ТРЕТЬЯ ГЛАВА

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Открытие логарифмов

На всем протяжении XVI в. быстро возрастало количество приближенных вычислений, прежде всего в астрономии. С совершенствованием инструментов увеличивалась точность наблюдений, а вместе с нею и объем тригонометрических таблиц. Исследование планетных движений, необходимое для разработки новой системы Вселенной, требовало колоссальных расчетов. Выкладки Кеплера при установлении подлинной орбиты Марса стоили ему многих лет напряженного труда. Астрономам грозила реальная опасность утонуть в невыполнимых расчетах. Трудности возникали и в других областях; в финансовом и страховом деле нужны были, например, таблицы сложных процентов для различных значений процента и т. д. Главную трудность представляли умножение и деление многозначных чисел, особенно же тригонометрических величин.

С целью привести умножение к более легким сложению и вычитанию иногда пользовались таблицами синусов и косинусов согласно правилам

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right],$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right].$$

Была составлена таблица квадратов до 100 000, с помощью которой умножение можно было производить по правилу

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right].$$

Однако ни тот, ни другой прием не давали удовлетворительного решения вопроса. Его принесли с собой таблицы логарифмов.

Открытие логарифмов опиралось на хорошо известные к концу XVI в. свойства прогрессий. Связь между членами геометрической прогрессии $q, q^2, q^3, \ldots$ и арифметической прогрессией их показателей 1, 2, 3, ... не раз отмечалась математиками, о ней говорилось еще в «Псаммите» Архимеда. Другой предпосылкой было распространение понятия степени на отрицательные и дробные показатели, позволившее перенести только что упомянутую связь на более общий случай. Мы знаем (т. I, стр. 307), что Штифель сопоставлял прогрессии

$$\ldots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \ldots$$

и

$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Он же и многие другие авторы указывали, что умножению, делению, возведению в степень и извлечению корня в геометрической прогрессии соответствуют в арифметической — в том же порядке — сложение, вычитание, умножение и деление. Здесь уже скрывалась идея логарифма числа как показателя степени, в которую нужно возвести данное основание q, чтобы получить это число. Оставалось перенести знакомые свойства прогрессии с общим членом q^n на любые действительные показатели. Это дало бы непрерывную показательную функцию q^x, принимающую любые положительные значения, а также обратную ей логарифмическую. Но эту идею глубокого принципиального значения удалось развить через несколько десятков лет. Сам Штифель ограничился сообщением сделанных им наблюдений. Он писал: «Тут можно было бы написать целую новую книгу об удивительных свойствах чисел, но я должен здесь остановиться и пройти мимо с закрытыми глазами» [1].

Логарифмы были изобретены независимо друг от друга Непером, и лет на десять позднее Бюрги. Оба хотели дать новое удобное средство арифметических вычислений, но подошли к своей задаче по-разному. Непер кинематически выразил логарифмическую функцию и по существу вступил в почти неизведанную область теории функций. Бюрги остался на почве рассмотрения дискретных прогрессий. Впрочем, у обоих определения логарифма не похожи на современное. Мы начнем с более элементарной теории Бюрги.

Логарифмы Бюрги

Швейцарец Иост Бюрги (1552—1632) был высококвалифицированным механиком и часовых дел мастером, математику он изучил самостоятельно. Он состоял придворным часовщиком, а также мастером астрономических инструментов сначала в Касселе, затем с 1603 г. в Праге, где сблизился с Кеплером. Мы не знаем, когда в точности Бюрги приступил к созданию своих таблиц, но, вероятно, они были готовы около 1610 г. Бюрги долго медлил с их изданием, и они вышли в свет уже после двух трудов Непера; за эту задержку Кеплер впоследствии порицал своего друга. Книга Бюрги озаглавлена «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий, вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всяческих вычислениях» (Arithmetische und geometrische Progress — Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol, Prag, 1620). На самом деле упомянутое «наставление» долго оставалось неизвестным; оно было обнаружено и опубликовано лишь в 1856 г.

Бюрги — об этом он писал сам — исходил из соображений о соответствии между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифметической, которые он почерпнул, правда, не у Штифеля (так как не знал латыни), а у других коссических авторов, писавших по-немецки. Задача состояла в выборе прогрессии со знаменателем, достаточно близким к еди-

---

[1] *M. Stifel.* Arithmetica integra, Norimbergi, 1544, л. 249 об.

нице, с тем чтобы ее члены следовали друг за другом с интервалами, достаточно малыми для практических вычислений. Бюрги взял знаменатель 1,0001 и сопоставил числа 0, 10, 20, ..., $10n$, ... арифметической прогрессии с членами геометрической 10000000, 100010000, 100020001, ..., $10^8 \cdot 1{,}0001^n$, ... Первые числа, напечатанные красной краской, называются красными, вторые напечатаны черной краской и называются черными. Красные числа являются логарифмами черных, разделенных на 10^8, при основании $\sqrt[10]{1{,}0001}$. Множитель 10^8 введен для того, чтобы по возможности долго избегать дробей. Так как таблицы расположены по красным числам, то они представляют собой таблицы антилогарифмов (термин, введенный в этом смысле Валлисом, 1693). Поэтому для умножения и деления черных чисел чаще всего нужна интерполяция. Вычислены черные числа с девятью верными цифрами.

