ПЯТАЯ ГЛАВА

ЭПОХА ВОЗРОЖДЕНИЯ

XV и XVI века вошли в историю Европы под названием «эпохи Возрождения», при этом имеется в виду возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. На самом же деле эта эпоха характеризуется гораздо более глубокими преобразованиями в жизни всего общества: именно в это время еще в недрах феодального строя возникает новый общественный строй — буржуазное общество.

В промышленности появляются мануфактуры, требующие технических усовершенствований и изобретений. Тогда же появляются в Европе компас, часы и порох, дешевая бумага и книгопечатание. Гигантски возрастает торговля, приведшая к исключительному росту мореплавания и к великим географическим открытиям. Бумага и книгопечатание делают научные знания необходимым элементом общественной жизни. Совершается подлинная культурная революция.

«Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством,— писал о XV—XVI вв. Ф. Энгельс,— эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености. Люди, основавшие современное господство буржуазии, были всем чем угодно, но только не людьми буржуазно-ограниченными. Наоборот, они были более или менее овеяны характерным для того времени духом смелых искателей приключений. Тогда не было почти ни одного крупного человека, который не совершил бы далеких путешествий, не говорил бы на четырех или пяти языках, не блистал бы в нескольких областях творчества. Леонардо да Винчи был не только великим живописцем, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важными открытиями самые разнообразные отрасли физики. Альбрехт Дюрер был живописцем, гравером, скульптором, архитектором и, кроме того, изобрел систему фортификации, содержащую в себе некоторые идеи, которые много позднее были вновь подхвачены Монталамбером и новейшим немецким учением о фортификации. Макиавелли был государственным деятелем, историком, поэтом и, кроме того, первым достойным упоминания военным писателем нового времени. Лютер вычистил авгиевы конюшни не только церкви, но и немецкого языка, создал современную немецкую прозу и сочинил текст и мелодию того проникнутого уверенностью в победе хорала, который стал «Марсельезой» XVI века. Герои того времени не стали еще рабами разделения труда, ограничивающее, создающее однобокость влияние которого мы так часто наблюдаем у их преемников. Но что особенно характерно для них, так это то, что они почти все живут в самой гуще интересов своего времени, принимают живое участие в практической борьбе, становятся на сторону той или иной партии и борются кто словом и пером, кто мечом, а кто и тем и другим вместе. Отсюда та полнота и сила характера, которые делают их цельными людьми» [1].

Энгельс называет «революционным актом, которым исследование природы заявило о своей независимости и как бы повторило лютеровское сожжение папской буллы», издание бессмертного творения Коперника, бросившего «вызов церковному авторитету в вопросах природы. Отсюда,— продолжает Энгельс,— начинает свое летосчисление освобождение естествознания от теологии» [2].

Исторически сложилось так, что именно в математике начинают искать последний критерий истины. С одной стороны, чисто практическое преимущество, которое получал купец над конкурентами даже при небольшом улучшении способов вычисления своих координат на море, а с другой стороны, религиозные традиции, утверждавшие, что Вселенная построена богом по математическому плану, ставили математику в центр внимания. И если в начале Средних веков «математиками» называли людей, занимавшихся астрологией, и подвергали их преследованию как колдунов и чернокнижников, то Леонардо да Винчи пишет, что «тот, кто порочит высшую достоверность математики, тот питается сумбуром» [3]. И хотя по мере роста действительного могущества математики такие напыщенные декларации сменяются более трезвым пониманием ее возможностей, математика уже в то время становится и остается основным инструментом европейской культуры.

В XV—XVI вв. математика развивается главным образом в Италии, Франции и Германии, к которым в конце XVI в. присоединяется Голландия, переживавшая в это время первую в Европе буржуазную революцию.

На Руси математика начинает развиваться только в XVI в., когда после освобождения Руси от татарского ига устанавливаются новые связи между нею и Западной Европой. В это время на Руси появляются рукописные переводы и компиляции из сочинений европейцев и европейских переводов ученых Востока; в этих рукописях создается русская математическая терминология. Особенно следует отметить арифметические рукописи с традиционным названием. «Книга рекома по-гречески арифметика, а по-немецки — алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость» (в настоящее время сохранились рукописи этого типа, переписанные в XVII в.). До настоящего времени дошла единственная математическая рукопись XVI в.— «статья» из «Книги сошному письму», посвященная вычислению налога с земли, взимавшемуся в зависимости от количества и качества земельной площади в условных единицах — «сохах». Здесь же впервые описываются русские счеты, первоначально приспособленные для расчетов «сошного письма». В XVI—XVII вв. появляются первые русские рукописные книги по математики, вытесненные в начале XVIII в. книгой Л. Ф. Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», напечатанной в Москве в 1703 г.

---

[1] *Ф. Энгельс.* Диалектика природы. М., 1969, стр. 7—8.
[2] Там же, стр. 8.
[3] *Leonardo da Vinci.* Quaderni d'anatomia. Ed. O. C. L. Vangensteen, A. Fonahn, H. Hopstock. Christiania, v. 2, 1912, p. 20.

Лука Пачоли

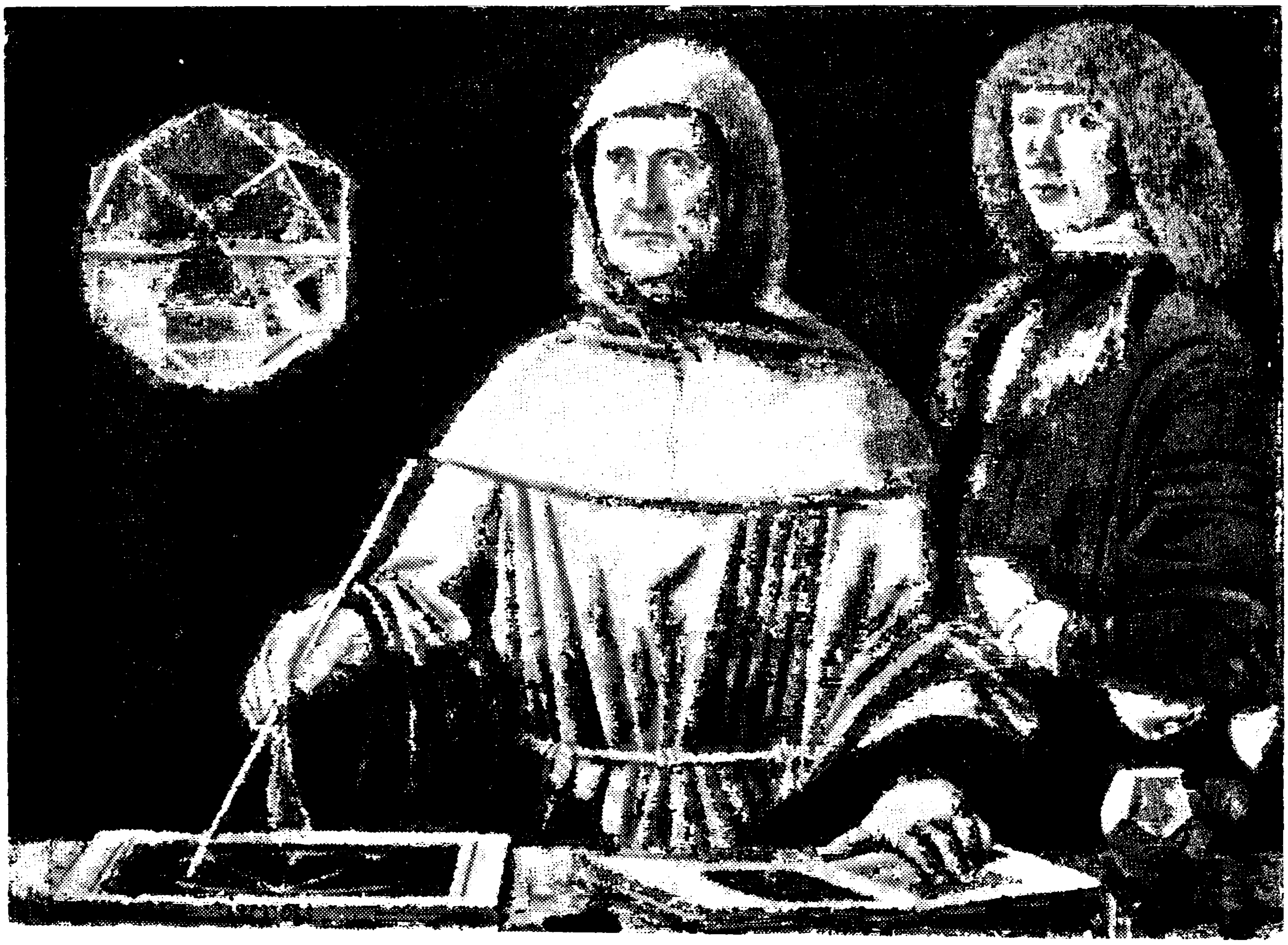
Наибольших успехов математики Европы XV—XVI вв. добились в области алгебры. Крупнейшим европейским алгебраистом XV в. был итальянец Лука Пачоли (ок. 1445 — ок. 1515), уроженец Борго Сан Сеполькро в центральной Италии, долгое время работавший домашним учителем в Венеции и Риме. Около 1475 г. он вступил во францисканский монашеский орден и с тех пор именовался братом Лукой из Борго Сан Сеполькро. Будучи ученым монахом-францисканцем, Лука Пачоли работал профессором математики в университетах и других учебных заведениях Рима, Неаполя, Милана, Флоренции, Болоньи и других городов. Еще в родном городе Пачоли испытал сильное влияние своего земляка Пьетро деи Франчески, нарисовавшего его известный портрет. В Милане Пачоли близко подружился с Леонардо да Винчи, по настоянию которого Пачоли написал книгу «О божественной пропорции» (De divina proportione, 1497, издано в Венеции в 1509 г.).

Основным трудом Пачоли была «Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, 1487), изданная в Венеции в 1494 г.

В арифметической части «Суммы» излагались различные приемы арифметических действий, в том числе индийский прием умножения с помощью решетки (см. стр. 184), именуемый здесь gelosia по названию решетчатых оконных ставен. Сын своего времени, Пачоли дает мистическое «объяснение» того, что совершенные числа оканчиваются лишь на 6 и 8 тем, что добрые и совершенные люди соблюдают установленный порядок. По самым разнообразным поводам Пачоли цитирует библию.

Алгебру Пачоли называет regula della cosa — «правилом вещи» и arte maggiore — «великим искусством». Он пользуется алгебраическими символами (алгебраическими буквами — caratteri algebraici), квадратный корень обозначает ℞ (radice — корень) или ℞ 2, кубический корень ℞ 3 или ℞ cuba, корень четвертой степени ℞ 4 или ℞℞. Свободный член в уравнениях Пачоли обозначает n^0 (numero — число), x — co (cosa — вещь), x^2 — ce (censo — квадрат, от латинского census, которым был переведен арабский термин «мал»), x^3 — cu (cubo), x^4 — ce. ce. (censo de censo), x^5 — p^0r^0 (primo relato — «первое relato»), x^6 — ce. cu. (censo de cubo), x^7 — 2^0r^0 (secondo relato —«второе relato»), x^8 — ce. ce. ce. (censo de censo, de censo), x^9 — cu. cu. (cubo de cubo), x^{10} — ce. p^0r^0 (censo de primo relato), $x^{11} = 3^0r^0$ (tersio relato — «третье relato») и т. д. [1] Система названий степеней у Пачоли была мультипликативной ($x^6 = x^{2\cdot 3}$, $x^8 = x^{2\cdot 2\cdot 2}$, $x^9 = x^{3\cdot 3}$, ...). Названия простых степеней, которые нельзя выразить в виде произведений 2 и 3, у Пачоли состоят из номера простой степени и слова relato. Аналогичные названия мы встречали у византийца Михаила Пселла (XI в.), называвшего x^5 «первым невыразимым», а x^7 — «вторым невыразимым», что указывало на невыразимость чисел 5 и 7 в виде произведений 2 и 3. Возможно, что relato — искаженный перевод на латынь термина Пселла ἄλογος: переписчик мог, не поняв греческого термина, прочесть его ὁλογος — «отношение» и перевести латинским словом relatum, соответствующим итальянскому relato. Этот принцип у

[1] См. *Luca Paccioli.* Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Veneziae, 1494, л. 97 об.

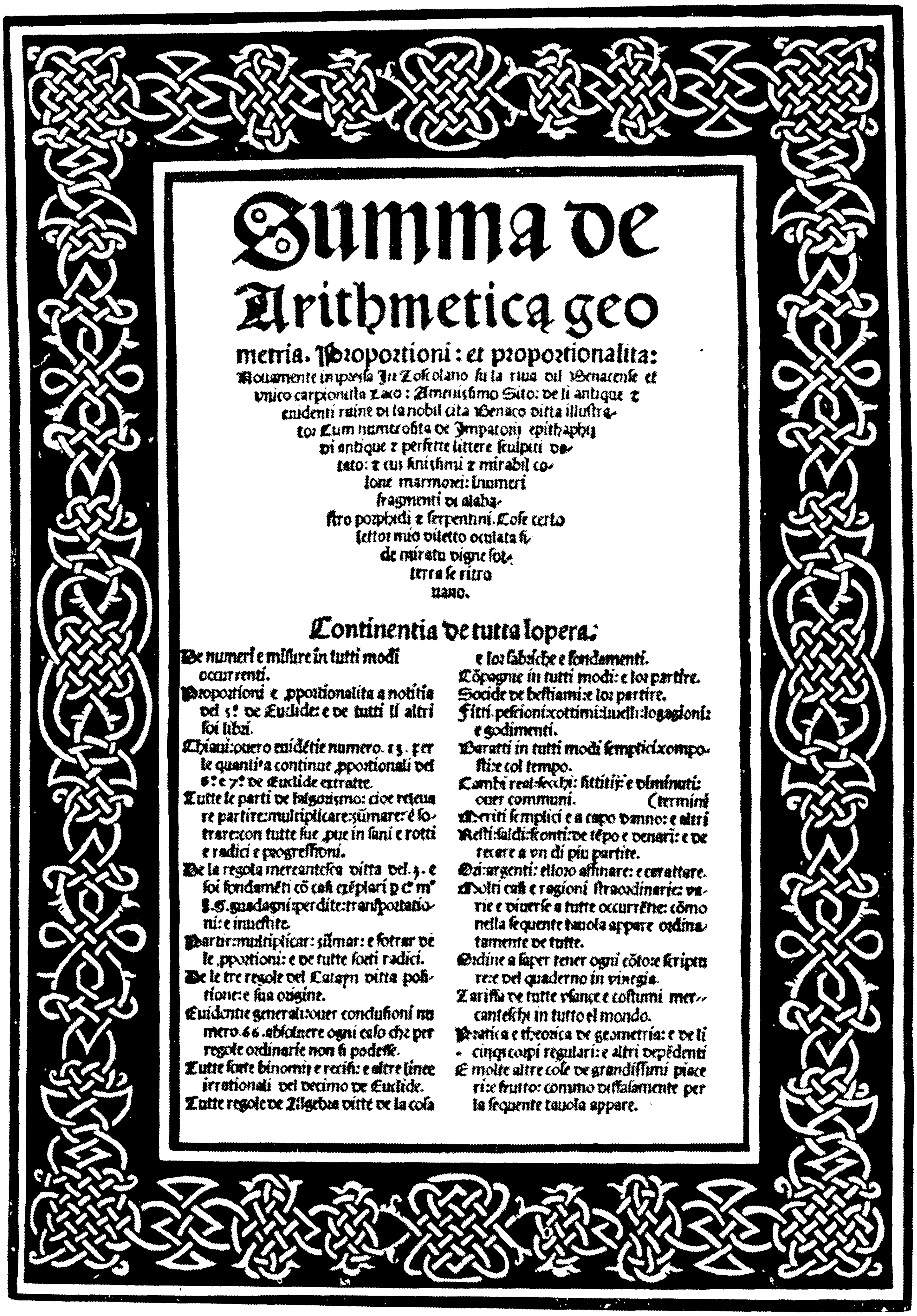


Лука Пачоли с молодым герцогом Урбино.
Картина Якопо де Барбари (Неаполь, Национальный музей)

Пачоли выдержан не вполне последовательно: называя x^{13}, x^{17}, x^{19} и x^{23} соответственно четвертым, пятым, шестым, седьмым relato, он называет x^{25} не p^0r^0 de p^0r^0, а восьмым relato и x^{29} — девятым relato.

