ШЕСТАЯ ГЛАВА

ГЕОМЕТРИЯ

Алгебраические методы в геометрии

Применение алгебры в геометрии имело к началу XVII в. долгую историю. Еще древние вавилоняне решали многие задачи на прямоугольные треугольники, выражая искомые отрезки, как корни численных квадратных уравнений; аналогичные приемы употреблялись впоследствии неоднократно. В классической Греции важным средством геометрического исследования, в частности конических сечений, служила геометрическая алгебра, в которой место вычислений занимали построения отрезков.

Бурные успехи символической и числовой алгебры в XVI в. явились основой гораздо более обширных приложений алгебраического метода в геометрии, приведших к созданию новой аналитической геометрии. Первоначально работы в этом направлении не выходили за пределы традиционных постановок и решений вопросов, иногда довольно сложных. Большое число таких задач было рассмотрено Виетом, за которым последовали и другие, например Марин Геталдич (Гетальди, 1566—1627), уроженец югославского города Дубровник (Рагуза), в то время бывшего самостоятельной республикой. Ученик Хр. Клавия и хороший знаток греческих авторов, Гетальди испытал особенно сильное влияние Виета, с которым познакомился в бытность в Париже. В «Собрании различных задач» (Variorum problematum collectio, Venetiae, 1607) и посмертно изданном труде «О математическом анализе и синтезе» (De resolutione et compositione mathematica, Romae, 1630) Гетальди средствами алгебры Виета решает разнообразные задачи на деление отрезков, построение треугольников и так называемые вставки (ср. т. I, стр. 84); по большей части его задачи выражаются уравнениями первой или второй степени относительно искомого неизвестного отрезка. В некоторых случаях применяется чисто геометрическое решение. Упомянем античную задачу о вставке между продолжением стороны квадрата и ближайшей перпендикулярной стороной отрезка данной длины, продолжение которого проходит через вершину квадрата, не лежащую на названных сторонах. Гетальди отнес задачу к тем, которые не относятся к алгебре (sub algebram non cadunt), и решил ее геометрически. Данная задача привлекла внимание и других ученых. Жирар (1629) выразил ее уравнением четвертой степени и показал, как связан выбор знаков перед радикалами, входящими в его корни, с положением частей искомого отрезка. Декарт (1637) рассмотрел ее с целью привести пример уравнения четвертой степени, распадающегося на два квадратных (коэффициенты которых, между прочим, квадратично иррациональны относительно исходных коэффициентов). Попутно Декарт указал, как от более или менее удачного выбора неизвестной зависит сравнительная простота уравнения. Эти соображения Декарта подробнее развиты во «Всеобщей арифметике» Ньютона. Оригинальное решение принадлежит еще Гюйгенсу.

Алгебраическим решением геометрических задач занимались, как видно, очень многие. К уже названным можно добавить, например, имя английского алгебраиста Вильяма Отреда (1574—1660), на книге которого, озаглавленной, подобно одному из сочинений ал-Каши, «Ключ математики» (Clavis mathematicae, Londini, 1631)[1], отразилось несомненное влияние «Собрания различных задач» Гетальди.

Аналитическая геометрия

Описанная алгебраическая трактовка вопросов геометрии подготовляла почву для создания аналитической геометрии, предметом которой является уже не только нахождение отдельных отрезков, выражаемых корнями уравнений с одним неизвестным, но изучение свойств различных геометрических образов, прежде всего алгебраических линий и поверхностей, выражаемых уравнениями с двумя или более неизвестными или координатами.

Координаты появились еще в древности, притом в различных формах, между собой непосредственно не связанных. С одной стороны, это были географические координаты, именовавшиеся долготой (μῆχος — «длина») и широтой (πλάτος — «ширина»), причем положение пунктов земной поверхности, изображенной в виде прямоугольника, характеризовалось парой чисел. Сходными были астрономические координаты, служившие для определения положения светил на небесной сфере. Другой вид координат представляли собой отрезки, зависимости между которыми, так называемые симптомы (см. т. I, 130), выражали определяющие свойства этих кривых. В этом случае речь шла не о числовых координатах любых точек с отсчетом от фиксированного меридиана и параллели, а об отрезках диаметров и хорд, связанных с точками рассматриваемой фигуры.

Своеобразной разновидностью координат были отрезки широт и долгот в теории изменения форм Орема. Здесь не было ни числовых координат любых точек, ни «симптомов», выраженных средствами геометрической алгебры; словесно сформулированная зависимость между широтой и долготой формы изображалась плоской линией.

Координатные отрезки древнегреческой геометрии стали известны в Европе частью по арабским сочинениям, но главным образом по трудам Архимеда и особенно Аполлония. Параллельные хорды или полухорды, сопряженные некоторому диаметру, Аполлоний называл, если перевести с греческого, «по порядку проведенными линиями», а отрезки этого диаметра от его конца до хорды — «отсеченными на диаметре по порядку проведенными (линиями)» (на рис. 6 соответственно y и x). В своем упоминавшемся ранее латинском издании «Конических сечений» (Венеция, 1566)

[1] В первом издании этот весьма распространенный в XVII в. труд назывался «Основы арифметики в числах и видах» (Arithmeticae in numeris et speciebus institutio).