Красные числа следуют с интервалом в десять, за одним исключением. Таблица черных чисел начинается с 10^8, и Бюрги заканчивает ее черным числом 10^9, для которого с помощью интерполяции вычисляет «полное красное число» 230270,022. Это число применяется при делении a/b, когда $a<b$, подобно тому как в десятичных логарифмах добавляется целая характеристика, чтобы избежать отрицательной мантиссы. Именно, вместо a/b Бюрги в этом случае находит $\frac{a \cdot 10^9}{b}$: он складывает красные числа, соответствующие a и 10^9, вычитает из суммы красное число, соответствующее b, и по результату находит черное число с девятью десятичными знаками, дающее дробь a/b. Если $a > b$, Бюрги вычитает из красного числа для a красное число для b и находит черное число, соответствующее результату; полученное число дает восемь десятичных знаков дроби a/b.

Таблицы Бюрги не получили значительного распространения. Они не могли конкурировать с таблицами Непера, более удобными и к тому же к 1620 г. уже широко известными.

Логарифмы Непера

Первым изобретателем логарифмов был шотландский барон Джон Непер (1550—1617). Непер, после завершения образования в Эдинбурге и путешествия по Германии, Франции и Испании, в возрасте двадцати одного года навсегда поселился в семейном поместье близ Эдинбурга. Здесь в сельской тиши он занялся главным образом богословием и математикой, которую изучил по сочинениям Евклида, Архимеда, Региомонтана, Коперника и других ученых, среди них, быть может, Штифеля. В 1593 г. Непер, страстный противник католицизма, выпустил написанное в стиле геометрического трактата сочинение против римской церкви, доказывая в нем, что папа есть антихрист. Эта книжка доставила автору в XVII в. гораздо большую известность, чем его математические труды. Непер увлекался и астрологией.

К открытию логарифмов Непер пришел не позднее 1594 г., но лишь двадцать лет спустя опубликовал свое «Описание удивительной таблицы логарифмов» (Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Edinburgi, 1614), содержавшее определение неперовых логарифмов, их свойства и таблицы логарифмов синусов и косинусов от 0 до 90° с интервалом в 1′, а также разности этих логарифмов, дающие логарифмы тангенсов. Теоретические выводы и объяснения способа вычисления таблицы он изложил в другом труде,

Джон Непер
(с портрета, хранящегося в Эдинбурге)

подготовленном, вероятно, до «Описания», но изданном посмертно, в «Построении удивительной таблицы логарифмов» (Mirifici logarithmorum canonis constructio, Edinburgi, 1619). Упомянем, что в обоих сочинениях Непер рассматривает и некоторые вопросы тригонометрии. Особенно известны удобные для логарифмирования «аналогии», т. е. пропорции Непера, применяемые при решении сферических треугольников по двум сторонам и углу между ними, а также по двум углам и прилежащей к ним стороне.

В отличие от Бюрги, сопоставившего две дискретные прогрессии, Непер с самого начала вводил понятие логарифма для всех значений непрерывно меняющихся тригонометрических величин — синуса и косинуса. При тогдашнем состоянии математики, когда еще не было аналитического аппарата исчисления бесконечно малых, естественным и единственным средством для этого являлось кинематическое определение логарифма. Быть может, здесь не остались без влияния и традиции, восходившие к оксфордской школе XIV в. Мы приведем исходные определения из «Описания»:

«О п р. 1. Говорят, что линия растет равномерно, когда описывающая ее точка проходит в равные моменты равные промежутки.— О п р. 2. Говорят, что линия сокращается пропорционально, когда пробегающая по ней точка в равные моменты отсекает отрезки, сохраняющие постоянно одно и то же отношение к тем линиям, от которых они отсекаются.— О п р. 3. Говорят, что количества иррациональные, или невыразимые числом, определяются числами с наибольшим приближением, когда они определяются большими числами, отличающимися от истинных значений иррациональных количеств меньше, чем на единицу.— О п р. 4. Синхронными движениями называются те, которые происходят вместе и в течение одного и того же

Страница из «Описания удивительной таблицы логарифмов» Непера (Эдинбург, 1614)

Gr. 9

9 min	Sinus	Logarithmi	+ | — Differentia	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570095	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352353	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127137	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	18130301	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	18112014	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	18093758	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	18075533	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	18057318	133268	9867616	40
21	1624649	18172924	18039177	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	18021047	134226	9866671	38
23	1630389	18137654	18002948	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	17984880	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	17966842	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	17948835	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	17930859	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	17912913	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	17894997	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	17877114	138093	9862856	30 min

80 Gr. 80

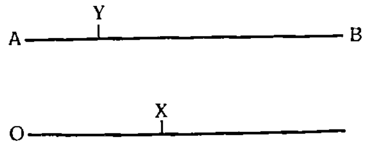


Рис. 5

времени. — Опр. 5 и постулат. Так как существуют движения как более медленные, так и более быстрые, чем всякое данное движение, то отсюда необходимо следует, что существует движение равнобыстрое всякому данному (которое мы определяем как движение ни более медленное, ни более быстрое, чем данное).— Опр. 6. Логарифмом всякого синуса называется, наконец, число, определяющее с наибольшим приближением линию, возрастающую равномерно, между тем как линия полного синуса убывает пропорционально до величины данного синуса, причем оба движения синхронны и вначале равнобыстры»[1].