Второе неизвестное (наш y) Пачоли называл quantita (количество) и обозначал qp^0, y^2 — се. de qp^0 и т. д. Сложение обозначалось знаком $\tilde{p}$ (plus или piú — «больше», откуда наше слово «плюс»), вычитание — знаком $\tilde{m}$ (minus, или meno — «меньше», откуда наш «минус»). Пачоли употребляет и выражения типа «$\tilde{m}^4$ меньше нуля» и формулирует правило знаков при умножении чисел, перед которыми стоят знаки $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$. На трактовку Пачоли отрицательных чисел, по-видимому, оказало влияние то, что он был изобретателем двойной бухгалтерии, в которой все денежные операции записываются в столбцах «кредита» (дохода) и «дебета» (долга); теория бухгалтерии изложена Пачоли в той же «Сумме». Задачи, решаемые в «Сумме», не выходят за пределы задач, решавшихся в «Книге абака» Леонардо Пизанского, за «Практической геометрией» которого следует и геометрическая часть «Суммы».

Книга «О божественной пропорции» названная так по «золотому сечению», была посвящена зодчеству (по Витрувию), пяти правильным многогранникам, равно как и многогранникам, получаемым из них путем «отсечения» и «насадки» (срезов вершин в виде правильных пирамид или построений их на гранях), а также пропорциям человеческого тела, выражаемым в целых числах, меньших 10. «Золотое сечение» и правильные многогранники излагались Пачоли по так называемой XIV книге


Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita:

Nouamente impressa In Toscolano su la riua dil Benacense et unico carpionista Laco: Amenissimo Sito: de li antique e euidenti ruine di la nobil cita Benaco ditta illustrato: Cum numerosita de Imperatorii epithaphii di antique e perfette littere sculpiti dotato: e cum finissimi e mirabil colone marmorei: inumeri fragmenti di alabastro porphidi e serpentini. Cose certo lettor mio diletto oculata fide miratu digne sotterra se ritrouano.

Continentia de tutta lopera:

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.

Proportioni e proportionalita a notitia del 5° de Euclide: e de tutti li altri soi libri.

Chiaui: ouero euidentie numero. 13. per le quantita continue proportionali del 6° e 7° de Euclide extratte.

Tutte le parti de lalgorismo: cioe releuare partire: multiplicare: summare: e sottrare: con tutte sue proue in sani e rotti e radici e progressioni.

De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fondamenti cō casi exemplari p c° m° \& \&. guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.

Partir: multiplicar: summar: e sotrar de le proportioni: e de tutte sorti radici.

De le tre regole del Catayn ditta positione: e sua origine.

Euidentie generali: ouer conclusioni numero. 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie non si podesse.

Tutte sorte binomii e recisi: e altre linee irrationali del decimo de Euclide.

Tutte regole de Algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.

Cōpagnie in tutti modi: e lor partire.

Socide de bestiami: e lor partire.

Fitti: pesioni: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.

Baratti in tutti modi semplici: e composti: e col tempo.

Cambi reali: secchi: fittitii: e diminuti: ouer communi.

Termini: Meriti semplici e a capo danno: e altri Resti: saldi: sconti: de tēpo e denari: e de recare a vn di piu partite.

Ori: argenti: e loro affinare: e carattare.

Molti casi e ragioni straordinarie: varie e diuerse a tutte occurrentie: cōmo nella sequente tauola appare ordinatamente de tutte.

Ordine a saper tener ogni cōto: e scripture: e del quaderno in vinegia.

Tariffa de tutte vsançe e costumi mercanteschi in tutto el mondo.

Pratica e theorica de geometria: e de li cinque corpi regulari: e altri depēdenti

E molte altre cose de grandissimi piaceri: e frutto: commo diffusamente per la sequente tauola appare.

Титульный лист первого издания «Суммы» Луки Пачоли (1494)

«Начал» Евклида (на самом деле Гипсикла). Изображение многогранников на 59 таблицах сделал для своего друга Леонардо да Винчи, для которого Пачоли, в свою очередь, подсчитал количество металла, необходимого для статуи всадника.

Никола Шюке

Во Франции оригинальный вклад в алгебру был сделан бакалавром медицины Никола Шюке (ум. ок. 1500), уроженцем Парижа, работавшим в Лионе, крупном торговом центре, где имелась большая итальянская колония. Последнее обстоятельство не осталось без влияния на законченный в 1484 г. рукописный труд Шюке «Наука о числах в трех частях» (Le triparty en la science des nombres). Это сочинение, написанное по-французски, содержит правила вычислений с рациональными числами, затем с иррациональными корнями и, наконец, учение об уравнениях. В нем по аналогии с итальянским термином millione (буквально «большая тысяча»), применявшимся, по-видимому, впервые известным путешественником Марко Поло (1254—1323) для описания богатств стран Востока, вводятся дальнейшие термины «биллион», «триллион» и т. д. до «нониллиона».

Заслуживает упоминания сопоставление Шюке арифметической и геометрической прогрессий

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

и

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n$$

Написав их друг под другом, он отмечает, что произведению двух членов нижней прогрессии соответствует сумма стоящих над ними членов верхней. Здесь налицо предвосхищение свойств будущих логарифмов. Так же как и Пачоли, Шюке приводит правила действий с отрицательными числами и пользуется для сложения и вычитания знаками $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$. Знак $\tilde{m}$ служит и для обозначения отрицательных чисел, которые Шюке называет ung moins, т. е. «менее». Отрицательные числа применяются уже в первой части книги, при решении задач на тройное правило и правила ложных положений. Еще более важные приложения они нашли, как мы скоро увидим, в алгебре.

В качестве своего собственного оригинального открытия Шюке приводит «правило средних чисел». Утверждая (без доказательства), что $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ лежит между $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$, он применяет эту среднюю при решении задач методом двойного ложного положения, получая, например, для уравнения $x^2+x=39\frac{13}{81}$ при $x_1=\frac{5}{1}$, $x_2=\frac{6}{1}$ (причем $x_1<x<x_2$), $x_3=\frac{11}{2}$, $x_4=\frac{17}{3}$, $x_5=\frac{23}{4}$, $x_6=\frac{29}{5}$ и, наконец, $x_7=\frac{52}{9}$, оказывающиеся точным значением. Выгода этой средней состоит в том, что знаменатель возрастает медленно, однако вычисление в целом, понятно, довольно кропотливо. Обозначая корни соответственно $R_x^2\ R_x^3$ и т. д., Шюке делает замечание, что «ради сохранения порядка» можно было бы считать само данное число корнем первой степени из этого же числа, обозначив его R_x^1.

Вместо скобок он применяет подчеркивание, записывая, например, наше $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ как $\underline{R_x\ .14.\tilde{p}R_x\ .180.}$

Вместо прежнего названия неизвестной «вещь» Шюке вводит термин premier, т. е. «первое», или же еще, трактуя неизвестную геометрически, nombre linear — «линейное число». Так же вводятся вторые, третьи, четвертые числа, соответствующие степеням неизвестной. Для обозначения степеней неизвестной сверху справа от коэффициента пишется маленький показатель степени. Нашим $12\,x$, $12\,x^2$, $12\,x^3$ у Шюке соответствуют 12^1, 12^2, 12^3. В соответствии с этим свободный член уравнения, например 12, он записывает как 12^0, говоря, что такие числа «имеют имя нуль». Таким же образом он пишет, что «8^3, умноженное на $7^{1\cdot\tilde{m}}$, дает 56^2» вместо нашего $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56\,x^2$, смело вводя не только нулевой, но и отрицательный показатели. Возможно, что Шюке находился под влиянием работы Орема, хотя и не использовал его дробных показателей. Столь широкое применение символики, несмотря на отсутствие знаков умножения, деления и равенства, а также самой неизвестной, сближает алгебраические записи преобразования Шюке с нашими современными.

Коссисты

«Алгебраические буквы», которыми Пачоли обозначал неизвестную и ее степени и которыми с незначительными видоизменениями пользовались итальянские алгебраисты XVI в., были важным шагом на пути создания алгебраической символики. Следующий шаг был сделан немецкими алгебраистами XVI в., известными под названием «коссистов». Это название объясняется тем, что они именовали алгебру Coss — от итальянского слова cosa — вещь, обозначавшую неизвестную у итальянских алгебраистов.

Название «Regel Algebre oder Cosse» для алгебраических правил мы встречаем в арифметике Яна (Иоганна) Видмана (1460 — первая половина XVI в.), уроженца чешского города Хеба, преподававшего в Лейпцигском университете. Видман был первым, кто начал в университете чтение лекций по алгебре. Учебник Видмана «Быстрый и красивый счет для всего купечества» (Behende und hubsche Rechenung auf allen Kauffmannschaft) был напечатан в Лейпциге в 1489 г. и вскоре был еще несколько раз издан в различных немецких городах; эта книга знаменита тем, что здесь впервые появились знаки $+$ и $-$, заменившие знаки $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ итальянцев. Знак $+$, по-видимому, произошел от знака &, применяемого до настоящего времени в названиях торговых и промышленных компаний и, в свою очередь, происходящего от латинского союза et — «и». Наиболее знаменитыми коссистами были Адам Ризе (1489—1559), известный также под именем Gigas (латинский перевод слова Riese — великан, гигант), уроженец Франконии, написавший учебник «Coss» в 1524 г., и Кристоф Рудольф (1500 — середина XVI в.) из Яуэра (Явора) в Силезии, выпустивший в 1525 г. в Страсбурге учебник под традиционным названием «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс» (Behend und hubsch Rechnung durch die Kunstreichen Regeln Algebre, so gemeincklich die Coss genennt werden).

Книга Ризе является сокращением сочинения, автор которого именуется Initius Algebras, что можно перевести «основоположник алгебры», но здесь Algebras — собственное имя, а сама алгебра именуется Gebra und Almuchabola, что представляет собой искажение арабского названия «ал-джабр ва-л-мукабала». В предисловии к рукописи говорится, что ее оригинал был написан по-арабски, переведен с арабского на греческий «Архимедом», с греческого на латынь «Апулеем» (переводчики эпохи Возрождения охотно называли себя именами классиков), а с латинского на немецкий — магистром Андреасом Александром. Указывается и итальянское название этой книги «De la cosa» («О вещи»). По-видимому, в основе текста этой рукописи лежала одна из арабских алгебр, которая попала в Германию через византийцев.

В первых косситских алгебрах применялся аддитивный принцип обозначения степеней: например, в хранящейся в Дрездене рукописи С.80 (ок. 1480), которой пользовался Ян Видман, степени обозначались с помощью сокращенных обозначений: $\mathfrak{r}$ — готическое r — res — вещь, т. е. x, $\mathfrak{z}$ — готическое z — Zensus — квадрат, т. е. x^2, $\mathfrak{C}$ — готическое c — cubus — куб, т. е. x^3,— следующим образом: $x^4 = \mathfrak{zz}$, $x^5 = \mathfrak{r}\mathfrak{zz}$, $x^6 = \mathfrak{zzz}$, $x^7 = \mathfrak{C}\mathfrak{zz}$, $x^8 = \mathfrak{zzzz}$, $x^9 = \mathfrak{r}\mathfrak{zzzz}$, $x^{10} = \mathfrak{zzzzz}$. Но уже в хранящейся в Вене рукописи 5277 (ок. 1500), которой пользовался Кристофор Рудольф, применяется мультипликативный принцип: $x^4 = \mathfrak{zz}$, $x^5 = alt$, $x^6 = \mathfrak{z} + c$.

В рукописях Initius Algebras и Ризе x называется Radix (корень) или Coβ (вещь) и сокращенно обозначается $\mathfrak{r}$ (т. е. r), x^2 — Zensus или Quadrat ($\mathfrak{z}$, т. е. z), x^3 — cubus ($\mathfrak{C}$, т. е. c), x^4 — Zensus de Zensu ($\mathfrak{zz}$), x^5 — Sursolidum (β, т. е. ss), x^6 — Zensicubus ($\mathfrak{z}\mathfrak{C}$), x^7 — βissursolidum (biβ), x^8 — Zensus Zensui de Zensu ($\mathfrak{zzz}$), x^9 — Cubus de Cubo ($\mathfrak{C}$). Дальнейшие степени в рукописи Initius Algebras обозначаются: $x^{10} = \mathfrak{z}\beta$, $x^{11} =$ ter β, $x^{12} = \mathfrak{zz}\mathfrak{C}x^{13} =$ quadrβ, $x^{14} = \mathfrak{z}$biβ, $x^{15} = \beta$, $x^{16} = \mathfrak{zzzz}$, $x^{17} =$ quintβ, $x^{18} = \mathfrak{z}\mathfrak{C}$.

Автор рукописи Initius Algebras объясняет названия x^5 и x^7 как сокращение слов surdum solidum (буквально—«глухое тело»); Ризе говорит: «Sursolidum — глухое число» (ist eine taube zal). Слова surdum и taube — латинский и немецкий эквиваленты арабского слова «асамм» — «немой, глухой», которым арабы переводили греческое ἄλογος — «невыразимый», «немой» (слово «асамм», как ἄλογος, применялось также для обозначения иррациональных корней), т. е. здесь, так же как у Пселла, имеется в виду невыразимость степеней x^5 и x^7 через вторую и третью степени. Слово solidum — «тело» указывает на то, что косситы рассматривали эти степени как обобщения кубов.

