ПЯТАЯ ГЛАВА

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предыстория теории вероятностей

Задачи, которые оказали существенное влияние на зарождение и первоначальное развитие теории вероятностей, возникали в статистике, в практике страховых обществ, при обработке результатов астрономических наблюдений, в различных азартных играх. Разработка вероятностных вопросов была тесно связана с комбинаторикой. Наконец, вопросы, касающиеся случайности и необходимости и непосредственно связанные с понятием вероятности, всегда стояли в философии (ср. стр. 91 и 96).

Вопросы вероятностного характера возникали и во многих других сферах деятельности человека. Многие из этих вопросов возникали в далекой древности, но в то время они не стимулировали развитие теории вероятностей, так как возникали спорадически и, главное, не были существенными ни в развитии науки, ни в жизни общества.

Большинство первых задач теории вероятностей было связано с азартными играми. Мы и сейчас при изложении начал теории вероятностей, в педагогических целях, часто обращаемся к играм в кости или в карты, ибо в этих случаях легко подсчитать вероятности тех или иных возможных исходов. Азартные игры доставляли здесь удобные схемы и модели, а отчасти и терминологию, позволявшие описать многие вероятностные явления и задачи. Конечно, и сами игры выдвигали задачи, стимулировавшие развитие теории вероятностей, хотя это и не было решающим.

Одной из первых задач, которую следует отнести к теории вероятностей, являлся подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких игральных костей. Первые известные подсчеты для случая трех костей относятся к X—XI вв. Еще до XV в. встречались поэмы, в которых каждому исходу при бросании трех игральных костей соответствовал определенный стих. Таких стихов было 56. Действительно, 56 — это число всех возможных исходов при бросании, если не учитывать порядок появления чисел на костях.

Самая ранняя известная нам попытка подсчитать число возможных исходов при бросании трех игральных костей, включая и перестановки, встречается в XIII в. Но и значительно позже многие авторы делали аналогичные подсчеты неверно.

В 1477 г. Бенвенуто д'Имола в Венеции издал «Божественную Комедию» Данте со своими примечаниями. VI часть книги «Чистилище» начинается словами:

«Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;
Другого провожает весь народ;
Кто спереди зайдет, кто сзади тронет,
Кто сбоку за себя словцо ввернет.
А тот идет и только ухо клонит;
Подаст кому,— идти уже вольней.
И так он понемногу всех разгонит.
Таков был я в густой толпе теней,
Чье множество казалось превелико,
И, обещая, управлялся с ней» [1].

В примечании к этому месту д'Имола, говоря об играх в кости, подсчитывает количество различных исходов при бросании трех игральных костей, но он допускает ошибку, считая, что четыре (и семнадцать) очка могут выпасть только одним способом. На самом деле таких способов в обоих случаях по три.

Подсчетом количества исходов при бросании нескольких игральных костей занимались Д. Кардано, Н. Тарталья и другие крупные математики XVI в. Они отчетливо различали все случаи как с повторениями, так и без повторений. Наиболее полный анализ этой задачи был произведен Г. Галилеем в «Рассуждении об игре в кости» (Considerazione sopra il giuoco dei dadi. Время написания неизвестно, впервые опубликовано в 1718 г.)

Весьма важной явилась задача о справедливом разделении ставки между двумя игроками, если игра прервана до выигрыша одним из игроков определенного числа партий или очков. Эта задача решается в энциклопедическом труде Луки Пачоли, изданном в 1494 г. (см. т. I, стр. 286), но была известна и ранее: она имеется в разных занимательных вариантах и учебниках арифметики еще в XIII в. Ставка, по Пачоли, должна быть разделена пропорционально набранным очкам, т. е. если один партнер A к моменту прекращения игры выиграл p, а другой B выиграл q партий, то ставка должна быть разделена между A и B в отношении $p:q$.

Кардано в «Практике общей арифметики» (Practica Arithmeticae generalis, Mediol., 1539) обоснованно критиковал решение Пачоли, но верного решения этой задачи сам не нашел. Он предлагал делить ставку в отношении $(1 + 2 + 3 + \ldots + (s - q)) : (1 + 2 + 3 + \ldots + (s - p))$, где s — количество партий, до которого должна была продолжаться игра по условию, а p и q — количества партий, выигранных партнерами. Неверно решал эту задачу и Тарталья.

При решении других задач вероятностного характера в работе «Об азартной игре» (De ludo aleae), увидевшей свет только в 1663 г., Кардано фактически пользовался уже теоремами сложения и умножения вероятностей. Он близко подошел здесь к так называемому классическому определению вероятности и в связи с одной частной задачей высказал положение, что при постоянном повторении бросаний теоретический подсчет подтверждается на практике. Не позднее чем четверть века спустя после

---

[1] *Данте.* Божественная Комедия. Чистилище. Перевод М. Лозинского. М.— Л., 1950, стр. 167.