Здесь в геометрическом выражении высказаны многие замечательные идеи, подробный разбор которых увел бы нас далеко. Мы отметим только своеобразную формулировку идеи о непрерывности в третьем определении и обратимся к основному, шестому определению логарифма.

Если изобразить полный синус, т. е. радиус круга, у Непера равный 10^7, отрезком AB, а линию синуса — отрезком $YB = y$ (рис. 5), то логарифмом y (обозначим его Ly) будет отрезок $OX = x$, проходимый точкой X, начинающей движение из O с постоянной скоростью v_0, за то самое время, в какое точка Y, одновременно выходящая из A с той же начальной скоростью v_0, проходит отрезок AY со скоростью, пропорциональной расстоянию, остающемуся до другого конца B, т. е. пропорциональной YB. На языке дифференциального исчисления

$$\frac{dx}{dt} = v_0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-v_0 y}{10^7},$$

т. е.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{10^7},$$

и, учитывая, что $y = 10^7$ при $x = 0$,

$$x = Ly = -10^7 \ln \frac{y}{10^7} = -10^7 \ln y + 10^7 \ln 10^7.$$

Как видно, неперов логарифм числа y не есть, как иногда пишут в учебниках анализа, натуральный логарифм этого числа: Ly выражается через $\ln y$ линейно. Многие свойства логарифмов Непера поэтому несколько отличаются от свойств логарифмов в нашем смысле слова. Главное, конечно, у них общее: если четыре числа образуют геометрическую пропорцию $y_1 : y_2 = y_3 : y_4$, то их логарифмы составляют арифметическую пропорцию $Ly_1 - Ly_2 = Ly_3 - Ly_4$, т. е. геометрической прогрессии чисел соответст-

[1] Цит. по примечанию И. Ю. Тимченко к книге *Ф. Кэджори*. История элементарной математики. Перевод И. Ю. Тимченко. Одесса, 1917, стр. 439—440.

вует арифметическая прогрессия логарифмов. Однако, поскольку $L1 = 10^7 \ln 10^7$, т. е. $L1$ не равен нулю, правила действий усложняются: так, например,

$$L(ab) = La + Lb - L1, \qquad L\frac{a}{b} = La - Lb + L1$$

и т. п. В примерах Непера, правда, $L1$ выпадает, но лишь потому, что в них вычисляются четвертая и средняя пропорциональные, например:

$$L\frac{ab}{c} = L(ab) - Lc + L1 = La + Lb - Lc.$$

Нулю равен неперов логарифм числа 10^7, т. е. полного синуса или радиуса. Этого и добивался Непер, имевший в виду прежде всего тригонометрические вычисления. Поскольку тригонометрические величины рассматривались еще не в отношении к радиусу, а как отрезки, выраженные в тех же единицах, что полный синус, последний входил в формулы и на него часто приходилось умножать и делить. Равенство нулю логарифма полного синуса представляло в таких условиях определенные преимущества. По мере уменьшения натуральных значений синуса неперов логарифм возрастает, а при синусе, равном нулю, обращается в бесконечность. В таблице Непера в строке, в которой в графе синуса обозначен 0, в графе логарифма синуса стоит слово Infinitum — «бесконечность».

Разумеется, Непер не записывал и не интегрировал приведенное выше дифференциальное уравнение, которое выражает кинематическое определение логарифма. Но фактически его прием составления таблиц равносилен приближенному численному решению дифференциального уравнения. Сначала находится весьма малый отрезок, проходимый точкой X, когда точка Y перемещается из начального положения A на расстояние 1, т. е. вычисляется $L9999999$. Опираясь на представление о мгновенной скорости и сравнивая скорости точек X и Y, Непер выводит, что

$$10^7 - y < Ly < \frac{10^7}{y}(10^7 - y)$$

и для $y = 9999999$ принимает в качестве логарифма среднее арифметическое чисел 1 и $\frac{10^7}{9\,999\,999} = 1{,}00000010000001\ldots$, так что $L9999999 = 1{,}00000005$ (с точностью до четырнадцатого знака). Здесь, как и всюду, Непер пользуется десятичными дробями. Далее для арифметической прогрессии логарифмов $x_n = 1{,}00000005n$ он находит соответствующую геометрическую прогрессию чисел

$$y_n = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots, 100.$$

Это нетрудно, так как здесь нужны только вычитания; $y_k = y_{k-1} - 0{,}0000001y_{k-1}$. Так получается, при подходящих округлениях, $L\,9999900$. Отношение числа 9999900 к 10^7 есть $1 - \frac{1}{10^5}$, и Непер переходит к вычислению логарифмов чисел $y'_n = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^n$ до $n = 50$, причем логарифм y'_1 уже известен. Аналогично применяются прогрессии $10^7\left(1 - \frac{1}{2\cdot 10^3}\right)^n$