Свободный член косситы обозначали знаком $\emptyset$, произошедшим от буквы δ — первой буквы слова Dragma — искажения арабского слова «дирхам», которым обозначал свободный член ал-Хорезми. Знаки ϕ, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{zz}$, β, $\mathfrak{z}\mathfrak{C}$, biβ и т. д., которыми косситы обозначали свободный член и степени неизвестной, получили название «коссических знаков».

Терминология косситов получила широкое распространение не только в Германии, но и в других странах Европы. В частности, автор первой печатной «Арифметики» (1703) на русском языке Л. Ф. Магницкий (1669—1739) называет x^2 — «зензус», x^3 — «кубус», x^4 — «зензизенз», x^5 — «сурдесолидус», x^6 — «зензикубус», x^7 — «бисурдесолидус», x^8 — «зензизензензус» и т. д. Здесь же Магницкий приводит и «коссические знаки».

Решение уравнений третьей и четвертой степеней

Пачоли закончил раздел «Суммы» об алгебраических уравнениях замечанием о том, что для решения кубических уравнений $x^3 + ax = b$ и $x^3 + b = ax$ (коэффициенты a и b предполагаются положительными) «искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга» [1]. Эти слова Пачоли послужили отправным пунктом для работ итальянских алгебраистов по решению кубических уравнений в радикалах, открытие которого было первым крупным математическим достижением европейских ученых, существенно превзошедшим открытия математиков Востока.

Первым удалось решить в радикалах один из видов кубического уравнения $x^3 + ax = b$ $(a,\ b > 0)$ профессору Болонского университета Шипионе (Сципиону) дель Ферро (1456—1526). По обычаю того времени дель Ферро не опубликовал решения, а сообщил его своему ученику Фиор, который пользовался правилом решения, найденным дель Ферро, на математических турнирах.

На одном из таких турниров Фиор встретился с уроженцем Брешии Николо Тартальей (1500—1557), настоящая фамилия которого, по-видимому, была Фонтана. Он был прозван Тартальей потому, что во время взятия Брешии французами был тяжело ранен в гортань, в результате чего всю жизнь не смог свободно говорить (tartaglia — заика). Тарталья рос в бедности и учился без помощи учителя; позже сам преподавал математику в Вероне, Пьяченце, Венеции и Брешии.

Тарталья перед турниром, состоявшимся 12 февраля 1535 г., самостоятельно нашел правило дель Ферро и решил все задачи, предложенные Фиоре, который был настолько обескуражен, что не решил ни одной задачи, предложенной Тартальей. Через день после турнира Тарталья нашел и решение уравнения $x^3 = ax + b$. Эти открытия Тартальи были опубликованы в алгебраическом трактате Джироламо (Иеронима) Кардано (1501—1556) «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (Ars magna sive de regulis algebraicis, Norimbergae, 1545).

В 1539 г. Кардано, узнав об открытии Тартальи, выпросил у него формулировку решения, поклявшись его не публиковать. Тарталья сообщил свое правило в стихотворении из 25 строк, составленном им для лучшего запоминания. Восстановив по не вполне ясным формулировкам правило и доказав его, Кардано счел себя вправе поместить решение в своей книге, упомянув об авторстве Тартальи. Несмотря на это, за правилом закрепилось название «формула Кардано».

Кардано работал профессором в Милане, это был выдающийся ученый во многих областях науки. В своих философских трактатах он выступал за знания, основанные на опыте, а не на авторитете Аристотеля. Он был известен также как врач. Естественнонаучные работы Кардано сочетались с верой в пифагорейскую мистику чисел и другими суевериями; одно время он был придворным астрологом римского папы. Кардано был автором многих математических работ, крупнейшей из которых было «Великое искусство» — название алгебры, которое уже встречалось нам у Пачоли. Историю своих взаимоотношений с Кардано Тарталья расска-

---

[1] *L. Paccioli.* Summa, л. 150.

зал в «Разных вопросах и изобретениях» (Quesiti et inventioni diversi, Venetia, 1546); впрочем, в этом сочинении, посвященном главным образом баллистике, артиллерии, фортификации и другим вопросам военного искусства, Тарталья не изложил самой теории кубических уравнений. Вероятно, он предполагал сделать это в незавершенном «Общем трактате о числах и мерах» (General trattato di numeri et misure, Venetia, 1556—1560), в вышедших из печати частях которого изложены арифметика, многие вопросы геометрии и алгебра до квадратных уравнений.

Тарталья в «Общем трактате» пользовался обозначениями, близкими к обозначениям Пачоли: x = co, x^2 = ce, x^3 = cu, x^4 = ce ce, x^5 = pri. rel., x^6 = cecu, $x^7 = \overset{0}{2}$ rel. и т. д. до $x^{29} = \overset{0}{9}$ rel. (т. е., как и Пачоли, Тарталья называл x^{25} «восьмым relato»). Кардано в «Великом искусстве» пользовался латинской терминологией: x = pos (positio — «положение»), x^2 = qd$^{\text{tum}}$ (quadratum), x^3 = cub (cubus), x^5 = R$^{\text{m}}$P$^{\text{m}}$ (relatum primum), x^6 = cub $\tilde{\text{q}}$d$^{\text{ti}}$ (cubus quadrati) и т. д.

Уравнение $x^3 + ax = b$ решалось дель Ферро и Тартальей следующим образом: находились числа u и v, удовлетворяющие условиям $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (u и $-v$ являются корнями квадратного уравнения $y^2 - by - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 0$) и $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, т. е.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}.$$

Для решения уравнения $x^3 = ax + b$ Тарталья находил числа u и v, удовлетворяющие условиям $u + v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (т. е. корни уравнения $y^2 - by + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$), тогда

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v},$$

т. е.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}.$$

Об уравнении $x^3 + b = ax$ Тарталья в том же стихотворении сообщал, что его можно решить при помощи уравнения $x^3 = ax + b$. Связь между этими двумя уравнениями состоит в том, что положительные корни одного из них равны модулям отрицательных корней другого. В случае, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{3}\right)^3$, уравнение $x^3 = ax + b$ имеет один положительный корень и два мнимых, которые математики XVI в. не рассматривали. В случае, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, уравнение $x^3 = ax + b$ имеет один положительный корень и два отрицательных, и, следовательно, уравнение $x^3 + b = ax$ — два положительных корня и один отрицательный. Этот случай Кардано назвал «неприводимым», так как действительное значение x при этом является

Никколо Тарталья.
Гравюра из книги *N. Tartaglia*. Regola generale de sulevare con ragione e misure. Venezia, 1551

суммой двух мнимых выражений, и считал неразрешимым. Заметим, что в обозначениях Кардано выражение

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

в примере решения кубического уравнения по «формуле Кардано» имело вид

℞. v. cu. ℞. 108p̃10 | m̃℞. v. cu. ℞. 108m̃10.

Полные кубические уравнения сводились к уравнениям указанного вида при помощи подстановки. Например, Кардано решал уравнение $x^3 + bx = ax^2 + c$, сводя его к решенным ранее видам уравнений при помощи подстановки $x = y + \frac{a}{3}$.

В «Великом искусстве» Кардано был изложен также открытый его учеником Луиджи Феррари (1522—1565) метод решения уравнения четвертой степени. Этот метод непосредственно применяется к уравнениям вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (Кардано, пользовавшийся только положительными коэффициентами, записывал члены по обе стороны от знака равенства). Уравнение четвертой степени общего вида можно привести

Джироламо Кардано

к этому виду подстановкой $x = y + p$. Феррари заметил, что

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4},$$

и добавил к обеим частям $2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2$. Слева получился полный квадрат $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2$, а правая часть

$$2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right)$$

является полным квадратом в том случае, когда

$$b^2 = 2t\,(4t^2 + 4at + a^2 - 4c).$$

Решив это кубическое уравнение и найдя один из его корней, Феррари извлекал квадратные корни из обоих полных квадратов и получил квадратные уравнения

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right),$$

корни которых являются корнями данного уравнения.

Решение уравнений третьей и четвертой степеней в радикалах имело огромное значение для прогресса алгебры, да и всей математики. Само по себе с точки зрения вычисления значений корней их представление с помощью радикалов не имело преимуществ перед другими приемами приближенного решения уравнений. Здесь важны были новые, глубокие теоретические вопросы, возникавшие перед наукой, и прежде всего общая проблема решения в радикалах уравнений высших степеней — проблема, во многом определившая развитие алгебры на протяжении следующих столетий и создание сначала теоретико-групповых методов исследования, а затем и самой теории групп.

Ближайшим продолжением работ Тартальи, Кардано и Феррари явилось более детальное рассмотрение неприводимого случая кубического уравнения, когда оба кубических радикала содержат квадратные корни из отрицательных чисел, между тем как корни уравнения действительны. Разъяснение этого удивительного обстоятельства с помощью свойств мнимых чисел вскоре дал Р. Бомбелли.

Мнимые величины

Мы впервые встречаемся с новым математическим объектом — мнимыми величинами в «Великом искусстве» Кардано. Кардано вводит эти величины при решении задачи деления 10 на две такие части, произведение которых равно 30 или 40 (максимальное произведение вещественных частей 10 равно 25). Кардано пишет: «Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые при перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, как я объяснил тебе в главе о действиях в IV книге; тогда останется $\tilde{m}$: 15; если взять от этого ℞ и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут 5 $\tilde{p}$: ℞$\tilde{m}$: 15 и 5$\tilde{m}$: ℞$\tilde{m}$: 15 [1]. В современных обозначениях решения Кардано имеют вид $5 \pm \sqrt{-15}$, т. е. $5 \pm i\sqrt{15}$.

Кардано называл мнимые величины «чисто отрицательными» и «софистически отрицательными». Он считал их бесполезными и стремился не применять их.

Первым математиком, оценившим пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения в «неприводимом» случае, был работавший в Болонье инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли (ок. 1526—1573), автор «Алгебры» (L'Algebra), составленной около 1560 г. и изданной в 1572 г. В первой книге этого труда, рассматривая кубические уравнения $x^3 = px + q$ в том случае, когда $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$, Бомбелли пишет, что разность $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ по извлечении квадратного корня «не может быть названа ни плюсом (più), ни минусом (meno); поэтому я буду называть ее плюсом минуса (più di meno), когда она должна прибавляться, а в тех случаях, когда она должна отниматься, я буду называть ее минусом минуса (meno di meno)... корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение, такого же мнения

[1] *H. Cardanus.* Ars magna, sive di Regulis algebricis. Basileae, 1570, л. 65 об.

держался и я до тех пор, пока не нашел доказательства на линиях»[1]. Таким образом, у Бомбелли più du meno R. q.5 означает $\sqrt{-5}$, а meno di meno R.q 3 означает $-\sqrt{-3}$. Итальянское più (от латинского plus) значит больше, а meno (от minus) — меньше. Э. Бортолотти полагал, что терминология Бомбелли возникла из сокращения più radice di meno (плюс корень из минуса) и meno radice di meno (минус корень из минуса), но вполне возможно, что эта терминология была просто специально придумана.

Вслед за тем Бомбелли сообщает восемь правил умножения мнимых и действительных чисел, закладывая тем самым первый камень фундамента теории комплексных чисел. В наших обозначениях:

$$(\pm 1)\,i = \pm i, \qquad (+i)(+i) = -1, \qquad (-i)(+i) = +1,$$
$$(\pm 1)(-i) = \mp i, \qquad (+i)(-i) = +1, \qquad (-i)(-i) = -1.$$

Других общих правил операций Бомбелли не приводит, но решает ряд примеров на сложение, умножение и деление вроде $8i + (-5i) = +3i$,

$$\sqrt[3]{3 + i\sqrt{10}}\,\sqrt[3]{3 - i\sqrt{10}} = \sqrt[3]{19}$$

и другие, более сложные.

Во второй книге «Алгебры» Бомбелли исследует неприводимый случай, опираясь на обнаруженную им сопряженность кубических корней из двух сопряженных комплексных чисел. Рассуждения Бомбелли можно передать следующим образом. Запишем корень уравнения

$$x^3 = px + q, \quad \text{где} \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0, \tag{1}$$

в форме

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-b}}.$$

Если положить $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{-b}} = u \pm \sqrt{-v}$, то возведение в куб и перемножение сопряженных величин дают уравнения

$$u^3 = 3uv + a, \qquad u^2 + v = \sqrt[3]{a^2 + b},$$

после чего для определения u получается уравнение

$$4u^3 = 3cu + a, \tag{2}$$

где

$$c = \sqrt[3]{a^2 + b},$$

которое имеет действительный корень u. Тем самым Бомбелли объяснил, как уравнение (1) может в неприводимом случае иметь действительный корень

$$x = u + \sqrt{-v} + u - \sqrt{-v} = 2u,$$

хотя он выражается через кубические корни из мнимых величин. Однако общего решения задачи он не получил, ибо для определения u пришел

[1] *R. Bombelli.* L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica. Bologna, 1572, p. 169.

опять к неприводимому случаю: уравнение (2) по существу совпадает с исходным уравнением (1), в котором $x = 2u$ (в самом деле, как легко убедиться, $a = \frac{q}{2}$ и $c = \frac{p}{3}$. Очевидно, что обойти неприводимый случай на этом пути нельзя. Все же Бомбелли смог решить путем проб отдельные числовые примеры. Так, для уравнения

$$x^3 = 15x + 4$$

корень которого выражается по правилу Тартальи в виде

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

уравнение (2) есть

$$4u^3 = 15u + 2$$

и подбор сразу дает $u=2$, так что $v=1$. Таким образом, $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$ и $x = 4$. В общей форме проблема извлечения корней из комплексных чисел была решена А. де Муавром в первые десятилетия XVIII в.

Что касается приводимых Бомбелли геометрических пояснений «на линиях», то в них нет ничего общего с геометрическим истолкованием комплексных чисел.

К неприводимому случаю кубического уравнения мы еще обратимся далее (стр. 311).

Бомбелли внес некоторые усовершенствования в алгебраическую символику; для обозначения неизвестной величины он надписывал над ее числовым коэффициентом показатель степени, стоящий над небольшой дугой. Например, уравнение

$$8 = 4x^2 + 4x$$

он записывал в виде

$$8 \text{ eguale } \acute{a}\ \overset{2}{4} \cdot p \cdot \overset{1}{4};$$

здесь итальянское слово eguale значит «равно», а p — есть сокращение слова più. Эти обозначения Бомбелли, несколько сходные с обозначениями степеней у Шюке, оказали влияние на алгебраическую символику С. Стевина.

Бомбелли был последним в блестящей плеяде итальянских алгебраистов XVI в.