выхода этого сочинения Я. Бернулли установил носящий его имя закон больших чисел.

Учет ошибок наблюдений всегда беспокоил исследователей. Галилей, обсуждая в «Диалоге о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» (Dialogo ... sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico, e copernicano, 1632) вопрос о расстоянии до Новой звезды 1572 г., сделал очень ценные заключения. Он пришел к выводам, что 1) ошибки при измерениях неизбежны, 2) вероятности ошибок разного знака одинаковы, 3) вероятность ошибки увеличивается с уменьшением ошибки и 4) около истинного результата скапливается наибольшее количество результатов наблюдений. В этих выводах Галилея по существу содержатся начала классической теории ошибок, развитой много спустя П. Лапласом и К. Гауссом.

На этих отдельных задачах и вопросах, а также в практике статистики и страхования и в других областях вырабатывались общие вопросы и методы теории вероятностей.

Успехи комбинаторики

Занимаясь задачами теории вероятностей, математики, естественно, встречались и с вопросами комбинаторного характера, которые в другой связи возникали и ранее. Например, Тарталья определил число различных сочетаний из n элементов по m (без повторений), которое мы обозначаем вслед за Эйлером (1778, опубл. 1806) символом $\binom{n}{m}$ или, как многие математики XIX в., C_n^m от слова combinasion, которое употреблял уже Паскаль. Этот же результат был вновь найден парижским преподавателем математики Пьером Эригоном (1634) и затем (1656) преподавателем же в Лувене и Антверпене Андре Таке (1612—1660), учебники которого по арифметике и геометрии пользовались большим распространением в XVII и XVIII вв. Между прочим, в «Теории и практике арифметики» (Arithmeticae theoria et praxis, Lovanii, 1656) Таке впервые употребил термин «перестановка» (permutatio), вошедший в обиход благодаря Я. Бернулли. Упомянем, что обработки Таке «Начал» Евклида и теорем о шаре и круглых телах Архимеда (Elementa geometriae planae et solidae, Antverpiae, 1654) вышли в русском переводе И. Сатарова под названием «Эвклидовы элементы...» и «Архимедовы теоремы...» (СПб., 1739—1745).

Важную роль в развитии комбинаторики сыграл «Трактат об арифметическом треугольнике» (Traité du triangle arithmétique, 1654; опубл. посмертно, Париж, 1665) Б. Паскаля, который записал таблицу сочетаний в треугольной форме, как показано на следующей странице.

Здесь в пересечении l-й строки и k-го столбца стоит число C_{l+k-2}^{k-1}, или, что то же, число C_n^m находится в пересечении $(m+1)$-го столбца и $(n-m+1)$-й строки. В довольно сходной форме такая таблица, как таблица биномиальных коэффициентов, встречалась уже ранее и в странах Азии (т. I, стр. 174 и 216) и в Европе: у Петра Апиана (1527), М. Штифеля (1544) и Н. Тартальи (1556) — у последнего в виде четырехугольника, строки которого образуют последовательности фигурных чисел (т. I, стр. 301).

Аддитивное рекуррентное соотношение между числами этих таблиц,

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Арифметический треугольник Паскаля

также было давно известно. Французский математик П. Эригон во втором томе своего «Математического курса» (Cursus mathematicus, Parisiis, 1634—1637), изданного параллельно на латинском и французском языках, сделал следующий шаг вперед, установив, что

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Впрочем, это мультипликативное представление получило бо́льшую известность только благодаря «Трактату» Паскаля, который к тому же впервые доказал его общим образом с помощью принципа полной математической индукции. Он показал, что этот закон имеет место для начальных строк, а также, что из справедливости этого закона для n-й строки вытекает его выполнимость для $(n+1)$-й строки, а значит, закон справедлив для всех строк. Наряду с аддитивным соотношением между числами сочетаний это мультипликативное выражение принадлежит в комбинаторике к основным. Ньютон, отправляясь от такого выражения, пришел к своему знаменитому биномиальному бесконечному ряду (см. стр. 228).

Сам по себе результат Эригона и Паскаля не был новым: мультипликативное представление C_n^m впервые дал в своей арифметике, написанной на древнееврейском языке (1321), Леви бен Гершон (ср. т. I, 325). Здесь же содержались правила вычисления числа перестановок $P_n = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$, которые Леви бен Гершон вывел с помощью полной индукции и размещений A_n^m. Однако эти открытия провансальского математика не получили широкого распространения. Принцип полной индукции вновь появляется у Мавролико (1575), у которого, возможно, он был заимствован Паскалем, высказавшим его с совершенной отчетливостью. В неявном виде этот принцип восходит к древним грекам, например к «Началам» Евклида.

В «Трактате» Паскаля рассмотрены и некоторые другие свойства сочетаний, их применение к изучению фигурных чисел, а также к задачам теории вероятностей. Следует добавить, что такие же результаты независимо были получены Ферма.