и в особенно большом объеме $10^7\left(1-\frac{1}{10^2}\right)^n$. Числа y_n по мере надобности округляются, и с помощью оценки разности логарифмов близких чисел, основанной на приведенном выше неравенстве, вычисляются их логарифмы. Так Непер доходит до $L5000000$; дальнейшие выкладки не столь интересны.

Прием Непера в принципе совершенно правилен. Однако в его расчеты, вообще исключительно тщательные, на второй описанной стадии вкралась ошибка при вычислении y'_{50}. В результате восьмизначные логарифмы Непера должны быть увеличены примерно на $\frac{3}{8}\cdot 10^{-6}$ их величины. Например, для $L5000000 = 10^7 \ln 2$ он нашел 6931469,22 вместо 6931471,805599.

Мы уже подчеркнули, что логарифмы Непера не следует смешивать с натуральными. Если переписать зависимость между теми и другими в виде $\frac{Ly}{10^7} = \log_{1/e}\frac{y}{10^7}$, то можно сказать что неперовым логарифмам соответствуют логарифмы с основанием $1/e$, вернее, в силу указанной неточности, с основанием $1/e'$, весьма близким к $1/e$, $e'^{\,1-\frac{3}{8}\cdot 10^{-6}} \approx e$. Однако в системе Непера, как и у Бюрги, не было, строго говоря, основания логарифмов, поскольку логарифм единицы отличается от нуля. И позднее, когда уже давно перешли к десятичным и натуральным логарифмам, отнюдь не сразу было сформулировано определение логарифма, как показателя степени данного основания. Такое понимание логарифмов высказывали Валлис (1685), И. Бернулли (1694) и другие, и оно, как мы увидим, не было чуждо и самому Неперу. В руководствах оно появляется впервые, вероятно, у В. Гардинера (Tables of Logarithms, London, 1742). Впрочем, сам Гардинер использовал при этом бумаги преподавателя математики В. Джонса (1675—1749), который первый обозначил отношение окружности к диаметру буквой π (1706). Широкому распространению обыкновенного теперь определения логарифма более других содействовал Эйлер, который применил в этой связи и термин «основание».

Термин «логарифм» (logarithmus) принадлежит Неперу, он возник из сочетания греческих слов λόγος — отношение и число — ἀριθμός, которое означало «число отношения» (λόγου ἀριθμός), что напоминает о двойных, тройных, полуторных и иных целых или дробных отношениях древней и средневековой математики. Первоначально Непер пользовался другим термином: numeri artificiales — «искусственные числа» — в противоположность numeri naturales — «числам естественным».

Десятичные логарифмы

Таблицы Непера, приспособленные к тригонометрическим вычислениям, были неудобны для действий с данными числами. Во-первых, таблицы были расположены по значениям синусов от 0 до 90° и косинусов, а не по натуральному ряду чисел. Во-вторых, при действиях с числами по таблицам Непера приходилось еще оперировать с $L1$. Чтобы устранить эти недостатки, Непер предложил составить таблицы логарифмов, приняв за логарифм единицы нуль, а за логарифм десяти 10^{10}, или, что сводится к тому же, просто единицу. Это предложение он сделал в ходе обсуждения с посетившим его в 1615 г. профессором математики Грешем Колледжа в Лондоне Генри Бригсом (1561—1631), который и сам задумывался, как усовершенствовать таблицы логарифмов. Заняться осуществлением своего плана Непер не мог из-за пошатнувшегося здоровья, но указал идею двух вычислительных приемов, развитых далее Бригсом.

Бригс опубликовал первые результаты своих кропотливых вычислений — «Первую тысячу логарифмов» (Logarithmorum chilias prima, Londini, 1617) в год смерти Непера. Здесь даны были десятичные логарифмы чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками. Позднее, будучи профессором в Оксфорде, он выпустил «Логарифмическую арифметику» (Arithmetica logarithmica, Londini, 1624), содержащую четырнадцатизначные логарифмы чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Оставшийся пробел был восполнен голландским книготорговцем и любителем математики Андрианом Флакком (1600—1667), опубликовавшим как второе издание труда Бригса и под тем же названием (Гауда, 1628) десятизначные таблицы от 1 до 100 000 вместе с такими же логарифмами всех шести тригонометрических линий через одну минуту.

Несколько ранее семизначные десятичные таблицы логарифмов синусов и тангенсов вычислил коллега Бригса по Грешем Колледжу, воспитанник Оксфордского университета Эдмунд Гунтер (1581—1626), опубликовавший их в «Своде треугольников» (Canon triangulorum, Londini, 1620). Имя Гунтера, который, между прочим, ввел слова косинус и котангенс, нам еще встретится в связи с изобретением логарифмической линейки.