Михаэль Штифель

Крупнейшим из коссистов был уроженец Вюртемберга Михаэль Штифель (1486—1567). В молодости монах-августинец, Штифель, примкнул к реформации, возглавляемой принадлежавшим к тому же ордену Лютером, и стал протестантским пастором. Вначале Штифель занимался мистическими изысканиями по поводу чисел, встречающихся в священных книгах, и «вычислил», что 19 октября 1533 г. будет конец мира. После того как предсказанный им конец мира не состоялся, Штифель, видимо желая найти причину своей ошибки, занялся математикой всерьез и вскоре сделался одним из крупнейших ученых своего времени. Штифель написал на латинском языке «Полную арифметику» (Arithmetica integra, Norimbergi, 1544) и на немецком языке «Немецкую арифметику» (Deutsche Arithmetik, Nürnberg, 1545) и «Алгебру Кристофа Рудольфа с прекрасными примерами алгебры, улучшенную и весьма увеличенную Михаэлем Штифелем» (Die Coss Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Coss, durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsperg im Preussen, 1553); последняя книга представляла собой переработку учебника Рудольфа, добавления к которому превосходили оригинальный текст.

В «Полной арифметике» Штифель называл x^5 не Sursolidum, a surdesolidum, x^7 — не Bissursolidum, a bissurdesolidum и обозначал $b\beta$, далее он обозначал $x^{11} = c\beta$, $x^{13} = d\beta$, $x^{17} = e\beta$ и т. д. (приведенное нами название Магницкого для x^5 восходит к этому названию Штифеля). В дополнениях к «Алгебре» Рудольфа Штифель называл x^7 Bsursolidum и обозначал $B\beta$ и далее обозначал $x^{11} = C\beta$, $x^{13} = D\beta$, $x^{17} = E\beta$, $x^{19} = F\beta$, $x^{23} = G\beta$.

Размышляя по поводу термина Sursolidum и других терминов коссистов, Штифель пришел к идее многомерного обобщения куба. Определив геометрическую прогрессию 1, a, a^2, a^3, ..., Штифель говорит: «Такие прогрессии называются по истинным геометрическим прогрессиям в собственном смысле слова, в которых первой воображается точка как начало линий. Вторым проводится линия (длинная или короткая). Третьим [строится] плоская квадратная фигура, называемая по мере проведенной линии по длине и ширине. Четвертым следует куб, для которого проведенная линия является кубическим корнем или мерой по всем трем его измерениям — длине, ширине и толщине. А дальше геометрическая прогрессия не переходит к другим большим измерениям. Поэтому всякую геометрическую прогрессию переводят в арифметику: единица для точки, первое число — для линии, второе число — для квадратной плоской фигуры и третье число — для кубического тела. Если в арифметике мы видим, что нам разрешается сочинять многие вещи, даже если они совсем не имеют формы, в геометрии не разрешается предположить телесные линии и поверхности (cörperliche linien und superficies) и выйти за пределы куба, как если бы было больше, чем три измерения (über den cubum hinauss faren gleych als weren mehr denn drey dimensiones), так как это было бы противоестественно. В этом случае геометрическая прогрессия шла бы дальше и дальше без всякой цели и конца, куб полагался бы за телесную точку, за которой полагали бы телесную линию, за ней — телесную поверхность, а за ней полагали бы куб, за которыми шли бы дальше, как сейчас указано, но не останавливаясь. Но следовало бы сделать здесь доброе снисхождение из-за красивого и чудесного применения алгебры» [1].

Понимая линию как след движущейся точки, Штифель называет куб телесной точкой, а под телесной линией и поверхностью он понимал результат движения трехмерного куба в одном или двух направлениях, перпендикулярных всем измерениям куба. В другом месте, обобщая понятие телесной линии, Штифель определяет «коссическую линию» как след движущейся величины любой размерности. Он иллюстрирует это следом движущейся линии ac: если эта линия движется вдоль линии ab, то прямоугольник $abcd$ — «коссическая линия».

---

[1] Die Coss Christoff Rudolffs mit schönem Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Königsperg im Preussen, 1553, л. 9—9 об.

Формула бинома

В рукописи «Initius Algebras» приводятся словесные формулировки формул «бинома Ньютона» $(a+b)^n$ при $n=3, 4, \ldots, 9$, причем при $n=3$ дается геометрическая интерпретация с помощью разложения куба на два куба a^3 и b^3 и шесть параллелепипедов a^2b и ab^2 (рис. 75). Биномиальные коэффициенты здесь вычисляются очень наглядным способом, путем возведения в степени числа 10001 в виде таблицы:

1000900360084012601260084003600090001

1000800280056007000560028000080001

1000700210035003500210007000 1

100060015002000150006000 1

1000500100010000500 01

1000400060004000 1

1000300030001

100020001

10001

Возможно, что правила «бинома Ньютона», содержащиеся в рукописи Initius Algebras, имелись еще в ее арабском прототипе, так как общие правила возведения бинома в любую степень встречались в арифметических трактатах ат-Туси и ал-Каши.

В печати таблица биномиальных коэффициентов появилась впервые в «Новом и хорошо обоснованном наставлении по арифметике для всех купцов» (Eyn Newe Vund wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanns Rechnung, Ingolstadt, 1527) Петра Апиана (Петер Биневиц, 1495—1552); геометрическая интерпретация формулы $(a+b)^3$ имеется и в «Алгебре» Рудольфа.

В «Полной арифметике» Штифеля приведена словесная формулировка формулы бинома для любого натурального показателя и таблица биномиальных коэффициентов в виде таблицы, в которой каждый элемент образуется как сумма элементов предыдущей строки, стоящих над ним и слева от него:

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
.	.	.	.				
.	.	.	.				
.	.	.	.				
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

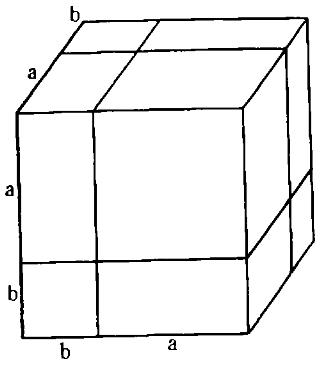


Рис. 75

В обработке «Алгебры» Рудольфа Штифель применил введенные им многомерные обобщения куба для иллюстрации формулы бинома при $n > 3$. Приведя иллюстрацию Рудольфа для $n = 3$ («куб Кристофа»), Штифель пишет: «Так же как квадратные биномы разлагаются на 4 части, а кубические — на 8 частей, квадрато-квадратные биномы (die Binomia zensizensica) разлагаются на 16 частей, а сверхтелесные (die sursolida) — на 32 части и подобно этому идет по двукратной прогрессии» [1].

Тарталья в своем «Общем трактате о числе и мере» придал таблице биномиальных коэффициентов следующий вид:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Здесь каждое число является суммой чисел, стоящих перед ним и над ним, а коэффициенты различных степеней бинома расположены по диагоналям, соединяющим числа первого столбца с числами первой строки, имеющими тот же порядковый номер.

Десятичные дроби и алгебраические обозначения Стевина

В средневековой Европе, как и в странах ислама, широко применялись шестидесятиричные дроби. Мы уже упоминали о приближенном решении кубического уравнения, найденном Леонардо Пизанским в шестидесятиричных дробях. Глава о шестидесятиричных дробях имеется в «Арифметике» Магницкого под названием «Арифметика — логистика или астро-

[1] Die Coss Christoffs Rudolffs, л. 482 об.

номская». Заметим, что Магницкий наряду с градусами, минутами и секундами определяет также целые степени 60: «первую сексагену» (от латинского Sexaginta — 60), равную 60 градусам, «вторую сексагену», равную 60 первым, и т. д.,— аналогичные «поднятому», «второму поднятому» и т. д. у математиков стран ислама.

Особенно широко применялись шестидесятиричные дроби в астрономических вычислениях и таблицах, поэтому-то нередко они назывались астрономическими; иногда их называли также физическими или философскими. Некоторые ученые, например Оронс Фине или в латинизированной форме Финеус (1494—1555), первый профессор математики в основанном около 1530 г. и впоследствии столь знаменитом парижском Коллеж де Франс, распространяли шестидесятиричный счет на целые числа, однако в Европе, в отличие от стран ислама, эти попытки почти не имели успеха. Напротив, десятичный счет получал постепенно все более широкое распространение и в астрономических выкладках. Воспитанник и лектор Венского университета Георг Пейербах (1423—1461) в своих неопубликованных таблицах синусов соединил шестидесятиричный и десятичный принципы: он выразил значения синусов в целых десятичных числах при радиусе круга, равном $60 \cdot 10^4$. Примеру Пейербаха последовал сначала его ученик Иоганн Мюллер (Региомонтан), о котором будет подробнее сказано далее, причем взял радиус равным $60 \cdot 10^5$. Но затем Региомонтан отказался от шестидесятиричности и в 1467 г. составил первые чисто десятичные тригонометрические таблицы — таблицы тангенсов при радиусе 10^5, посмертно изданные в Аугсбурге в 1490 г. Правда, при этом, как и в различных других таблицах той поры, значения тригонометрических величин выражались в целых числах, но отсюда уже было недалеко до десятичных дробей. Такие дроби применяются в «Математическом каноне» (Canon mathematicus) французского математика XVI в. Ф. Виета, опубликованном в Париже в 1579 г. (стр. 308).

В этом сочинении, представляющем собой собрание таблиц синусов, тангенсов и секансов вместе с изложением плоской и сферической тригонометрии, Виет решительно выступил в пользу употребления, как он выражался, тысячных и тысяч, сотых и сотен, десятых и десятков и т. д. взамен шестидесятиричной системы целых и дробей. При записи десятичных дробей Виет не придерживался какого-либо одного обозначения. Нередко он пишет как числитель, так и знаменатель, иногда отделяет цифры целой части от дробной вертикальной чертой (скажем, синус 60° при $r = 100\,000$ есть 86,602| 540,37), или же цифры целой части изображает жирным шрифтом (длина полуокружности при том же радиусе есть **314**,159,265,36, или, наконец, цифры дробной части дает более мелким шрифтом и подчеркивает (сторона вписанного квадрата при том же радиусе есть 141,421,$\underline{\text{356,24}}$).

Значение систематических дробей, представляющих собой суммы последовательных степеней одного и того же основания, подчеркивалось в математической литературе неоднократно, начиная по крайней мере с арифметики Иоанна Севильского. В анонимном «Алгоризме дробей» (Algorismus de minutiis) XVI в. при этом указывается, что вместо основания 60 можно взять и другое, скажем 12 или 10. Во второй половине того же века систему десятичных дробей описал Иммануил Бонфис из Тараскона, один из представителей процветавшей тогда в Южной Франции школы еврейских астрономов и математиков. В трактате «Путь деления», написанном на древнееврейском языке, Бонфис строит систему дробей,

Симон Стевин

в которой 1 = 10 примам, 1 прима = 10 секундам, 1 секунда = 10 терцеям и т. д., и кратко объясняет правила основных операций. Это сочинении не получило, по-видимому, известности у современников; оно было обнаружено около 30 лет тому назад.

Широкое распространение десятичных дробей в Европе началось только после выхода в свет «Десятой» (De Thiende, La Disme) фламандского математика Симона Стевина (1548—1620). Стевин, уроженец Брюгге, вначале был купцом, затем во время Нидерландской революции инженером в войсках возглавлявшего республику Морица Оранского. В 1585 г. в книге «Десятая» (стр. 305), определив десятичные дроби, он с большим пылом агитирует как за повсеместное введение десятичных дробей, так и за введение десятичной системы мер и монет. В том же году Стевин выпускает в Лейдене «Арифметику» (L'arithmétique), где излагает не только арифметику, но и алгебру. Стевин обозначает целые знаком 0, десятые — знаком 1, сотые — знаком 2 и т. д., причем цифры 0, 1, 2, ... стоят над значащими цифрами или после них в кружках. Например, 5,912 Стевин обозначал

$$\overset{0}{5}\;\overset{1}{9}\;\overset{2}{1}\;\overset{3}{2}$$

или 5 ⓪ 9 ① 1 ② 2 ③

Те же обозначения ⓪,①②,③,..., Стевин применяет и для степеней неизвестных. Эти символы (Стевин называл их «характерами» — charactеres) похожи на применявшиеся Бомбелли, но коэффициенты Стевин помещал слева от «характера», а не под ним, как итальянский ученый. Знак ⊙ служил для выражения произвольного данного числа, в частности свободного члена уравнений.

Важный шаг вперед в сравнении с символикой Бомбелли заключался во введении знаков степеней нескольких неизвестных. Для этого Стевин ставил перед своими символами сокращения sec. (secunda — вторая) или ter. (tertia — третья). Выражение $\frac{5x^2z^3}{y}$, например, у него имеет вид 5 ②D sec.①M ter ③, здесь D и M—сокращения слов «делить» (dividere) и «умножать» (multiplicare). Те же символы Стевин употребляет для извлечения корней, причем в двух формах. Так, кубический радикал изображается то $\sqrt{}$③, то ($\frac{1}{3}$). Для произвольного коэффициента у Стевина еще не было знака, и, скажем уравнение $ay = xy + bx^2$ он записывал так: «несколько sec. ① равны 1① M sec.①+несколько ②», причем коэффициент при y называл то «числом sec. ①», то «числом множества sec.①» [1]. Громоздкая символика Стевина нашла мало сторонников. Еще при его жизни Ф. Виет ввел специальные знаки для произвольных коэффициентов алгебраических выражений.

Иррациональные числа

Европейские математики Средних веков и эпохи Возрождения вслед за математиками стран ислама широко пользовались арифметическими действиями над квадратными корнями из чисел, а также из выражений, содержащих квадратные корни, и применяли к этим выражениям термины X книги «Начал» Евклида «биномиали», «вычеты», «медиали», «бимедиали» и т. д. Большинство используемых нами терминов этого вида являются латинскими, восходящими именно к этим терминам математиков средневековой Европы. Мы находим их уже у Леонардо Пизанского, который дополнил терминологию Евклида «триномиалью», обозначающую сумму трех квадратных корней. Арифметические действия с квадратичными иррациональностями мы встречаем и в «Сумме» Луки Пачоли, и в «Общем трактате» Тартальи, и в сочинениях Кардано. Исключительно подробно на этой теории останавливаются Кристоф Рудольф в «Алгебре» и Михаэль Штифель в своих дополнениях к ней: эта теория занимает почти половину книги Рудольфа и Штифеля, столько же занимает эта теория в «Полной арифметике» Штифеля.