Термин «комбинаторика» восходит к «Рассуждению о комбинаторном искусстве» (Dissertatio de arte combinatoria, Lipsiae, 1666) Лейбница, которое и положило начало этому отделу математики как самостоятельной науке и содержало ряд теорем о сочетаниях и перестановках, в том числе циклических. Тем же кругом задач занимались Бернар Френикль де Бесси в «Резюме о соединениях» (Abrégé des combinaisons, опубл. 1729) и Валлис в «Рассуждении о сочетаниях, перестановках и т. д.» (Discourse of combinations, alternations ets., 1685). В работе Френикля де Бесси впервые изучаются перестановки с повторениями. Наиболее полное изложение комбинаторики в XVII в. дал во второй части «Искусства предположений», изданного в 1713 г., через восемь лет после смерти автора (см. стр. 94), Яков Бернулли; здесь впервые (после Леви бен Гершона) были изучены и размещения из n элементов по m, в которых соединения различаются не только по составу, но и по порядку элементов:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = C_n^m P_m.$$

При изучении свойств сочетаний и фигурных чисел Я. Бернулли встретился с суммированием ряда натуральных степеней натуральных чисел $S_m = \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$. Выражения для S_1, S_2, S_3 были известны еще грекам, S_4 нашел Ибн ал-Хайсам. Уже встречавшийся нам ульмский математик И. Фаульгабер привел суммы сначала (1617) для первых одиннадцати, а затем в «Школе алгебры» (Academia algebrae, Ulmi, 1631) и для семнадцати степеней. При этом он, вероятно, обнаружил постоянство m-й разности x^m, — в случае $\Delta^{20}(x^{20})$ он, во всяком случае, указал на это обстоятельство. Эти, как и другие аналогичные, наблюдения над свойствами арифметических рядов высших порядков, принадлежат, собственно, к исчислению конечных разностей, которое начало оформляться в отдельную науку лишь позднее (ср. стр. 157 и т. III, гл. 6). Ферма, по-видимому, располагал уже в 1636 г. общим правилом суммирования ряда S_m, но не изложил свой прием письменно. В «Искусстве предположений» Я. Бернулли, выписав сначала все S_m от $m = 1$ до $m = 10$, привел общее выражение

$$S_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{2}\frac{m}{1}An^{m-1} +$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}Bn^{m-3} + \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}Cn^{m-5} +$$
$$+ \frac{1}{8}\frac{m(m-1)\ldots(m-6)}{1\cdot2\cdot3\ldots7}Dn^{m-7} + \ldots,$$

где показатели нисходят до n^2 или n. Числа A, B, C, D, ... представляют собой коэффициенты при n в разложениях для четного показателя S_{2m}, а именно:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad E = \frac{5}{66}, \ldots$$

Восемь первых таких чисел вычислил фактически в «Школе алгебры» Фаульгабер, но лишь Я. Бернулли выделил класс этих чисел и дал рекуррентное правило, позволяющее их последовательно вычислять: сумма всех коэффициентов в выражении S_m равна единице. Эйлер назвал числа $A, B, C, \ldots$, взятые с положительным знаком, по имени Бернулли и показал их важные свойства и применения в теории конечных разностей. Теперь числами Бернулли нередко называют числа B_m, определяемые формулой

$$(B+1)^m - B^m = m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ B_0 = 1),$$

в которой после разложения двучлена B^r заменяют на B_r; здесь числа $B_2, B_4, B_6 \ldots$ совпадают с числами $A, B, C, \ldots$ самого Я. Бернулли, $B_1 = 1/2$, а $B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$.