Таблицы Флакка легли в основу всех последующих, причем в них было внесено немало структурных изменений и поправок: у Флакка имелось еще 173 ошибки в первых семи знаках, а всего более 600. Избавиться от ошибок оказалось нелегким делом. Еще в известных таблицах уроженца Словении Георга Вега (1754—1802), впервые напечатанных в Вене в 1783 г. и многократно переиздававшихся вплоть до наших дней, было пять ошибок. Первые безошибочные таблицы Вега вышли в обработке немецкого математика К. Бремикера (1804—1877) в Берлине в 1857 г.

Мы не можем входить в детали двух вычислительных приемов, употребленных Бригсом. Оба они, как говорилось, восходят к Неперу. Один из них основан на том, что характеристика (термин Бригса), т. е. целая часть логарифма целого числа, на единицу меньше количества цифр в самом числе. С другой стороны, характеристика десятичного логарифма $a^{10^{14}}$, где $1 < a < 10$ дает четырнадцать первых знаков логарифма a. Чтобы найти эти знаки, нужно поэтому только знать количество цифр числа $a^{10^{14}}$, а это возможно и без вычисления самих цифр, что было бы немыслимо. Дело в том, что число цифр произведения двух множителей равно сумме чисел их цифр или на единицу меньше, а судить, какой из двух случаев имеет место, можно по первым цифрам множителей. Так, Бригс вычислил

$$\log 2 = 0{,}30102999566398$$

и еще некоторые.

Однако большинство десятичных логарифмов простых чисел Бригс нашел по-другому — с помощью извлечения квадратных корней. Важную роль в его расчетах играло предельное соотношение, которое мы запишем в современной форме:

$$\ln a = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Поскольку

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10},$$

то

$$\log a \approx \frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{m(\sqrt[m]{10}-1)}$$

при весьма больших m и n. Бригс по существу пользовался такой процедурой, причем брал m и n в виде степеней двойки. О замечательных результатах Бригса, относящихся к интерполированию, мы расскажем далее (см. стр. 156).

Как видно, открытие Непера в первые же годы приобрело исключительно широкую известность. Составлением логарифмических таблиц и совершенствованием их занялись очень многие математики, помимо уже названных, среди них Кеплер (Марбург, 1624—1625), применивший логарифмы к построению новых таблиц движений планет (1627). В приложении ко второму изданию «Описания» Непера (1618) было вычислено и несколько натуральных логарифмов; в нем можно усмотреть подход к введению предела $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$. Быть может, это дополнение принадлежит В. Отреду. Вскоре за тем лондонский учитель математики Джон Спейделл издал таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 и синусов под названием «Новые логарифмы...» (New Logarithmes..., London, 1619). Термин «натуральные логарифмы» ввели П. Менголи (1659) и вслед за ним Н. Меркатор (1668).

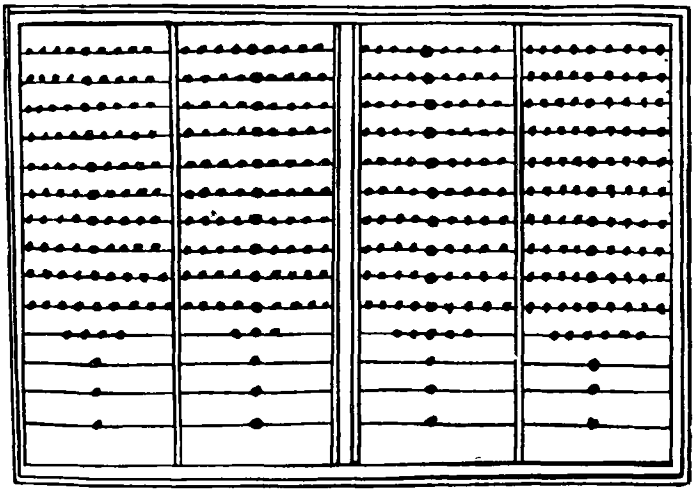
Практическое значение всех этих работ было очень велико. Гигантский труд авторов таблиц и их виртуозная вычислительная сноровка заслуживают глубокого уважения. Но открытие логарифмов имело также глубочайшее теоретическое значение. Еще в рассматриваемое время оно вызвало к жизни исследования, о которых не могли и мечтать первые изобретатели, преследовавшие цель только облегчить и ускорить арифметические и тригонометрические выкладки с большими числами. Напомним еще раз, что Непер открыл путь в область новых трансцендентных функций— путь, на котором следующим этапом явилось введение показательной функции (Ньютон, Лейбниц), и что он дал первый образец кинематической трактовки и числового решения задачи, выражающейся обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Во второй трети XVII в. несколько математиков — Григорий Сен Венсан, Ферма, Броункер, Менголи — установили связь между логарифмом и квадратурой гиперболы, тем самым введя логарифмическую функцию уже не кинематически, а в образе площади. Меркатор на этой основе открыл и аналитическое представление логарифма в форме бесконечного степенного ряда. Если к сказанному добавить хотя бы лишь тот факт, что в самом начале XVIII в. Лейбниц и И. Бернулли поставили вопрос о природе логарифмов отрицательных чисел, то станет ясным, насколько мощные и разнообразные стимулы сообщило развитию анализа открытие Непера, порожденное потребностями в новых средствах вычислений.