Однако итальянские и немецкие математики XV—XVI вв., которые, по существу, обращались с иррациональностями как с числами, все же не решались порвать с традициями, исключающими их из области настоящих чисел. Радикально противоположную позицию занял Симон Стевин. В «Арифметике» он определил число как «что, с помощью чего выражается количество всякой вещи» [2], и полагал, «что число является непрерывным количеством, и что, в частности, единица делима». Там же он остроумно

---

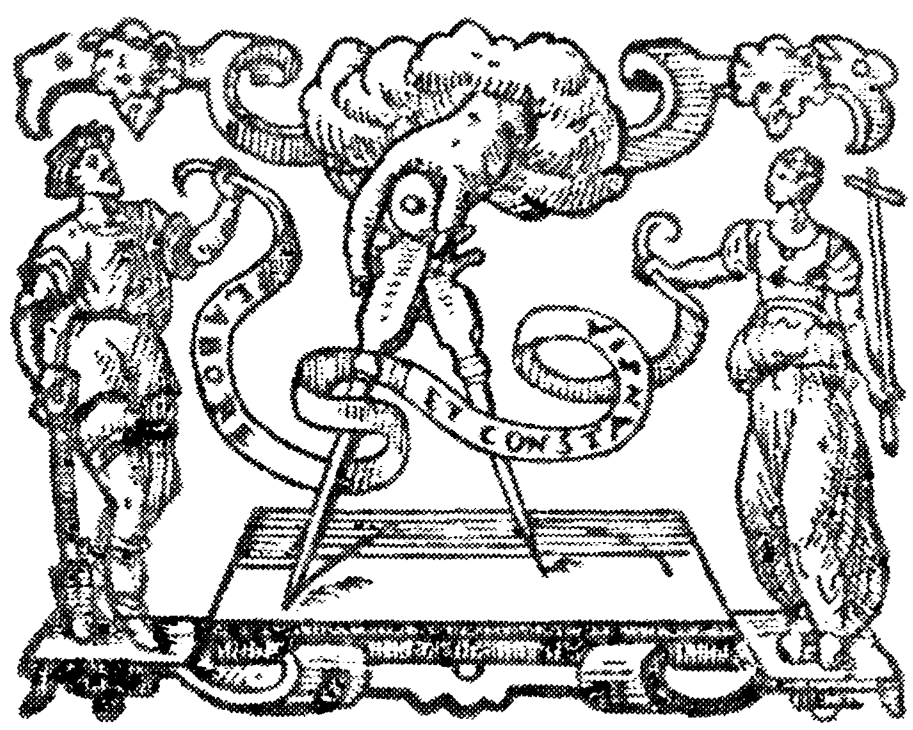
[1] *S. Stevin*. The principal works, v. II, B. Amsterdam, 1958, p. 679.
[2] Там же, v. II, B., p. 495.

DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*



TOT LEYDEN,

By Chriſtoffel Plantijn

M. D. LXXXV

Титульный лист первого издания «Десятой» Стевина критиковал принятые в то время наименования и прямо заявлял, что «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел» [1]. С некоторой осторожностью Стевин включал в понятие числа и отрицательные числа. Эта концепция единого понятия действительного числа, полностью восторжествовавшая в XVII в. в работах Валлиса и Ньютона, имела важнейшее значение для дальнейших успехов алгебры и ее приложений в геометрии, приведших к появлению математики переменных величин.

Дробные показатели

В XVI в. получило дальнейшее развитие и учение Орема о дробных показателях. Развитие этого учения сыграло существенную роль в подготовке изобретения логарифмов в начале XVII в.

Дробные показатели применял Тарталья в «Общем трактате о числах и мере». Тарталья рассуждает так же, как Орем, и, в частности, говорит: «Четвертая часть отношения 5 к 4 равна отношению ℞℞ 5 к ℞℞ 4» (т. е. $\left(\frac{5}{4}\right)^{1/4} = \sqrt{\sqrt{5}} : \sqrt{\sqrt{4}}$), «произведение отношения 5 : 4 на $\frac{2}{3}$ равно отношению 25 к ℞ cu 10 000» (т. е. $\left(\frac{5}{4}\right)^{2/3} = 25 : \sqrt[3]{10000}$), «частное от деления отношения 2 : 1 на $^3/_4$ равно отношению ℞ cu 16 к 1» (т. е. $2^4/_3 = \sqrt[3]{16}$) [2].

Дробными показателями систематически пользовался также Стевин, обозначавший, например, степень неизвестной $^2/_3$ в виде $\frac{2}{3}$.

Дальнейшим развитием идей Тартальи является определение деления отношения на отношение в «Полной арифметике» Штифеля: «Подобно тому, как можно определенное количество локтей делить либо на некоторое количество локтей, либо же на отвлеченное число, так можно и отношение делить либо на отвлеченное число, либо на отношение». Штифель предлагает следующий алгоритм деления на отношение: «Вычитай делительное отношение, пока либо получится равенство [т. е. не будет остатка], либо изменится род отношения [т. е. отношение, бывшее больше 1, станет меньше 1]. Частное состоит тогда из суммы единиц, которыми отмечаются отдельные вычитания, ибо для каждого производимого вычитания надо брать одну единицу» [3].

Далее Штифель приводит пример деления $\frac{729}{64}$ на $\frac{3}{2}$. «Вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{729}{64}$, т. е. находя отношение, которое, будучи составлено с отношением $\frac{3}{2}$, даст $\frac{729}{64}$, Штифель находит отношение $\frac{243}{32}$ (по современной терминологии «вычитание» Штифеля есть деление и $\frac{729}{64} : \frac{3}{2} = \frac{243}{32}$). «Вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{81}{16}$, он получает $\frac{27}{8}$, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{27}{8}$, получает $\frac{9}{4}$, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{9}{4}$, получает $\frac{3}{2}$ и, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{3}{2}$, полу-

[1] *S. Stevin.* The principal works. v. II, B, стр. 536.
[2] *N. Tartaglia.* General trattato di numeri et misure, v. 3. Venetia, 1560, p. 126—127.
[3] *M. Stifel.* Arithmetica integra. Norimbergae, 1544, л. 53 об.

чает $\frac{1}{1}$. Так как было произведено шесть «вычитаний», частное от «деления» равно 6. В другом примере, «деля» $\frac{2187}{128}$ на $\frac{27}{8}$, Штифель после трех «вычитаний» получает отношение $\frac{4}{9} < 1$, а после двух вычитаний был «остаток» $\frac{3}{2}$, являющийся «третью» делительного отношения, поэтому «частное» равно $2\frac{1}{3}$. По современной терминологии, задачи Штифеля представляют собой уравнения $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$ и $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$, решения которых суть

$$\log_{3/2}\frac{729}{64} = 6 \text{ и } \log_{27/8}\frac{2187}{128} = 2\frac{1}{3}.$$

В связи с «делением отношений» Штифель, вслед за Шюке приводил сопоставление арифметической прогрессии — $n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots n$ и геометрической прогрессии $\frac{1}{a^n}, \ldots, \frac{1}{a}, 1, a, \ldots, a^n$ и ввел термин «показатель» (exponens) для членов первой прогрессии.

Алгебра Петра Рамуса

Коссистские названия степеней были реформированы Петром Рамусом (Пьер де ла Раме, 1515—1572), французским протестантом (гугенотом), погибшим во время резни гугенотов, известной под названием «Варфоломеевская ночь». Рамус был профессором философии Парижского университета. Он был сторонником реформации не только в религии: в философии он боролся против авторитета Аристотеля и был предшественником Фрэнсиса Бэкона (1561—1626) в критике аристотелевской логики. После того как указом короля Рамусу было запрещено учить или писать против Аристотеля, он перенес свою реформаторскую деятельность в математику. Его «Курс математики в тридцать одной книге» (Scholarum mathematicorum libri unus et triginti, Basileae, 1569) включал, в частности, изложение «Начал» Евклида, но также в реформированном, именно весьма упрощенном и облегченном виде. В этом курсе Рамус пытался дать математике новое обоснование, основанное на арифметике. В «Двух книгах по арифметике и стольких же по алгебре» (Arithmeticae libri duo et Algebrae totidem), изданных в 1586 г. во Франкфурте уже после гибели Рамуса, степени назывались: x — latus («сторона», сокращенно l), x^2 — quadratus (q), x^3—cubus (c), x^4 — biquadratus (bq), x^5—solidus («тело», s), x^6 — quadratocubus (qc), x^7 — bisolidus (bs), x^8 — triquadratus (tq).

О влиянии Рамуса за пределами родной Франции, а также Швейцарии и Германии, где был напечатан ряд его книг, свидетельствует «Арифметика» Магницкого, где наряду с коссистскими названиями и знаками встречаются также заимствованные у Рамуса: биквадрат, солидус, квадратокубус, бисолидус, триквадрат, бикубус и т. д.

Алгебра Франсуа Виета

Коренные улучшения в алгебраическую символику ввел, как упоминалось, Франсуа Виет, принадлежащий к числу самых замечательных математиков рассматриваемой эпохи. Виет (1540—1603), уроженец Фонтене-ле Конт во французской провинции Пуату, юрист по образованию, с девятнадцати лет занялся адвокатской практикой в родном городе. Преподавая астрономию дочери одной из своих знатных клиенток, он увлекся этой наукой и пришел к мысли составить труд, посвященный усовершенствованию птолемеевой системы, ибо систему Коперника он считал неудовлетворительной; часть этого сочинения увидела свет в 1637 г. Вместе с тем Виет приступил к разработке тригонометрии и около 1570 г. подготовил уже упоминавшийся «Математический канон», который издал позднее в Париже (1579 г.). В 1571 г. Виет переехал в Париж, где свел знакомство с местными математиками, в том числе Рамусом. Вскоре, в 1573 г., он перешел на государственную службу. Отчасти благодаря браку своей ученицы с принцем де Роганом Виет сделал блестящую карьеру и стал советником сначала короля Генриха III, а после его смерти — Генриха IV. Громкую славу при дворе ему принесла расшифровка переписки врагов Генриха III. Но главной страстью Виета была математика, и ей отдавал он свой досуг. Ей же он посвятил 1584—1589 гг., когда по требованию влиятельных недругов был отстранен от дел. За эти годы он особенно глубоко изучил изданные незадолго перед тем сочинения классиков — Архимеда, Диофанта и др., а также своих ближайших предшественников — Кардано, Тартальи, Бомбелли, Стевина; вместе с тем он далеко продвинулся в создании новой символической алгебры.

Из многочисленных математических сочинений Виета только часть была опубликована при его жизни, многие увидели свет посмертно, а некоторые остались в рукописях. В издании некоторых трудов участвовали ученики Виета: шотландец Александр Андерсон (1582—1619) и югослав из Дубровника (Рагузы) Марин Геталдич или Гетальди (1566—1627). Наиболее полное издание Виета, в которое не вошел, однако, «Математический канон», выпустил видный последователь Декарта Фр. ван Схоотен,— это «Математические сочинения» (Opera mathematica), вышедшие в Лейдене в 1646 г. К сожалению, до сих пор никто не взялся за работу, весьма, правда, нелегкую, по подготовке нового полного издания трудов этого классика математики.

Общие идеи и основные принципы новой алгебры Виет изложил во «Введении в аналитическое искусство» (In artem analyticem Isagoge, Turonis, 1591), которое должно было составить начало большого всеобъемлющего алгебраического трактата. Целью Виета является преобразование прежней алгебры в мощное математическое исчисление. «Искусство, которое я излагаю,— писал он,— ново, или по крайней мере настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид», и далее: «Все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства, представляющего поэтому самый верный путь для математических изысканий» [1]. При этом новая алгебра делится на две части — одну, имеющую

[1] Цит. по французскому переводу М. Ф. Риттера: *Fr. Viète*. Introduction à l'art analytique. Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e phisiche, v. I, 1868, p. 227.

Франсуа Виет

дело с общими величинами, и другую, опирающуюся на первую и имеющую дело с числами; слабым пунктом древних аналистов было как раз употребление только конкретных чисел, между тем как новое аналитическое искусство черпает силу именно в рассмотрении общих величин.

Общую алгебру Виет назвал logistica speciosa, т. е. видовой логистикой: термин «логистика» у греков обозначал совокупность арифметических приемов вычислений, а термин «вид» имел здесь тот же смысл, что «символ» (латинское species значит среди прочего вид и образ, а греческое σύμβολον — знак, образ и т. д.). Предметом видовой логистики является система математических объектов, частью геометрических, частью псевдогеометрических, связанных между собой отношениями, аналогичными арифметическим. Эти объекты образуют шкалу, лестницу величин и суть сторона или корень, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и еще бесконечное множество других скаляров (scalares), принадлежащих к различным реальным или фиктивным размерностям — длине или ширине, площади, объему, площади-площади, площади-объему и т. д. Сложение, вычитание и приравнивание скаляров подчинены, как и в древней математике, «закону однородности».

Когда величины выражены числами, они и отношения между ними образуют предмет logistica numerosa, т. е. числовой логистики. Между обеими частями алгебры существует тесная связь, и многие управляющие ими законы находятся в прямом соответствии. Так, умножению чисел соответствует «проведение» (ductio) одного скаляра по другому, именно образование нового скаляра, размерность которого равна сумме размерностей данных величин; аналогично делению соответствует приложение (applicatio) скаляров. Благодаря такому соответствию результаты видовой логистики оказывается возможным применять и к задачам геометрии и к числовой логистике. Но эти две алгебры отнюдь не тождественны, и, в частности, система скаляров не обладает свойствами ни поля, ни кольца.

Видовой логистике Виет сообщил требуемую общность, создав символику, в которой впервые появились знаки не только неизвестных, но и произвольных, т. е. переменных данных величин. В качестве знаков скаляров он принял прописные буквы алфавита, гласные для неизвестных и согласные для известных. Необходимы, писал Виет, наглядные и всегда одинаковые символы, позволяющие отличать данные величины от неизвестных, например, тем, что «искомые величины будут обозначены буквой A или другой гласной E, I, O, U, Y, а данные — буквами B, D, G или другими согласными» [1]. Это нововведение и особенно применение буквенных коэффициентов положило начало коренному перелому в развитии алгебры: только теперь стало возможным алгебраическое исчисление как система формул, как оперативный алгоритм. Между прочим, само слово «коэффициент» восходит к Виету, который употреблял его, правда, в несколько специальном смысле, в «Первых замечаниях к видовой логистике» (Ad logisticam speciosam notae priores, Parisii, 1631), где вслед за «Введением» приводятся различные преобразования алгебраических формул. Рассматривая выражение типа

$$(A + B)^2 + D\,(A + B),$$

Виет называл величину D, участвующую вместе с $A + B$ в образовании прямоугольника $D\,(A + B)$, longitudo coefficiens, т. е. содействующей длиной. Далее это выражение встречается не раз [2].

Из знаков действий Виет употреблял $+$ и $-$, произведение выражал словом in (в смысле «на»), в случае приложения ставил разделительную дробную черту; кроме того, черта над многочленом играла у него роль скобок (впрочем, случалось, что он применял фигурные скобки). Степени он обозначал, приставляя к соответствующей букве слова quadratum, cubus и т. д. или же их сокращения. Так, в «Дополнении к геометрии» (Supplementum geometriae, Turonis, 1593) наше кубическое уравнение

$$x^3 - 3r^2x = r^3$$

записано в виде

A cubus minus *Z* quadrato ter in *A* aequatur *Z* cubo.