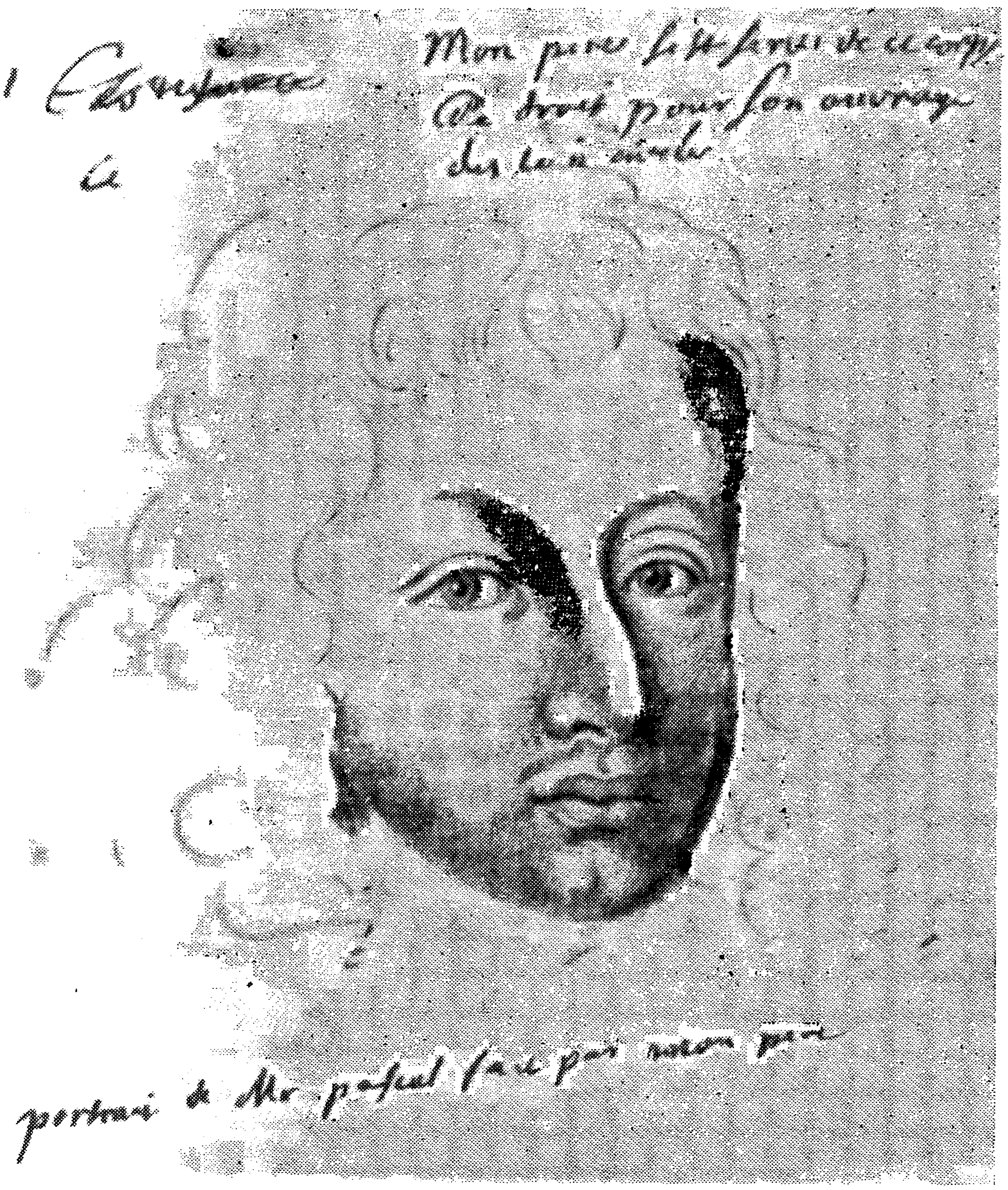
Вероятностные задачи Паскаля и Ферма

До середины XVII в. в теории вероятностей не было никакого общего метода решения задач, не говоря уже о цельной математической теории. Умели только решать отдельные задачи, но был собран уже довольно обширный материал в различных областях человеческой деятельности. В середине XVII в. в разработку вопросов теории вероятностей были вовлечены крупнейшие ученые, в первую очередь Паскаль, Ферма и Гюйгенс.

Блез Паскаль (1623—1662) был разносторонним математиком, физиком — кто не знает «закон Паскаля», столь важный в гидротехнике, а также философом, религиозным мыслителем, мужественно боровшимся с иезуитами, и блестящим стилистом. Б. Паскаль родился в семье Клермон-Ферранского судьи Этьена Паскаля (1588—1651). В 1631 г. семья переселилась в Париж, где Этьен Паскаль вошел в кружок местных математиков и физиков. Этот любитель не был лишен научных дарований; его имя носит впервые изученная им «улитка Паскаля» — геометрическое место точек, лежащих на прямых пучка с центром на данной окружности так, что они удалены на постоянное расстояние по обе стороны от точек пересечения прямых и окружности. Это — кривая четвертого порядка. Дарование сына, намного превосходившего отца, проявилось очень рано, и еще мальчиком он вместе с отцом стал посещать ученые собрания. Имя Блеза Паскаля нам уже встречалось и встретится еще много раз. Сейчас упомянем только, что Блез в возрасте шестнадцати лет доказал теорему проективной геометрии, носящую его имя, а в восемнадцать лет изобрел суммирующий механизм.

В 1654 г. между Паскалем и Ферма возникла переписка по поводу ряда задач, в том числе и о разделении ставки. В этой переписке оба они, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению этой задачи. При решении они выработали вероятностный подход, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Метод решения Ферма можно установить из письма Паскаля к нему от 24 августа 1654 г. Письмо Ферма, в котором он излагает свой способ решения, не сохранилось. Решалась следующая задача. Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?



Портрет молодого Блеза Паскаля, нарисованный его другом Ж. Дома́ (Национальная библиотека в Париже)

Ферма рассуждает следующим образом. Игра может продолжаться максимально еще четыре партии. Как могут протекать эти партии? Ферма составляет следующую таблицу, где выигрыш партии для A обозначается знаком «плюс» а для B — знаком «минус».

