3 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \ldots < 9.$$

Точное значение суммы первого из этих рядов равно $2 + \ln 2$, а второго $3 + \ln 3$. Томас знать этого не мог, но он правильно отметил, что проходимые в данном случае пути иррациональны.

Труд Томаса — лучшее достижение в этой области после Орема. Подлинное развитие учения о широтах форм получило только в XVII в. в аналитической геометрии Декарта и Ферма, в динамике Галилея и в геометрии неделимых Кавальери. Хотя математики XVII в. прямо не ссылаются на Орема, несомненно, что его учение сыграло существенную роль в подготовке их открытий. Эти открытия смогли быть сделаны только тогда, когда идея переменной величины оказалась в живом контакте с естествознанием и для решения возникающих здесь задач был создан соответствующий алгебраический аппарат.