Здесь соблюден, как видно, закон однородности и слово ter означает «трижды», а aequatur — «равняется». Обозначения степени неизвестной в числовой логистике были проще: $1N$ (от numerus — число), Q (от qua-

---

[1] *Fr. Viète.* Introduction à l'art analytique, p. 232.
[2] См. французский перевод М. Ф. Риттера: *Fr. Viète.* Première série de notes sur la Logistique spécieuse, Bollettino di bibliografia e storia di scienze matematiche e physiche, v. I, 1868, p. 257.

dratum), C (от cubus) и т. д. В качестве числового примера только что написанного общего уравнения Виет приводит $1C - 3N$ aequatur 1 (т. е. $x^3 - 3x = 1$). Употребляя для обозначения величин прописные, а не строчные буквы, Виет следовал древним грекам.

Своей символикой Виет пользовался регулярно; очень часто решение задачи в буквенном виде он сопровождал числовыми примерами. Его символику применяли и некоторые другие математики, среди них знаменитый П. Ферма, вплоть до середины XVII в. Для нас очевидны недостатки обозначений Виета. Неудобным было словесное обозначение степеней, имеющее первостепенное значение в символической алгебре; к тому же Виет последовательно прилагал его только к неизвестным величинам, между тем как необходимую размерность буквенных коэффициентов устанавливал, приписывая рядом с буквой слова planum (плоскость) и solidum (тело) и их комбинации или их сокращения. Вот как выглядит, например, уравнение $x^3 + 3B^2x = 2z^3$ в сочинении «Об анализе и усовершенствовании уравнений» (De aequationum recognitione et emendatione, Parisii, 1615) в издании 1646 г.:

$$A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \text{ in } A \text{ aequari } Z \text{ solido } 2;$$

а вот выражение его корня по правилу Тартальи:

$$\sqrt{C\sqrt{B\text{ plano} - \text{plano} - \text{plani} + Z\text{ solido} - \text{solido}} + Z\text{ solido}} -$$
$$- \sqrt{C\sqrt{B\text{ plano} - \text{plano} - \text{plani} + Z\text{ solido} - \text{solido}} - Z\text{ solido}}.$$

Громоздкость такой символики, обусловленная, в частности, требованием однородности, вскоре стала очевидной. Трудность, связанная с обозначением степеней, непригодным для распространения на произвольные показатели, выявилась несколько позднее.

Свое символическое исчисление Виет применил к обширному кругу задач алгебры. Прежде всего следует отметить вслед с разработкой общего аппарата алгебраических преобразований весьма полное аналитическое изложение теории уравнений первых четырех степеней. Мы приведем лишь два результата, относящихся к этому кругу вопросов. Во-первых, в своем «Усовершенствовании уравнений» Виет очень изящно и просто свел кубическое уравнение вида $x^3 + 3ax = 2b$ с помощью преобразования $y^2 + xy = a$ к уравнению $y^6 + 2by^3 = a^3$, квадратному относительно y^3. Во-вторых, в «Дополнении геометрии» он показал, что решение любого кубического уравнения приводится либо к вставке двух средних пропорциональных, либо к трисекции угла, и с помощью тригонометрических средств дал решение неприводимого случая. Если записать уравнение $x^3 - px = q$ в виде $x^3 - 3r^2x = ar^2$, причем $p = 3r^2$ и $q = ar^2$, то неприводимый случай имеет место, когда $r > a/2$. Сопоставляя уравнение с известным соотношением

$$\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u,$$

можно положить $a = 2r\cos 3u$; тогда решением уравнения будет

$$x = 2r\cos u$$

и дело сводится к отысканию $\cos u$ по данному $\cos 3u$. Для примера Виет решил указанное выше уравнение $x^3 - 3x = 1$, для которого $x = 2\cos 20°$, причем $\cos 20° = 0{,}93969262$. Аналогично сводится к трисекции угла неприводимый случай для уравнений вида $x^3 + q = px$.

Виету были также известны алгебраические уравнения, соответствующие делению угла не только на три, но и на пять или на семь равных частей. Более того, он знал общие законы разложения $\cos mx$ и $\sin mx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$. Именно это позволило Виету сразу решить в 1594 г. следующее уравнение 45-й степени с числовыми коэффициентами, предложенное в качестве вызова всему ученому миру голландцем Адрианом ван Роуменом (1561—1615):

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - \dots + 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a$$

при

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}\,.$$

Виет немедленно увидел, что a есть сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, или же хорда дуги в 24°, а по коэффициентам первого и предпоследнего членов заключил, что x есть хорда 1/45 этой дуги, как оно и было в самом деле. Вслед затем, на другой день, он нашел еще 22 корня уравнения, описываемые выражением

$$2\sin\frac{n\cdot 360° + 12°}{45}$$

при $n = 1, 2, \dots, 22$. Этим он ограничился: остальные 22 корня отрицательные, а Виет не принимал ни отрицательных, ни мнимых корней, которые не соответствовали его «скалярам».

Идея применения трансцендентных функций к решению алгебраических уравнений получила новое развитие во второй половине XIX в., прежде всего у Ш. Эрмита, Л. Кронекера (решение уравнения пятой степени с помощью эллиптических функций).

Виету же принадлежат первые значительные успехи в общей теории алгебраических уравнений. В сочинении «Об анализе и усовершенствовании уравнений» он применяет свой символический аппарат к разработке отдела о преобразованиях корней уравнений. Линейную подстановку вида $x = y + h$, примененную Кардано для уничтожения члена второй степени в кубическом уравнении, он распространяет на уравнения произвольной степени (и, в частности, сводит таким образом трехчленное квадратное уравнение к двучленному). Точно так же распространяет он известную Кардано обратную подстановку $x = k / y$, используя ее для освобождения в отдельных случаях от иррациональностей и отрицательных коэффициентов; например, уравнение $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ он переводит заменой $x = \sqrt[3]{80} / y$ в $y^4 + 8y^3 = 80$. Линейная подстановка вида $x = ky$ употребляется для избавления от дробей в коэффициентах и для перевода данного уравнения степени n в другое с данным коэффициентом в члене степени $n - 1$ при условии, что коэффициент старшего члена остается равным единице.

При рассмотрении некоторых трехчленных уравнений выявляется, между прочим, недостаточность символики Виета для обозначения произвольных степеней, о чем упоминалось ранее. Так, например, уравнению

$$bx^m - x^{m+n} = c$$

у него соответствует

B parabola in A gradum — A potestate aequatur Z homogenae,

что можно перевести примерно так: B, приложенное к градусу A,— A в степени равняется однородной Z.

Особенный интерес и в рассматриваемом труде имеет исследование вопроса об образовании уравнений с данными корнями и примыкающего вопроса о зависимостях между корнями и коэффициентами уравнений. На примерах уравнений от второй до пятой степени с положительными корнями и коэффициентом при старшем члене, равном 1 или —1 (свободный член берется в правой части со знаком «плюс»), Виет показывает, что коэффициенты при x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} и т. д. суть взятые с чередующимися знаками сумма корней, сумма произведений пар корней, троек корней и т. д. И здесь Виет пошел далее своих предшественников: соответствующее предложение для квадратного уравнения явно высказал только Кардано (хотя, по существу, по крайней мере для положительных корней, оно было известно гораздо ранее) и Кардано же заметил это свойство у коэффициента при члене второй степени кубических уравнений.

Только что приведенным замечанием Виет, по его собственным словам, завершает и увенчивает свое сочинение, ссылаясь на более подробное изложение в другом месте. Однако такое изложение до нас не дошло, и мы не знаем, зафиксировал ли Виет в печати или письменно, очевидно, известный ему прием составления уравнений с помощью перемножения множителей первой степени, а также общую трактовку случая, когда имеются отрицательные корни. Последнее, впрочем, для него не представляло труда: было достаточно привлечь к рассмотрению положительные корни уравнения, получаемого из данного подстановкой $x = -y$; частные примеры такого рода у него встречаются. Например, если уравнение $x^3 + q = px$ имеет два положительных корня x_1, x_2, то уравнение $y^3 = py + q$ — один положительный корень $y_1 (= -x_3)$ и $y_1 = x_1 + x_2$ (что знал уже Кардано),

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = p, \quad x_1x_2(x_1 + x_2) = q.$$

В рассмотрениях Виета содержались первые ростки теории симметрических функций и разложения целых многочленов на множители первой степени, которые немного спустя привели и к открытию основной теоремы алгебры о числе корней уравнения любой степени. В этом направлении его исследования были продолжены в ближайшие десятилетия Т. Гарриотом, А. Жираром и Р. Декартом.

В трактате «О численном решении чистых и связанных степеней с доказательством» (De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione, 1591, опубликовано Гетальди в Париже в 1600 г.) Виет разработал метод приближенного решения алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами. Прежде всего он рассматривает случай чистых степеней, т. е. двучленные уравнения $x^n = q$, решение которых представляет собой извлечение корня. Для связанных степеней, т. е. многочленных уравнений, метод Виета является развитием метода извлечения корней, родственного тем методам, которые ранее применялись математиками Востока. Положительный корень уравнения ищется в форме $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где x_n — единицы, x_{n-1} — десятки и т. д.;

значения $x_1, x_2, x_3, \ldots$ вычисляются последовательно: например, для решения уравнения

$$x^2 + px = q$$

Виет ищет неизвестную в форме $x = x_1 + x_2 + x_3$ и переписывает уравнение в виде

$$q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + px_1 + px_2 + px_3 =$$
$$= x_1^2 + px_1 + (2x_1 + p)\, x_2 + x_2^2 + [2\,(x_1 + x_2) + p]\, x_3 + x_3^2\,.$$

Первое приближение x_1 Виет находит, пренебрегая членами x_2 и x_3; далее, деля разность $q - x_1^2 - px_1$ на сумму $2x_1 + p$, т. е. пренебрегая членом x_3 и округляя частное, он находит x_2, а деля разность $q - x_1^2 - px_1 - (2x_1 + p)\, x_2 + x_2^2$ на сумму $2\,(x_1 + x_2) + p$ и округляя частное, получает x_3. Например, при решении уравнения $x^2 + 7x = 60\,750$ он находит $x_1 = 200$; деля разность $60\,750 - 41\,400 = 19\,350$ на $2x_1 + p = 407$ и округляя, он получает $x_2 = 40$, а деля разность $19\,350 - (2x_1 + p)\, x_2 + x_2^2 = 19\,350 - 17\,880 = 1470$ на $2\,(x_1 + x_2) + p = 487$ и округляя, он находит $x_3 = 3$, т. е. $x = 243$. Метод Виета, несмотря на его громоздкость, применялся до самого конца XVII в., когда был вытеснен более простым и удобным методом Ньютона.

Мы остановились с большей подробностью, чем во многих других случаях, на алгебраических трудах и открытиях Виета, потому что они сообщили новое направление алгебре и послужили основой, на которой смогли начать успешное развитие такие ведущие науки последующего периода, как аналитическая геометрия и исчисление бесконечно малых. Прежде чем расстаться с великим французским ученым, мы рассмотрим еще одно замечательное открытие, принадлежащее как раз области инфинитезимальной математики, а именно первое в Европе чисто аналитическое представление числа π, притом в форме бесконечного произведения некоторых квадратных корней. Это открытие изложено в «Восьмой книге ответов на различные математические вопросы» (Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turonis, 1593),— остальные книги света не увидели.

Допустим, что в круг радиуса 1 вписан правильный n-угольник площади S_n, и обозначим радиус круга, вписанного в этот n-угольник, r_n. Тогда

$$S_n : S_{2n} = r_n : r = \cos\frac{180^\circ}{n}\,;$$

при этом в случае $n = 4$ площадь $S_n = 2r^2$. Если положить поочередно $n = 4, 8, 16, \ldots$ и перемножить возникающие при этом равенства

$$\frac{S_4}{S_8} = \cos\frac{180^\circ}{4}\,, \qquad \frac{S_8}{S_{16}} = \cos\frac{180^\circ}{8} \text{ и т. д.,}$$

то, учитывая, что S_{2n} при $n \to \infty$ имеет пределом площадь круга, мы получим

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Сам Виет с его неизменной любовью к греческой науке писал, что привел к вычислению прием Антифона (ср. стр. 88). Разумеется, вопрос о сходимости найденного бесконечного произведения перед Виетом не встал. Доказать это нетрудно.

Отрицательные числа

Одной из важнейших особенностей европейской математики было систематическое пользование отрицательными числами. Впервые отрицательные числа появились в Европе в «Книге абака» Леонардо Пизанского при рассмотрении семи неопределенных уравнений с восемью неизвестными x, y, z, t, u, v, w, s:

$$x + y + z + \frac{1}{2}(t + u + v + w) = s,$$
$$y + z + t + \frac{1}{3}(u + v + w + x) = s,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w + x + y + \frac{1}{8}(z + t + u + v) = s.$$

Леонардо говорит, что эта задача неразрешима, но становится разрешимой, если принять, что за третьим человеком имеется долг (debitum), тогда решение принимает вид: $x = 507$, $y = 171$, $z =$ долг 9 (число, появляющееся при вычитании 4038 из 4029), $t = 1347$, $u = 451$, $v = 131$, $w = 1431$, $s = 2349$. Аналогичные примеры отрицательных чисел, истолковываемых в виде долга, встречаются еще в нескольких задачах «Книги абака».

Термин «долг» был заимствован Леонардо, по-видимому, у индийцев через арабов (мы упоминали один случай появления отрицательных чисел у Абу-л-Вафы, называвшего их словом «дайн», с тем же значением, см. стр. 218).

Отрицательные числа имеются и в арифметиках Пачоли и Шюке. Более подробно излагает этот вопрос Шюке, который обозначает отрицательные числа выражением вида $0\ \tilde{m}\ 11$, называет их числами, «меньшими, чем ничто», и истолковывает их как долг; сопоставляя натуральным числам степени a^n, Шюке сопоставляет отрицательным числам степени $\frac{1}{a^n}$, т. е. по существу, вводит отрицательные показатели.

Однако еще Кардано называет отрицательные корни алгебраических уравнений «фиктивными».

Применение отрицательных чисел позволяет рассматривать вместо трех форм квадратных уравнений

$$x^2 = ax + b, \qquad x^2 + ax = b, \qquad x^2 + b = ax$$

с положительными корнями единую форму, за которую можно принять любую из них. Такая единая трактовка различных форм квадратных уравнений, которой пользовался еще Брахмагупта (см. стр. 192), в Европе впервые встречается только в «Полной арифметике» М. Штифеля, который записывает все три вида этих уравнений в форме, равносильной современной записи

$$x^2 = ax + b,$$

и описывает решение этого уравнения во всех трех случаях ($a > 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$ и $a < 0$, $b > 0$) следующим образом: «Во-первых, начни с числа неизвестного, раздели его пополам, поставь затем на его место эту половину и оставь ее там, пока ты не покончишь с всем. Во-вторых, возведи эту половину в квадрат. В-третьих, сложи либо вычти в зависимости от знака. В-четвертых, теперь извлеки квадратный корень из полученной тобой после сложения суммы либо полученной после вычитания разности. В-пятых, сложи либо вычти в зависимости от знака или условий твоего примера»[1]. На многочисленных примерах это правило применяется следующим образом: берется половина a, причем если a отрицательно, Штифель оперирует с отрицательным числом; эту половину, с одной стороны, сохраняют до последнего действия, а с другой стороны, возводят в квадрат. К этому квадрату прибавляют свободный член b, но поскольку сложение отрицательных чисел для Штифеля было еще новинкой, то формулируется правило отдельно для положительного и отрицательного b. Из полученной суммы извлекается квадратный корень, который складывается с половиной a с ее знаком.