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	−	−	−	+	−
+	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−	−
+	+	−	+	+	−	+	+	−	−	+	−	+	−	−	−
+	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−

Из 16 возможных, первые 11 исходов благоприятны для выигрыша A всей встречи, а для выигрыша B благоприятны только 5 последних исходов. Следовательно, 11/16 ставки должен получить A, а B должен получить 5/16. Здесь наглядно видно, что Ферма предлагает разделить ставку про-

порционально вероятности выигрыша всей встречи (с нею и всей ставки). Паскаль решает задачу о разделении ставки на основе изучения свойств таблицы биномиальных коэффициентов, приведенной в его «Трактате об арифметическом треугольнике». Он складывает количество партий, недостающих игрокам A и B, и берет ту строку таблицы, в которой количество членов равно найденной сумме. Тогда доля игрока A будет равна сумме членов найденной строки начиная от 1, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку B, а доля игрока B равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равным числу партий, недостающих игроку A. Например, игроку A недостает три партии, а игроку B — четыре партии, $3 + 4 = 7$. Выписываем строку, в которой находится семь чисел. Это будет: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Доля игрока A будет $1 + 6 + 15 + 20 = 42$, а доля B — $1 + 6 + 15 = 22$. Следовательно, ставку нужно разделить в отношении $42/22 = 21/11$. При таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть всю ставку для игроков A и B.

Отметим еще, что Паскаль предполагал написать книгу «Математика случая», очевидно имея в виду систематизировать полученные им самим и Ферма результаты.

Теория вероятностей Гюйгенса

Первым руководством по теории вероятностей была книга великого голландского ученого Христиана Гюйгенса (1629—1695). Гюйгенс родился в Гааге в семье дипломата и поэта Константина Гюйгенса. Он обучался в университетах Лейдена и Бреды юриспруденции, но увлекся математикой и физикой. Этими занятиями руководил Франс ван Схоотен, связавший его с Декартом и Мерсенном. Гюйгенс работал в Гааге и продолжительное время в Париже, где с 1666 г. стал по предложению министра Кольбера первым президентом Академии наук.

Заслуги Гюйгенса в организации всей работы Академии, которой он руководил пятнадцать лет, очень велики; эти годы были весьма плодотворны и в научном творчестве Гюйгенса. Но когда в 1681 г. он для лечения выехал в Гаагу, ему пришлось расстаться с Францией навсегда: здесь в то время готовилась уже отмена Нантского эдикта 1598 г., предоставлявшего гугенотам — протестантской части населения — некоторую свободу вероисповедания и гражданские права. С отменой эдикта в 1685 г. жизнь протестантов (к которым принадлежал и Гюйгенс) во Франции надолго стала невозможной и множество гугенотов предпочло эмиграцию насильственному обращению в католичество.

Мы уже упоминали замечательный труд Гюйгенса «Маятниковые часы» (Horologium oscillatorium, Parisiis, 1673), содержащий, кроме описания этого изобретенного им еще в 1657 г. инструмента, важнейшие открытия в области механики и инфинитезимальной математики. Помимо этого сочинения, он опубликовал еще много других, среди которых законченный в 1678 г. «Трактат о свете» (Traité de la lumière, Leiden, 1690), содержащий изложение своеобразной волновой теории распространения света, имел для физика столь же первостепенное значение, как книга о часах с маятником для механики. В историю астрономии Гюйгенс вписал свое имя, установив при помощи усовершенствованных им самим телескопов, что Сатурн окружен кольцом и имеет спутника — Титана, обнаружив ту-

Христиан Гюйгенс
(с портрета Г. Эделинка, хранящегося в библиотеке Лейденского университета)

манность в созвездии Ориона и довольно точно определив время обращения Марса вокруг его оси.

Из математических трудов Гюйгенса мы сейчас остановимся на одном — «О расчетах в азартной игре» (De ratiociniis in aleae ludo), впервые вышедшем в качестве приложения к «Математическим этюдам» (1657, см. стр. 111) его учителя Ф. ван Схоотена. Гюйгенс написал это сочинение по-голландски, латинский перевод сделал Схоотен. В предпосланном этому сочинению письме к Схоотену Гюйгенс писал: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории»[1]. В этом замечании Гюйгенс показал глубокое понимание существа рассматриваемого вопроса.

Книга Гюйгенса выдержала ряд изданий и переводов и была фактически единственной по теории вероятностей до начала XVIII в. Она оказала большое влияние на многих ученых, в том числе и на Я. Бернулли.

---

[1] *Ch. Huygens.* Oeuvres complètes, v. 14, Hague, 1920, p. 58.