Русские счеты

К давно известному абаку (см. т. I, стр. 256) в Средние века добавился счет на линиях при помощи одинаковых подвижных жетонов, описание которого встречается в многочисленных учебниках арифметики, в том числе и в русских рукописях XVII в. На столе или доске перед вычислителем имелось несколько горизонтальных линий для обозначения единиц, десятков, сотен и т. д., считая вдаль от себя, перечерченных перпендикулярными линиями. В столбцах слева обозначались жетонами числа, над которыми производится действие. На каждую линию клали до четырех жетонов, а жетон между двумя линиями означал пять единиц того разряда, который откладывался на более близкой к вычислителю прямой. Промежуточные и окончательный результаты наносили в свободные правые столбцы. Иногда некоторые отделения служили для действий над дробями $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ или для денежных расчетов и т. п. Счет на линиях имел большое распространение в хозяйстве и в быту. Производство жетонов было делом специальной отрасли ремесла, достигавшей иногда высокого расцвета, как, например, в Нюрнберге в XVI—XVII вв. Лейбниц предпочитал этот счет письменным вычислениям, он начал выходить из употребления в XVIII в.

В некоторых странах существовали различного вида счеты, сходные с русскими. Мы уже рассказывали о китайском суаньпане и японском саробане (см. т. I, стр. 158), в которых, как и при счете на линиях, сохранялись еще следы старинного пятеричного счета. В России счет на линиях, именовавшийся «счетом костьми», пользовался меньшей популярностью, чем «дощаной счет» — главное средство вычислений государственных чиновников и торговцев. Дощаной счет был приспособлен к особенностям налогового дела и землемерия, в котором основные единицы поверхности делились на более мелкие меры в отношениях 1 : 2 : 4 : 8 : ..., а также 1 : 3 : 6 : 12 : ... Долгое время налог взимался в зависимости от количества и качества земельной площади, которую по определенным коэффициентам переводили в основные единицы учета — «сохи». В устройстве счетов приняты были во внимание также особенности валюты. В XVI в. в России установилась единая монетная система, в которой, помимо 1 рубля = 100 копейкам, в ходу были 1 гривенник = 10 копейкам, 1 алтын = 3 копейкам, 1 деньга = $^1/_2$ копейки и 1 полушка = $^1/_2$ деньги. Соотношения 1 : 3 и 1 : 2 сохранялись в рус-

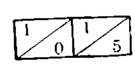
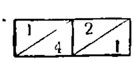
«Дощаной счет» с четырьмя счетными полями
(рисунок в рукописи № 1664 Погодинского собрания Государственной публичной библиотеки в Ленинграде; список 1691 г.)



ской метрологии вплоть до Октябрьской революции. Например, 1 пуд=40 фунтам, а 1 фунт = 32 лотам = 96 золотникам, 1 сажень = 3 аршинам = =48 вершкам.

Старинные русские счеты состояли из четырех полей, попарно соединенных в двух ящиках. В каждом поле параллельно протягивались веревки или проволоки. Для счета целых чисел нанизывалось по девять или десять костей, на остальных веревках имелось по три, четыре, шесть и, наконец, по одной кости. Особые руководства подробно объясняли на примерах, как пользоваться дощаным счетом. В 1646 г. поземельный налог был заменен подворным, а затем (1722) и подушным. Счеты изменились и приняли тот вид, который имеют поныне. Осталось одно поле, и были устранены проволоки для действий с двоичными и двоично-третными дробями. Сохранены были только две проволоки по четыре кости в каждой для денежного счета на «деньги» и «полушки» (монеты по $^1/_2$ и $^1/_4$ копейки) и на полтины и четвертаки (монеты по $^1/_2$ и $^1/_4$ рубля, т. е. по 50 и 25 копеек). Русские счеты не выходят из обихода и теперь: они дешевы и при употреблении производят гораздо меньше шума, чем более быстрые арифмометры и комптометры.

Палочки Непера

Поиски новых вычислительных устройств занимали многих математиков XVII в. Непер в «Двух книгах о рабдологии или счете с помощью палочек» (Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo, Edinburgi, 1617) [1] описал действия на счетном приборе, составленном из 10 или более палочек — прямых параллелепипедов, на боковых гранях которых записаны произведения чисел от 1 до 9 на числа от 1 до 9 же; кроме того, есть еще палочка для нулевого множителя. Каждому множимому соответствует своя палочка; произведения пишутся сверху вниз в квадратиках, разделенных диагоналями. Чтобы умножить, скажем, 23 на 57, нужно приложить палочки с заглавными цифрами 2 и 3 и в строке, где множителю 5 соответствуют произведения 2·5 и 3·5  , найти с помощью сложения произведение 23·50, т. е. 1150, а в строке, где множителю 7 соответствуют произведения 2·7 и 3·7  , найти произведение 23·7=161. После этого складываются 1150+161=1311. Деление с помощью этого прибора менее удобно.