Далее Штифель излагает систематическую теорию отрицательных чисел на примерах

$$\begin{array}{cccc} 0+6 & 0-6 & 0+6 & 0-6 \\ 0+4 & 0-4 & 0-4 & 0+4 \\ \hline 0+24 & 0+24 & 0-24 & 0-24 \end{array}$$

и аналогичное правило знаков для деления на примерах (± 24): (± 6). По поводу отрицательных чисел Штифель говорит: «Ты видишь, конечно, что все это с первого взгляда очень похоже на самый пустой вздор, и, однако же, выполненные сообразно с этим алгебраические действия приводят к изображениям поистине удивительным. Но, чтобы не пропустить ничего из того, что относится к целостной системе арифметики, по мере своих сил я должен, как мне кажется, сказать в этой части о фиктивных числах ниже, чем ничего (de numeris fictis infra nihil). Итак, подобно тому, как мы представляем себе различные корни чисел у чисел, не имеющих таких корней, и это представление оказывается в высшей степени полезным к математическим делам, так же не без пользы представляем себе и число ниже 0, т. е. ниже, чем ничего»[2].

Как мы видим, Штифель подчеркивает аналогию между введением отрицательных и иррациональных чисел.

Слова Штифеля «ниже, чем ничего» указывают, что он мысленно изображает положительные и отрицательные числа на вертикальной прямой (подобно делениям шкалы термометра). Геометрическое истолкование отрицательных чисел явилось решающим фактором для того, чтобы на них перестали смотреть как на «фиктивные числа». Это истолкование получило затем дальнейшее развитие у Альбера Жирара.

Геометрическое истолкование отрицательных чисел получило широкое распространение после появления аналитической геометрии, где положительные и отрицательные числа стали рассматриваться как координаты точек. Термины «положительный» (еще affirmativus — «утверди-

---

[1] *M. Stifel.* Arithmetica integra, л. 240 об.
[2] Там же, л. 250.

тельный», а не positivis) и «отрицательный» (negativus и privativus) впервые в Европе появились в рукописи «Initius Algebra». Как мы указывали, по-видимому, эти термины являются переводами арабских терминов «мусбат» и «манфи» самаркандского математика и астронома ал-Кушчи (см. стр. 218).

Тригонометрия

Тригонометрия в Европе появляется в XII в. вместе с переводами астрономических сочинений ученых стран ислама. Арабское название линии синуса «джайб» — транскрипция индийского слова «джива» — «тетива» — было переведено латинским словом sinus — буквальным переводом слова «джайб» — впадина, пазуха; в рукописях XII в. наряду со словом sinus встречается и слово geib — латинская транскрипция слова «джайб». Вскоре появляются также sinus-versus — разность между радиусом круга и линией косинуса, umbra recta (прямая тень) — название линии котангенса, перевод арабского выражения «плоская тень», umbra versa — название линии тангенса, перевод арабского выражения «обращенная тень». Эти термины мы встречаем уже у Брадвардина. Наряду с термином «синус» в Европе до XV в. применялся птолемеевский термин «хорда удвоенной дуги».

С тригонометрией были тесно связаны исследования немецкого ученого-гуманиста Николая Кузанского (1401—1464), сына рыбака Кребса из деревни Куза на Мозеле. Николай Кузанский учился в университетах Гейдельберга и Падуи и в 1449 г. стал кардиналом. Наряду с богословием он деятельно занимался математикой, астрономией, механикой, географией, философией и правом, им была предложена реформа календаря и составлена карта Европы. В своих философских сочинениях, в которых пантеистические идеи перемешаны со схоластической мистикой, он уделял много внимания таким математическим вопросам, как проблема бесконечного и спор о прерывном и непрерывном. В 1445—1449 гг. он написал трактаты «О квадратуре круга» (De quadratura circuli) и «О соизмерении прямого и кривого» (De recti ac curvi commensuratione) — о спрямлении окружности. Вслед за Аристотелем и многими другими Николай Кузанский был убежден в невозможности точной квадратуры круга и искал достаточно точные приближения построения. Основной его результат для приближенного спрямления дуги окружности в наших обозначениях можно выразить формулой

$$\varphi \approx \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi},$$

дающей хорошее приближение с недостатком: например, для $\varphi = \pi / 4$ она дает 0,7836 вместо 0,7854 с погрешностью около 0,2%.

Первым крупным сочинением по тригонометрии в Европе были «Пять книг о треугольниках всех видов» (De triangulis omnimodis libri quinque) немецкого математика и астронома Иоганна Мюллера (1436—1476) из Кёнигсберга (в Нижней Франконии), прозванного по латинскому названию места рождения Региомонтаном. Региомонтан в двенадцатилетнем возрасте поступил в Лейпцигский университет, затем был в Венском университете учеником Пейрбаха, а с 1458 г. сам стал читать там лекции. Путешествуя по Италии, он изучил греческий язык.

Региомонтан
Портрет неизвестного художника (1726)

Последние годы жизни Региомонтан работал при дворе венгерского короля Матвея Корвина и возглавлял астрономическую обсерваторию в Нюрнберге. Региомонтан умер в Риме, куда приехал для выработки календарной реформы.

Сочинение о треугольниках было написано Региомонтаном в Италии в 1462—1464 гг. В нем излагались задачи на построение треугольников, причем некоторые из них решены алгебраически, а не построением, далее тригонометрия на плоскости и на сфере. Это был первый труд в Европе, в котором тригонометрия рассматривалась в широком объеме как самостоятельная математическая дисциплина. Основное содержание тригонометрии Региомонтана взято из арабской литературы, но Региомонтану принадлежит заслуга систематизации и превосходного изложения огромного материала, который он дополнил собственными частными результатами и во многих случаях оригинальными доказательствами.

В частности, Региомонтан доказывает сферическую теорему косинусов, формулируемую им следующим образом: «Во всяком сферическом треугольнике, состоящем из дуг больших кругов, отношение обращенного синуса какого-нибудь угла и разности двух обращенных синусов, из которых один — от стороны, стягиваемой этим углом, а другой — от разности обеих дуг, заключающих этот угол, равно отношению квадрата полного прямого синуса к прямоугольнику, образованному синусами дуг, заключающих рассматриваемый угол» [1]. Если мы обозначим синус дуги x через $\sin x$, «полный синус», т. е. радиус круга, через $\sin \mathrm{tot}$, а обращен-

[1] *Regiomontanus.* On triangles, ed. and transl. B. Hughes. Madison—Milwaukee—London, 1967, p. 270—271.

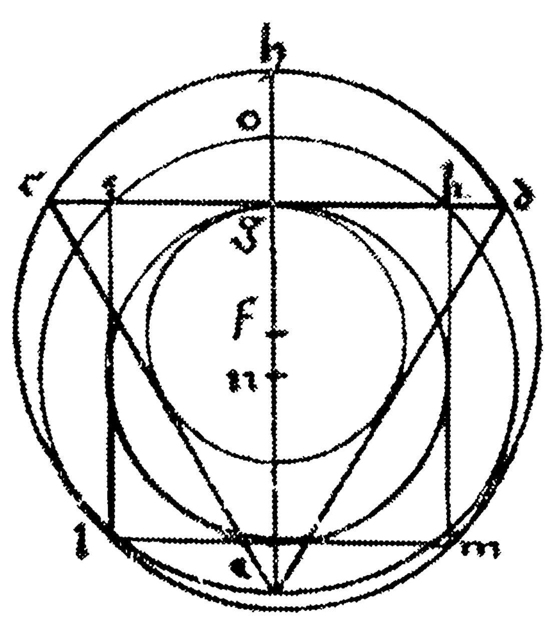
DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximii professoris

IOANNIS DE RE-

GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariae cognitu, uolentibus ad
scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-
re: quae cum nusquam alibi hoc tempore expositae
habeantur, frustra sine harum instructione
ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraque D. Nicolai Cusani de Qua
dratura circuli, Deque recti ac curui commensuratione:
itemque Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτι-
κά, hactenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia
singulari. Norimbergae in aedibus Io. Petrei.
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

Титульный лист первого издания «Пяти книг о треугольниках всех видов» Региомонтана ный синус дуги x через sin vers x, то можно переписать утверждение этой теоремы в виде $\frac{\sin\operatorname{vers} A}{\sin\operatorname{vers} a - \sin\operatorname{vers}(b-a)} = \frac{(\sin\operatorname{tot})^2}{\sin b \cdot \sin c}$, т. е., полагая $\sin\operatorname{tot} = 1$, $\sin\operatorname{vers} x = 1 - \cos x$, получим $\frac{1-\cos A}{\cos(b-c) - \cos a} = \frac{1}{\sin b \cdot \sin c}$, что можно переписать в виде теоремы косинусов

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Формулировка Региомонтана представляет собой обобщение правила Ибн Корры для определения высоты Солнца по широте местности, склонению Солнца и часовому углу (см. стр. 235), известного Региомонтану по «Книге о науке звезд» ал-Баттани. Региомонтан вычислил таблицы синусов и тангенсов, в которых радиус круга полагался равным 10^7, что равносильно вычислению этих таблиц в десятичных дробях с семью десятичными знаками.

На развитие тригонометрии существенное влияние оказал великий польский астроном Николай Коперник (1473—1543), уроженец Торуня. Коперник изучал математику и медицину в Кракове, в то время столице Польши, и в Болонье, затем стал священником соборной церкви в Фромборке (Фрауэнбурге). Основной труд Коперника, содержащий изложение его гелиоцентрической системы «О вращениях небесных сфер» (De revolutionibus orbium coelestium), был напечатан в Нюрнберге почти одновременно со смертью его автора. От астрономов, принявших точку зрения Коперника, требовались более точные астрономические наблюдения и более тщательная их математическая обработка, что вызвало необходимость создания более точных тригонометрических таблиц и дальнейшего совершенствования техники тригонометрических вычислений. В XIII главе второй книги труда Коперника содержится краткое изложение плоской тригонометрии, а в XIV главе той же книги — изложение сферической тригонометрии. Коперник вычислил также более точные таблицы синусов, включенные в «Таблицы науки о треугольниках» (Canon doctrinae triangulorum), изданные в 1551 г. Георгом Иоахимом Ретиком (1514—1576).

В книге «О вращениях небесных сфер» Коперник дал оригинальный вывод теорем сферической тригонометрии, основанный на рассмотрении трехгранного угла, проектирующего сферический треугольник из центра сферы. Терминология Коперника похожа не на терминологию Региомонтана и ученых стран ислама, а на терминологию Птолемея. Так, например, он доказывает теорему синусов для прямоугольного сферического треугольника в следующей формулировке: «В сферических треугольниках, имеющих прямой угол, хорда, стягивающая удвоенную дугу, лежащую против прямого угла, к хорде, стягивающей удвоенную сторону, одну из прилежащих к прямому углу, относится как диаметр сферы к хорде, стягивающей на большом круге сферы угол, вдвое больший угла, заключенного между последней и первой сторонами сферического треугольника» [1].

Термин «тень» был заменен на «тангенс» (от латинского слова tangens — «касающийся») в XVI в. в «Геометрии круглого» (Geometria rotundi, 1583) датского математика Томаса Финке (1561—1656). Финке же был введен термин «секанс» (от латинского слова secans — «секущий»).

---

[1] *Николай Коперник.* О вращениях небесных сфер. Перевод И. Н. Веселовского. М., 1964, стр. 61.

Николай Коперник

Теория перспективы

Перспективное изображение пространственных фигур, т. е. центральное проектирование этих фигур на плоскость, применялось еще древними греками в «скенографии» — искусстве писать сценические декорации. Различные виды центральных проекций рассматривались в «Оптике» Евклида и в «Планисферии» Птолемея.

Теории перспективы была посвящена в значительной части упоминавшаяся выше «Оптика» польского ученого XIII в. Витело, который изложил основные результаты теории перспективы, имевшиеся в «Оптике» Евклида, «Оптике» Птолемея и в «Книге оптики» Ибн ал-Хайсама, известной ему по переводу Герардо Кремонского. Впоследствии сочинение Витело было издано Ф. Ризнером вместе с указанным переводом Герардо в Базеле в 1572 г. «Оптика» Витело оказала значительное влияние на дальнейшее развитие науки, в частности сыграла важную роль в развитии геометрии. Сочинение Кеплера «Оптическая часть астрономии» (Astronomia pars optica) носит подзаголовок «Дополнение к Витело» (Ad Vitellionem paralipomena).

К XV в. относится деятельность архитектора Леон-Баттисты Альберти (1404—1472) из Флоренции и художника Пьетро деи Франчески или Пьеро делла Франческа (1416—1492) из Борго Сан Сеполькро, работавших в Риме при дворе папы Николая V.

Альберти в своем трактате «О живописи» (Della pittura, 1435) разработал метод построения изображения расположенных друг за другом рав-

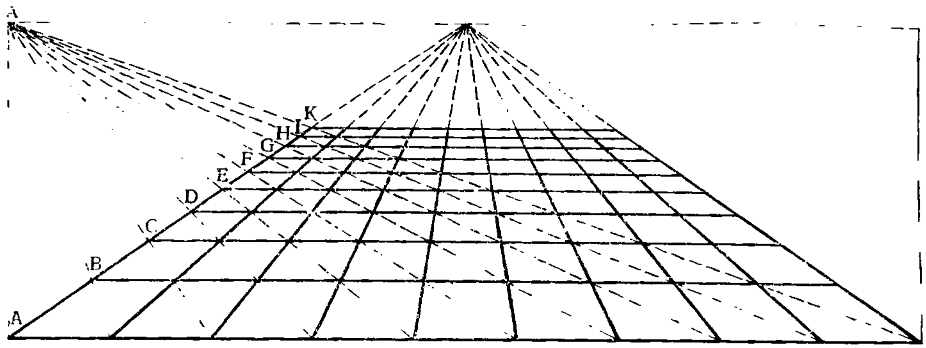


Рис. 76. Иллюстрация из книги Л. Б. Альберти «О живописи» (*L. B. Alberti.* Della pittura. Napoli, 1703, p. 17)

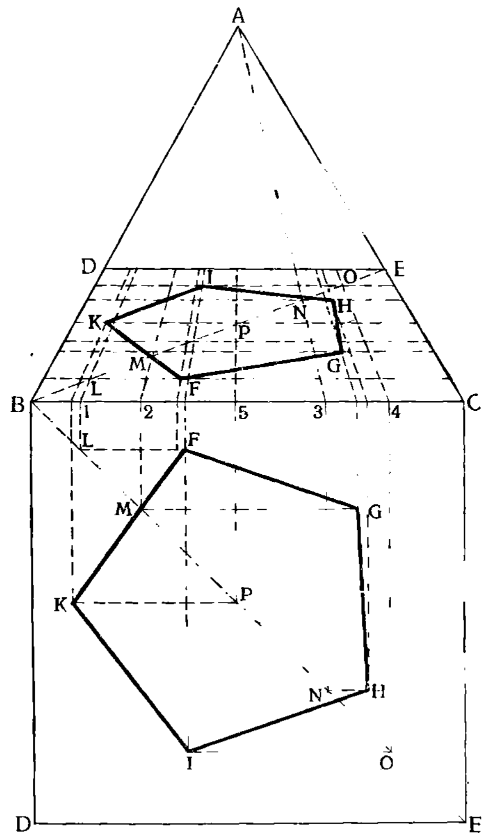


Рис. 77. Иллюстрация из книги П. деи Франчески «О перспективе в живописи» (*P. dei Franceschi.* De prospettiva pingendi. Strassburg, 1899)

ных и параллельных отрезков в виде параллельных отрезков, заключенных между двумя линиями, пересекающимися на линии горизонта. Метод Альберти ясен из его чертежа (рис. 76).