В начале своей книги Гюйгенс вводит понятие математического ожидания, а затем решает самые разнообразные задачи на справедливое разделение ставок при разном числе игроков и разном количестве недостающих партий. Кроме того, он вычисляет математические ожидания при решении различных задач, связанных с бросанием костей. Именно математическое ожидание явилось первым теоретико-вероятностным понятием. Так называемое классическое определение вероятности события

$$p = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятных для появления события случаев и n — число всех (равновозможных) случаев, фактически не раз применявшееся Кардано и другими, было формально введено лишь Я. Бернулли. До этого, как можно полагать, вероятность оставалась, скорее, логическим, а не собственно математическим понятием.

Математическое ожидание Гюйгенс определил в следующих выражениях (не забудем, что речь шла об азартной игре): «Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p и число случаев, в которых получается сумма b, равно q и все случаи могут получиться одинаково легко, то стоимость моего ожидания равна $\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)$»[1].

Гюйгенс теоремами сложения и умножения вероятностей пользуется свободно (эти теоремы употребляли в том или ином виде начиная с Кардано).

Теория вероятностей как наука возникла в середине XVII в., когда были выработаны ее специфические понятия и методы, в первую очередь, когда стало применяться математическое ожидание. Хотя оно содержится в неявном виде и используется Паскалем и Ферма в их переписке, основная заслуга введения этого понятия и связанных с ним специфических методов решения задач принадлежит Гюйгенсу.

Статистические исследования

В этот же период появляются первые статистические работы так называемых политических арифметиков. И хотя сбор первых статистических сведений встречается начиная с античной древности (в очень примитивной форме), первые научные начала статистики были заложены только в том же XVII в.

Начало статистической науки было положено в первую очередь работами Джона Граунта (1620—1674) и Вильяма Петти (1623—1687). Эти работы в большой мере использовали бюллетени о естественном движении населения Лондона, которые велись с XVI в. Основная работа Граунта так и называется «Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности» (Natural and political observations upon the bills of mortality, London, 1662). Граунт на статистическом материале установил ряд интересных закономерностей. В частности, он показал, что число родившихся мальчиков относится к числу родившихся девочек, как 14 к 13; что смертность человека больше в начале жизни; что относительная смертность от ряда болезней и случайностей устойчива и др. Граунт построил первую таблицу смертности.

---

[1] *Ch. Huygens.* Oeuvres complètes, v. 14, p. 66.

Эдмунд Галлей
(с портрета Т. Меррея, принадлежащего Лондонскому Королевскому обществу)

Наиболее значительными работами Петти являются «Политическая арифметика» (Political arithmetic, 1676) и «Замечания относительно Дублинских бюллетеней смертности» (Notes upon the Dublin bills of mortality, 1683). В этих работах он подсчитывает необходимое количество людей различных профессий как в настоящее время, так и в будущем, величину необходимых налогов, величину народного богатства и доходов, количество населения Лондона и т. п.

Конечно, ни Граунт, ни Петти не пользовались теорией вероятностей, но применявшиеся ими понятия и методы, по существу, были тесно связаны с теорией вероятностей, а поставленные в них вопросы стимулировали развитие этой науки. Необходимая связь между статистикой и теорией вероятностей была установлена только Я. Бернулли.

Упомянутая выше книга Граунта открывала новое поле для приложений математического метода; вместе с тем в соответствии с духом времени обнаруженные демографические закономерности нередко полагали божественными. Позднее, в первой половине XVIII в., разграничение случайного (хаоса) и необходимого (божественного порядка) привело А. де Муавра к выводу «предельных теорем Муавра — Лапласа», а других ученых — к установлению первых идей и методов собственно математической статистики. Находясь под непосредственным влиянием философии Ньютона, Муавр полагал, что отыскивает божественный порядок на Земле (в демографии) после того, как Ньютон отыскал его в системе мира.

Сам Ньютон, кажется, не имеет непосредственных заслуг в теории вероятностей, но в своей «Исправленной хронологии древних царств», над которой он работал почти до самой смерти, он систематически применял теоретико-вероятностные рассуждения о длительности правления династий (сумма случайных сроков правлений отдельных правителей) и отдельных правителей (среднее арифметическое этих сроков): «Судя по греческим летописцам... правители их нескольких городов... правили в среднем около 35 или 40 лет каждый... чему нельзя доверять. Ибо... правители в среднем правят около 18 или 20 лет каждый; и если в некоторых случаях они правят в среднем на 5 или 6 лет дольше, в других случаях они правят на столько же меньше; 18 или 20 лет является средним сроком»[1] (установленным Ньютоном по достоверным историческим источникам).

В описанном рассуждении Ньютона — первом приложении математического метода к истории — содержатся идеи, лежащие в основе закона больших чисел Я. Бернулли. Аналогичные идеи встречаются и у друга Ньютона, воспитанника и профессора Оксфордского университета, а затем директора Гринвичской обсерватории Эдмунда Галлея (1656—1742), особенно известного как астронома,— вспомним хотя бы о комете Галлея. При составлении своей таблицы смертности (Philos. Trans., v. 17, 1694) Галлей выравнял наблюденные значения смертности по возрастным группам, указав, что нерегулярности в этих наблюдениях «видимо, вызваны случаем» и были бы сглажены при «намного большем» числе лет наблюдений. Тем самым Галлей не только высказал мысль о сближении частот и соответствующих вероятностей, которая по свидетельству Я. Бернулли была широко распространена — ее высказал еще Кардано (см. стр. 83),— но и использовал ее практически.