Логарифмическая линейка

Палочки Непера некоторое время успешно применялись в странах западной Европы, но более широкое будущее предстояло другому изобретению, соединявшему заключенную в этом инструменте идею автоматического и в сущности графического нахождения произведения данных мно-

---

[1] Рабдология — значит наука о палочках: греческое ῥαβδίον — палочка.

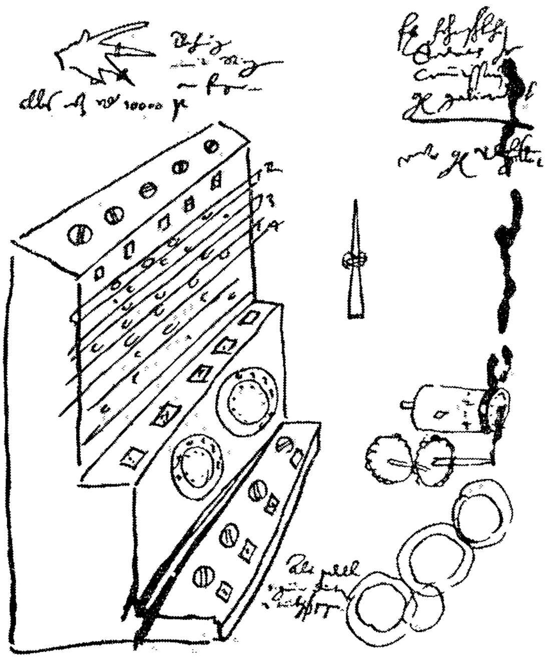
жителей со свойствами открытых Непером — логарифмов. Речь идет о логарифмической линейке. Основной шаг был сделан Э. Гунтером, придумавшим самую логарифмическую шкалу; это изобретение было описано лондонским адвокатом и любителем математики Эдмундом Уингейтом (1593—1656) в одном сочинении, напечатанном в Париже в 1624 г. Однако, чтобы пользоваться шкалой Гунтера, нужно было иметь циркуль, для откладывания отрезков. В. Отред усовершенствовал еще примитивный прибор, предложив употреблять две одинаковые шкалы, одна из которых перемещается вдоль другой. («Круги отношения и горизонтальный инструмент» — «The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument», London, 1632). Когда через тридцать лет Сет Партридж (1662) заставил одну шкалу скользить в пазу другой, логарифмическая линейка, именовавшаяся «двойной шкалой отношений», приобрела в сущности современный вид.

Вычислительные машины

Развитие машинной техники, естественно, наводило на мысль построить для вычислений и механические устройства. Палочки Непера, упрощавшие умножение и деление, не облегчили сложения и вычитания, так же как логарифмические таблицы. Первую попытку механизировать все четыре главные арифметические операции и свести вмешательство вычислителя к минимуму предпринял профессор Тюбингенского университета, друг Кеплера, Вильгельм Шикард (1592—1635) — астроном и картограф, ориенталист и математик, безвременно скончавшийся в одну из чумных эпидемий, нередко поражавших тогда Европу. О своем изобретении Шикард известил Кеплера 20 сентября 1623 г., а в письме от 25 февраля 1624 г. дал его описание и чертежный набросок.

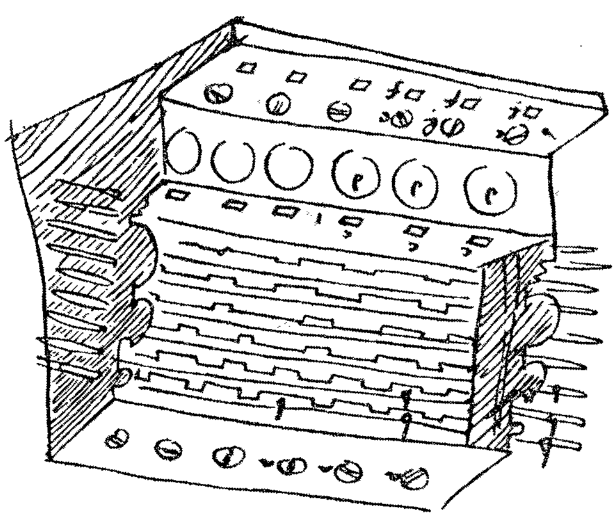
Машина Шикарда уже имела много общего с будущими арифмометрами. Она представляла собой комбинацию цилиндров с зубчатыми цифровыми колесами, вращение которых в ту или иную сторону производило операции сложения и вычитания. В ней существовал и механизм переноса десятков, заставлявший при полном повороте одного колеса на десять делений повернуться следующее всего на одно деление; для этого Шикард пользовался такими же колесами, у которых снимались девять зубцов из десяти. Для умножения и деления служили специальные цилиндры, аналогичные палочкам Непера и помещенные в особой части машины. Цифры можно было прочитать в окошечках на внешней оболочке. Приводилась в действие машина, подобно современному автоматическому телефонному аппарату. Во втором из упомянутых писем Шикард сообщал, что велел изготовить для Кеплера ее экземпляр, который, к сожалению, погиб во время пожара. Ни один экземпляр этого инструмента, который автор называл «арифметической машиной», не сохранился, но недавно она была реконструирована по описаниям, и теперь ее образчики можно увидеть в ратуше Тюбингена и в музее г. Вейля — родины Кеплера.