Историк искусства Джорджо Вазари пишет об Альберти: «В 1457 г., когда немцем Иоганном Гуттенбергом был изобретен полезнейший способ печатания книг, Леон-Баттиста по сходству изобрел прибор, при помощи которого можно было строить перспективы с натуры и уменьшать фигуры, а также изобрел способ, позволивший переводить вещи в большой масштаб и их увеличивать; все это хитроумные, полезные для искусства и поистине прекрасные изобретения» [1].

Деи Франчески в трактате «О перспективе в живописи» (De prospectiva pingendi, ок. 1480) описал построение перспективного изображения предмета по его вертикальной и горизонтальной проекциям.

Приведем построение деи Франчески перспективного изображения правильного пятиугольника (рис. 77).

Леонардо да Винчи

Вопросы теории перспективы рассматривались также в сочинениях великого итальянского художника Леонардо да Винчи (1452—1519), широко пользовавшегося перспективой в своей живописи.

Леонардо да Винчи, занимаясь экспериментальными науками, механикой, оптикой, астрономией, видел в математике образец научной доказательности, а механику называл «раем математических наук». В своем «Трактате о живописи» (Il trattato della pittura, опубл. 1651) он рекомендовал художникам изучать науки, в том числе излагаемую здесь геометрическую перспективу. Он указывал, что «влюбленные в практику без науки — словно кормчий, вступающий на корабль без руля или компаса; он никогда не уверен, куда плывет» [2]. Но и наука без практики похожа на «стоячую воду, которая либо гниет, либо замерзает на холоде, а ум человека, не находя себе применения, чахнет» [3].

Жизнь, полная скитаний, не дала Леонардо да Винчи возможности разработать свои научные идеи и изложить их в виде законченных сочинений. Однако сохранились его записные книжки, содержащие отрывочные заметки и наброски, в большинстве не законченные. В них математическая тематика представлена упражнениями и задачами, так или иначе имеющими прикладное назначение, равно как и некоторыми философскими проблемами, связанными с математическими понятиями. Много внимания уделено нахождению равновеликих площадей и объемов, звездчатым многоугольникам, построению правильных многоугольников на данной стороне либо вписанных в данную окружность, причем часто при условии постоянного раствора циркуля,—вопросу, которым занимался еще Абу-л-Вафа (см. стр. 230). Некоторые решения были приближенными (например, построения семи- и девятиугольника), а некоторые сам Леонардо признал впоследствии ошибочными. В тетрадях содержатся также исследования луночек, замечания о различии кривых простой и двойной кривизны, о невозможности квадратуры круга, о введении знаков + и —. Приближенную квадратуру Леонардо предлагает осуществить при помощи колеса,

[1] *Джорджо Вазари.* Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих, т. II. Перевод А. И. Венедиктова и А. Г. Габричевского. М., 1963, стр. 279.
[2] *В. П. Зубов.* Леонардо да Винчи. М.—Л., 1962, стр. 129.
[3] Там же, стр. 259.

ширина которого равна половине его радиуса. Если катить его по плоскости, то при полном повороте его прямоугольный след будет иметь площадь, равную площади его основания ($\pi r^2 = 2\pi r \frac{r}{2}$). Замечательно, что, исследуя центры тяжести фигур и тел, например полукруга и тетраэдра, а также определяя площадь эллипса, Леонардо применил методы Архимеда, предвосхитив ученых XVII в. Им были изобретены математические приборы — циркуль для пропорционального увеличения или уменьшения фигуры, прибор для вычерчивания параболы и др.

Хотя Леонардо теоретически высказался против неделимых («То, что делимо актуально, делимо и потенциально, однако не все величины, делимые потенциально, будут делимы актуально», «Точка не есть часть линии» и др.), практически он применял метод неделимых, придавая ему, по-видимому, эвристическое значение. Так, при исследовании истечения воды из сосуда он заменил воду просом, сделав при этом следующее замечание: «И если ты скажешь, что этот опыт нехорош, поскольку вода сама по себе— величина единая и непрерывная, а просо — дискретная и прерывная, на это я тебе отвечу: я хочу позволить себе такую вольность, общую с математиками, а именно: подобно тому, как они делят время на градусы, превращая его из величины непрерывной в прерывную, так и я сделаю то же, приравнивая просо или песок к воде» [1].

Альбрехт Дюрер

Много внимания теории перспективы уделял великий художник того времени — немец Альбрехт Дюрер (1471—1528). Дюрер написал специально для художников «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки» (Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt), изданное по-немецки в Нюрнберге в 1525 г. и по-латыни в Париже в 1532 г.

В своем трактате «О человеческой пропорции» (Von menschlicher Proportion, 1528), изданном вскоре по-латыни под названием «О симметрии частей человеческих тел» (De symmetria partium humanorum corporum, 1532), а затем и во французском и итальянском переводах, Дюрер рассматривает проекции различных частей человеческого тела на три взаимно перпендикулярные плоскости спереди, сбоку и сверху, а также на вертикальные плоскости, составляющие с первыми двумя плоскостями острые углы (рис. 78). В этом же сочинении приводится огромный статистический материал, содержащий измерения различных частей тел мужчин и женщин различных комплекций.

Заметим, что Дюрер занимался также составлением магических квадратов и, в частности, составил первый в Европе магический квадрат

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

изображенный на его гравюре «Меланхолия».

---

[1] *Леонардо да Винчи.* Избранные естественнонаучные произведения. Редакция, перевод, статья и комментарии В. П. Зубова. М., 1955, стр. 383.

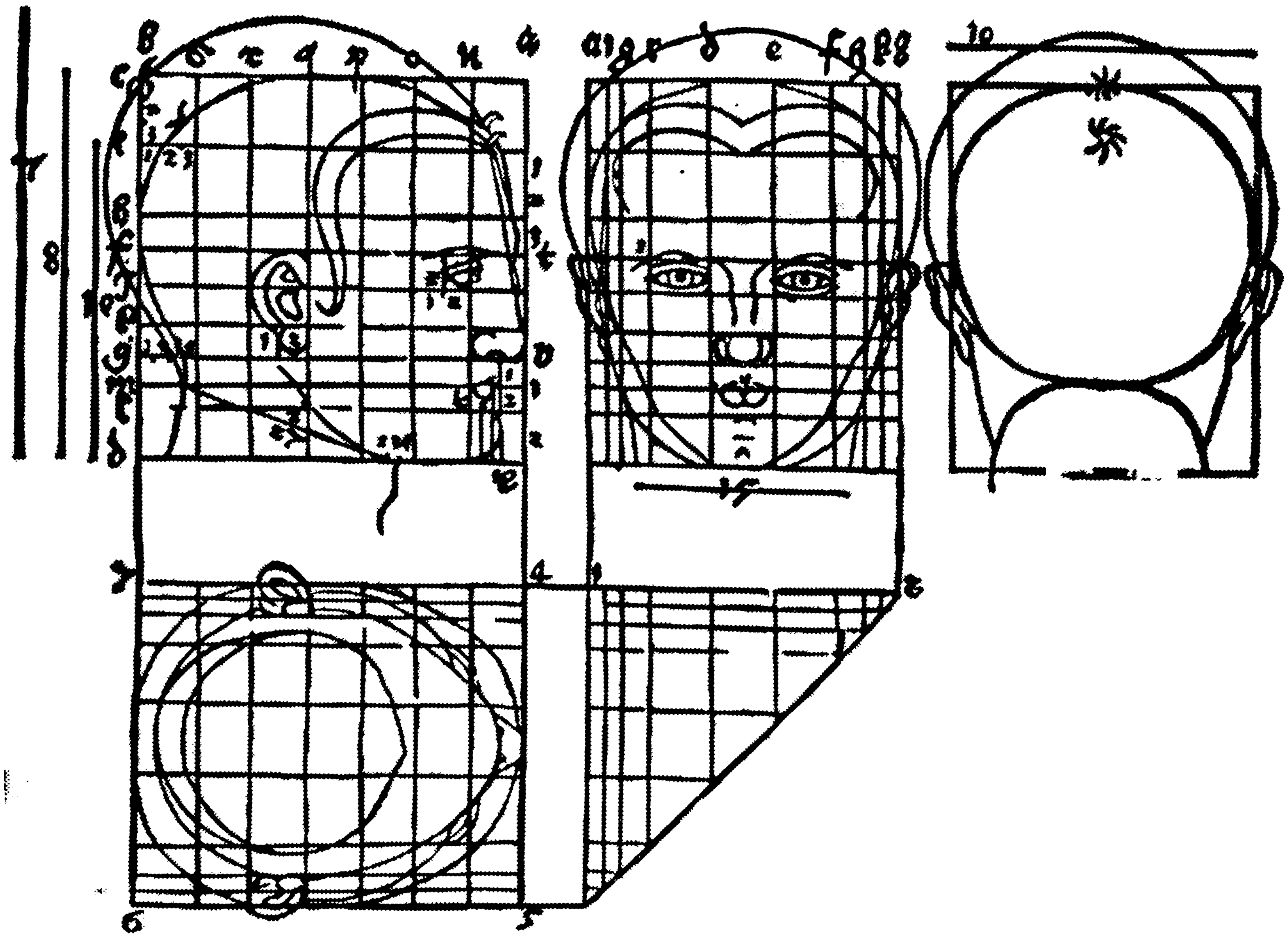


Рис. 78. Иллюстрация из книги А. Дюрера «О человеческой пропорции» (*A. Dürer*. Vier Bücher von menschlicher Proportion. Arnhem, 1603., f. Eii об.).

Теория параллельных линий

Первые известные нам доказательства V постулата Евклида в Европе предложили живший в Провансе (Франция) Лев Герсонид или Леви бен Гершон (1288—1344) и малоизвестный нам Альфонсо (XV в.). Оба они писали на древнееврейском языке, на который были переведены многие арабские математические трактаты. Их доказательства, как и попытки многих ученых стран ислама, были основаны на доказательстве существования прямоугольника, у Герсонида — с помощью рассмотрения четырехугольника с четырьмя равными углами, у Альфонсо — с помощью того же равнобедренного четырехугольника с двумя прямыми углами, что и у Хайяма. В доказательстве Альфонсо упоминается ан-Найризи и используется движение перпендикуляра к прямой, как у Ибн Корры и Ибн ал-Хайсама.

К XVI в. относится также доказательство V постулата Христофора Клавия (настоящая фамилия Шлюссель[1], 1537—1612), ученого-иезуита — уроженца Бамберга, многие годы преподававшего математику в Риме и там же принимавшего участие в реформе календаря при папе Григории XIII. Доказательство Клавия приводится в его комментариях к Евклиду (1596) и основывается на теореме о том, что линия, каждая точка которой отстоит от прямой линии, находящейся в той же плоскости, на равном расстоянии, является прямой. Он доказывает это, исходя из евклидова определения прямой линии как линии, «равно расположенной по отношению ко всем точкам на ней». Клавий считает, что, так как все

[1] Schlüssel по-немецки и clavis по-латыни означают «ключ».

точки рассматриваемой им линии отстоят от прямой на равном расстоянии, эта линия «равно расположена» по отношению к точкам на ней. Он опровергает предположение, что эта линия является окружностью, так как линия, равноотстоящая от окружности, является окружностью, и если бы рассматриваемая линия была окружностью, окружностью должна была быть и данная линия. Исходное положение Клавия близко к исходному положению Ибн ал-Хайсама; Клавий не упоминает имени Ибн ал-Хайсама, но говорит: «Я узнал, что это также сделано в каком-то арабском Евклиде; но мне никогда не представлялось возможности прочесть это доказательство, хотя я упорно несколько раз просил это у того, кто владеет этим арабским Евклидом» [1]; по-видимому, Клавий был знаком с доказательством Ибн ал-Хайсама из вторых рук.

Близки к Ибн ал-Хайсаму и следующие предложения Клавия: «Если прямая линия движется по другой прямой, образуя своим концом с ней все время прямой угол, ее другой конец описывает прямую линию»; «Если к прямой линии восставлены два равных перпендикуляра, конечные точки которых соединены прямой линией, то перпендикуляр, опущенный из произвольной точки этой прямой на первую прямую, равен первому перпендикуляру» [2]. Далее Клавий рассматривает тот же четырехугольник, что и Хайям, и доказывает, что его верхние углы прямые. Доказав существование прямоугольника, Клавий доказывает V постулат сначала для случая перпендикуляра и наклонной, а затем для общего случая.

Значение математики эпохи Возрождения

В эту эпоху математика Европы впервые вышла за пределы знаний, полученных в наследство от древних греков и народов Востока. Именно в это время закончилась решительной победой многовековая борьба за введение позиционной десятичной арифметики. В это время была создана арифметическая и алгебраическая символика, отсутствие которой тормозило прогресс теории уравнений ранее. Введены были дробные и отрицательные показатели и отрицательные числа; успешно решена проблема решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней — проблема, перед которой остановились ученые стран ислама. В связи с решением этой проблемы были формально введены мнимые числа. Виет построил алгебру как символическое исчисление, введя специальные буквенные обозначения для неизвестных и для коэффициентов многочленов, а также расширив символику алгебраических операций. В арифметике были введены десятичные дроби, удобства которых быстро оценили ученые. Значительны были достижения плоской и сферической тригонометрии, были усовершенствованы методы вычисления таблиц. Математика во все большей мере становилась мощным средством решения быстро расширявшегося круга задач не только торговли и землемерия, но и новой техники и нового естествознания. Лучшие умы справедливо начали видеть в математике основной, наряду с экспериментом, метод изучения природы. Долгий период изучения постоянных величин подходил к завершению. Были созданы условия для возникновения теории переменных величин, символической алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений.

---

[1] *Ch. Clavius.* Euclidis Elementorum libri XV. Francofurti, 1615, p. 50.
[2] Там же, p. 51—52.