Добавим, что в астрономической переписке и оптических работах Ньютона содержатся отдельные элементы теории ошибок.

«Искусство предположений» Якова Бернулли

Новый этап в истории теории вероятностей начался с Якова Бернулли.

Я. Бернулли (1654—1705) принадлежал к протестантскому роду, переехавшему в конце XVI в. из-за религиозных гонений в Швейцарию. По воле своего отца, городского советника в Базеле, Николая Бернулли (1623—1708) Я. Бернулли прошел полный курс философии и богословия. Однако, вопреки родительским настояниям, он решил всецело посвятить себя математическим наукам — занятию, которое отнюдь не сулило в тогдашней Швейцарии выгодной карьеры: работа даже университетского преподавателя математики оплачивалась скудно, да и должностей таких было крайне мало. Несколько лет молодой человек, самоучкой овладевавший математикой, учительствовал в частных домах. Побывав во Франции, Голландии и Англии и всюду завязав научные знакомства, Я. Бернулли

[1] *I. Newton.* The chronology of ancient kingdoms amended. London, 1728, p. 52.

Яков Бернулли
(с портрета, сделанного в 1686 г. его братом Николаем и хранящегося в Базельском музее естествознания и этнологии)

с 1683 г. приступил к чтению лекций в Базельском университете сначала по физике, а затем по математике.

На 80-е годы приходятся важные исследования Я. Бернулли по теории рядов и теории вероятностей. В это же время он успешно занимался инфинитезимальными задачами, а после выхода в свет мемуара Лейбница о дифференциальном алгоритме (1684) первый правильно оценил его значение и стал первым же последователем нового исчисления бесконечно малых. В этой области ему, как и его младшему брату и ученику Иоганну, принадлежат выдающиеся заслуги. Конец жизни Я. Бернулли был омрачен спорами с братом о приоритете в некоторых открытиях; впрочем, их соревнование в решении ряда трудных задач анализа имело и положительные результаты. Я. Бернулли скончался в 1705 г., после чего его кафедру занял Иоганн. Среди учеников Я. Бернулли, кроме брата, вы-

Титульный лист «Искусства предположений» Я. Бернулли (Базель, 1713)

JACOBI BERNOULLI,
Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruff. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè fcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenfis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xiii.

деляются еще их племянник Николай I Бернулли (1687—1759), профессор математики в Падуе (1716) и логики (1722), а затем права в Базеле, а также механик и математик Я. Германн, один из первых членов Петербургской академии наук. Учеником Я. Бернулли был, между прочим, Пауль Эйлер — отец знаменитого математика.

Семья Бернулли дала многих выдающихся ученых, в том числе математиков, которые нередко носили одинаковые имена. Поэтому носителей одного имени различают, как королей, порядковыми номерами. Сыновья и ученики Иоганна I, рано скончавшийся Николай II (1695—1726) и Даниил I, работали некоторое время в Петербурге, так же как его внук, специалист по механике, Яков II (1759—1789), сын базельского профессора физики Иоганна II (1710—1790). Члены рода Бернулли проживают в Базеле и в настоящее время.

В теории вероятностей творчество Я. Бернулли было основополагающим. Его открытия в этой области изложены в «Искусстве предположений» (Ars conjectandi), посмертно изданном Николаем I Бернулли в Базеле в 1713 г.

Книга Я. Бернулли состоит из четырех частей. Первую часть составляет упоминавшееся сочинение Гюйгенса (стр. 89), но Бернулли почти ко всем предложениям Гюйгенса дает свои примечания, иногда более существенные, чем самые предложения. О второй части книги, посвященной разработке комбинаторики, уже говорилось, в третьей части решаются разнообразные задачи по теории вероятностей. Основная часть книги — это четвертая часть. В ней Я. Бернулли прежде всего высказывает общие соображения о природе случайных событий, а затем выводит носящую теперь его имя теорему, лежащую в основе всех последующих исследований о закономерностях случайных массовых явлений. Теорема Бернулли явилась первой и простейшей в цепи предложений, образующих закон больших чисел,— этот термин предложил в 1835 г. французский математик С. Пуассон. Вместе с теоремой Муавра — Лапласа (см. т. III, гл. 4) и ее обобщениями закон больших чисел принадлежит к числу предельных теорем теории вероятностей, принципиальное значение которых в том, что на них основаны все применения этой науки к природным и общественным явлениям.