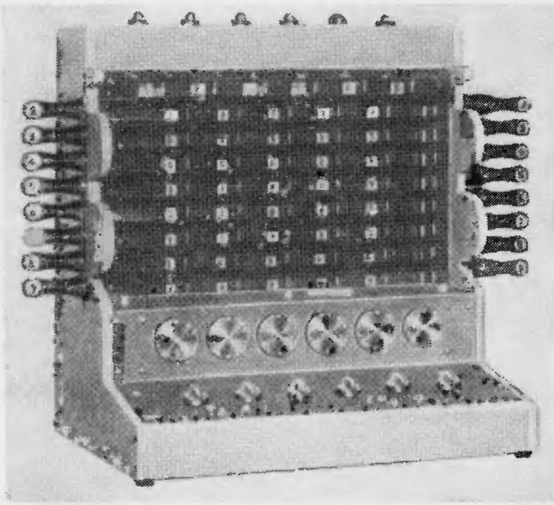
Другая суммирующая машина была создана совершенно независимо от Шикарда молодым Паскалем. Поводом к тому послужило желание облегчить большие и долгие финансовые вычисления, которые пришлось производить по поручению правительства его отцу, привлекшему на помощь и сына. В 1642 г. Б. Паскаль разработал конструкцию арифметической машины, принципы которой те же, что у Шикарда. В королевском патенте 1645 г. указывалась, как главная часть изобретения, механизация переноса



Эскиз В. Шикарда его счетной машины:
вид сбоку и основные узлы
(из записной книжки изобретателя)

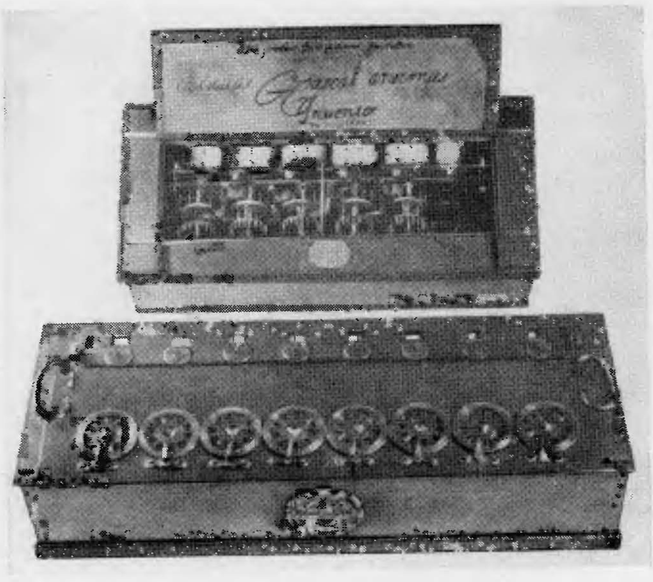
Эскиз В. Шикарда его счетной машины
(хранится среди бумаг Кеплера)





Счетная машина В. Шикарда (реконструкция)

Счетная машина Б. Паскаля, экземпляр 1652 г.
(Национальный музей искусств и ремесел в Париже)



десятков. Своему изобретению Паскаль придавал большое значение, подчеркивая безошибочность машины, простоту обращения с нею, обусловленную автоматизмом действия, и другие достоинства. Преодолевая большие технические трудности, он с помощью опытных мастеров изготовил несколько десятков успешно работавших экземпляров машины, которые можно было купить на квартире у его знакомого профессора Французского коллежа Роберваля. Отдельные экземпляры машины хранятся в Париже и других местах.

Наконец, в 1671 г., не зная ничего о полностью забытом тем временем изобретении Шикарда, новую конструкцию вычислительной машины предложил Лейбниц, внесший затем в нее дополнительные улучшения и описавший ее в записках Берлинской академии — Miscellanea Berolinensia, 1710 г. По сравнению с обоими своими предшественниками Лейбниц существенно механизировал действия умножения и сложения. Одна из его машин хранится в Ганноверской библиотеке.

Несмотря на старания таких великих умов, как Паскаль и Лейбниц, преодолевавших принципиальные трудности в создании ручных суммирующих машин, их изобретения были еще далеки от того, чтобы найти многих потребителей и чтобы ремесленное изготовление их стало коммерчески выгодным. Отдельные технические усовершенствования, предложенные в XVIII в., были недостаточны. Только в последней четверти прошлого века были сконструированы современные высококачественные ручные арифмометры и началось их массовое фабричное производство.