Сам Я. Бернулли формулировал свою теорему, установленную им не позднее 1689 г., в следующих словах: «Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s, или к числу всех случаев, как r к $r+s$ или r к t, каковое отношение заключается в пределах $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (c раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне их, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более, чем $\frac{r+1}{t}$, и не менее, чем $\frac{r-1}{t}$»[1].

А. А. Марков (1856—1922), которому принадлежат крупнейшие заслуги в теории вероятностей, писал: «Свою теорему Я. Бернулли высказал точно и доказал с полной строгостью, хотя и при ограничительном условии, которое нетрудно устранить»[2]. Теперешняя формулировка теоремы

[1] Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi». Перевод Я. В. Успенского. СПб., 1913, стр. 37.
[2] Там же, стр. V.

такова: если вероятность наступления события A в последовательности независимых испытаний постоянно равна p, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний $n(\varepsilon)$ разность $\frac{m}{n} - p$, где m — число наступлений A, по абсолютной величине окажется меньшей, чем ε. Это можно записать так: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1$ при $n \to \infty$.

На практике мы наблюдаем только частоту m/n, и теорема Бернулли является тем звеном, которое связывает статистические наблюдения с теорией вероятностей. Это было ясно автору «Искусства предположений». Он намеревался дать приложения теории вероятностей к вопросам статистики народонаселения, которая в то время начала привлекать большое внимание, но в этом ему помешала смерть. Как видно из его переписки с Лейбницем, Я. Бернулли интересовала и теория ошибок.

Применение статистических частот m/n взамен «классической» вероятности было широко распространено, особенно в статистике народонаселения. В одном письме 1669 г. [1] Гюйгенс даже построил непрерывную кривую убывания числа остающихся в живых современников с возрастом, т. е. в его толковании убывания вероятности $p(x)$ новорожденному дожить до возраста x. Использовав для этого табличные данные Грауна и построив по ним свою кривую, Гюйгенс не искал ее аналитического выражения. Но в принципе это была первая непрерывная кривая плотности вероятности, причем вероятностями служили именно статистические частоты. Хотя ни один автор до нашего современника Р. Мизеса не предложил формального «частотного» определения вероятности, фактически такое понимание дела широко использовалось и в этом смысле является не менее «классическим».

Добавим, что и геометрические вероятности применялись уже в XVII в. в одной, оставшейся неизвестной вплоть до наших дней рукописи Ньютона [2] и в упомянутом выше мемуаре Галлея 1694 г. Проведя все свои выводы аналитически, Галлей, пожалуй из подражания древним математикам, повторил эти выводы геометрически (даже в трехмерном пространстве).

Рассматривая соотношение случайности и необходимости, Я. Бернулли стоит на позиции детерминизма и отрицает объективную случайность. Он говорит: «Нельзя сомневаться... относительно событий будущего, которые ... если и не по некоторой неизбежной необходимости, то в силу божественного предвидения или предопределения не могут не осуществиться в будущем; ибо если не наверно случится то, чему определено случиться, то непонятно, как может остаться непоколебленной хвала всеведению и всемогуществу величайшего Творца. Каким образом, однако, эта достоверность будущего может быть согласована со случайностью... об этом пусть спорят другие» [3]. И в другом месте: «Если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность (причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность), то было бы замечено, что все в мире управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были

---

[1] *Ch. Huygens.* Oeuvres complètes, v. 6, 1895, p. 530.

[2] *I. Newton.* Mathematical papers, v. 1 (1664—1666). Cambridge, 1967. Ed. D. T. Whiteside, p. 58—61.

[3] Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi», стр. 1.

бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок»[1]. Таким образом, случайность была в глазах Я. Бернулли субъективной категорией, понятием, к которому мы вынуждены обращаться лишь из-за неполноты наших знаний. При этом детерминизм соединялся у него, как и у многих мыслителей той эпохи, с верой в бога.

Незадолго до выхода «Искусства предположений» появилось еще несколько сочинений по теории вероятностей, впрочем гораздо менее знаменательных. Так, Николай I Бернулли под очевидным влиянием труда своего дяди выпустил «Примеры искусства предположений в применении к правовым вопросам» (Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae, Basileae, 1709),— речь шла об оценке свидетельских показаний, выборах по жребию, страховых задачах и пожизненных рентах. Этот последний круг вопросов выдвигался в то время на видное место, а вместе с ним и демографическая статистика, занимавшая и Я. Бернулли. Таблицы смертности, значение которых было очевидно (об этом писал, в частности, в 1669 г. Гюйгенс), составлены Я. де Виттом (1671) и более совершенным образом Э. Галлеем (1694). Уже упоминавшиеся расчеты Галлея были в 1699 г. использованы для организации вдовьей и сиротской касс в Лондоне. Демографической статистикой и ее приложениями успешно занимался в Англии и Муавр, о работах которого по теории вероятностей еще будет сказано далее (см. т. III, гл. 4).

---

[1] Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi», стр. 40.

7 Зак. № 1030