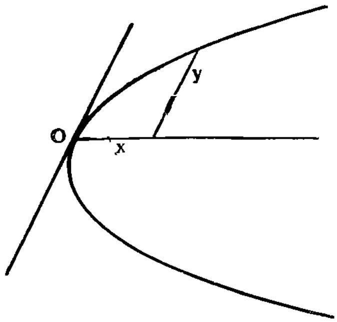


Рис. 6

Федериго Коммандино первые выражения передал оборотом ordinatim applicatae, т. е. «по порядку приложенные» (т. е. направленные)[1], а второе — quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur, т. е. «которые отсекаются ими на диаметре от вершины». Отсюда берут начало термины abscissa, т. е. «отсеченная», ordinata и applicata, которые, впрочем, укоренились не сразу. Слово «абсцисса», встречавшееся в смысле отрезка у различных авторов, например Кавальери (1635), становится техническим термином координатной геометрии в 1668 г. у Микеланджело Риччи (1619—1692) и особенно у Лейбница, начиная с рукописей 1673 г. Ферма и Декарт в своих основоположных сочинениях по аналитической геометрии (1636—1637) писали еще об «отрезках диаметра». Слово «ордината» в нашем смысле применял другой переводчик на латынь «Конических сечений» — Франческо Мавролико. Ферма пользовался термином applicata, Декарт — appliquée par ordre, т. е. французским переводом ordinatim applicata, но также (в письме 1638 г.) словом ordonnée, которое незадолго перед тем в 1637 г. употребил в своем курсе П. Эригон (в латинском тексте 1644 г.— ordinata); затем им стал регулярно пользоваться Лейбниц.

В середине XVIII в. слово «ордината» начинает вытеснять в геометрии на плоскости слово «аппликата». Обе координаты первоначально назывались неизвестными величинами, как у Ферма, или неопределенными, как у Декарта; слово «координаты» ввел в 1692 г. Лейбниц, имея в виду уже любые криволинейные координаты. Но еще и позднее понятие о координатах связывалось с отрезками диаметров и хордами плоских кривых. Так обстоит, например, дело в статьях «Abscissa, die Abscisse» и «Ordinatae, ordinatim applicatae, die Ordinaten» «Математического словаря» (Mathematisches Lexicon, Leipzig, 1716) Хр. Вольфа (ср. стр. 35).

Термин «ось», который у Аполлония относился к взаимно перпендикулярным сопряженным диаметрам, употребил в более широком смысле И. Барроу (1670). Обозначение начальной точки буквой O восходит к ее

[1] Еще в переводе арабского трактата Ибн ал-Хайсама о параболических зеркалах, сделанном в XII в., употребляется оборот linea secundum ordinem, т. е. «линия по порядку». Н. Орем в середине XIV в. писал о перпендикулярно приложенных отрезках — perpendiculariter applicatae.

наименованию origine — «начало», данному Ф. Лагиром в 1679 г.; двадцатью годами ранее Я. де Витт писал об initium immutabile, неподвижном начале. Декарт еще говорил о точке, с которой начинаются вычисления.

Вернемся от истории терминологии к истории геометрических методов и идей.

Аналитическая геометрия Ферма

К разработке начал новой аналитической геометрии независимо друг от друга и одновременно приступили оба крупнейших французских математика XVII в.— Ферма и Декарт. Небольшое «Введение в изучение плоских и телесных мест» (Ad locos planos et solidos isagoge) Ферма было написано несколько ранее 1637 г., но при жизни Ферма распространялось через Мерсенна и других только в рукописном виде. Напомним, что «плоские и телесные места» — термины греческой геометрии — означали прямые и окружности и соответственно эллипсы, параболы и гиперболы. Работа написана в обозначениях Виета с соблюдением однородности уравнений.

Ферма формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины (quantitates ignotae), налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин»[1]. Как мы видим, под неизвестными величинами (координатами) Ферма понимает прямолинейные отрезки; первую из них он всякий раз обозначает NZ и алгебраически буквой A, а вторую соответственно ZI и E. Затем по порядку рассматриваются различные плоские и телесные места.

Уравнение прямой, проходящей через начальную точку, Ферма выводит в форме

$$D \text{ на } A \text{ равно } B \text{ на } E,$$

т. е. $dx = by$ (на рис. 7 нанесена лишь часть прямой NI, так как Ферма пользуется положительными координатами). К этому случаю приводится общее уравнение первой степени (с указанным ограничением) и несколько далее однородное уравнение второй степени, причем здесь говорится лишь об одной из двух возможных прямых. Первое приведение по существу состоит в преобразовании координат, именно в параллельном сдвиге вдоль горизонтальной оси: от уравнения вида $c - dx = by$ Ферма переходит к $d(r - x) = by$, где $dr = c$. Идею преобразования координат путем параллельного переноса системы Ферма более отчетливо выражает в следующих примерах: установив сначала, что в прямоугольной системе уравнение окружности с центром в начальной точке есть $b^2 - x^2 = y^2$, он правильно характеризует общее уравнение окружности и для образца преобразует к основной форме уравнение

$$b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry.$$

---

[1] *П. Ферма.* Введение в изучение плоских и пространственных мест. В книге: *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 137—138.

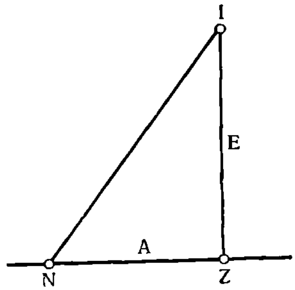


Рис. 7

Для этого он производит дополнение до квадрата

$$p^2 - (x + d)^2 = (y + r)^2, \quad \text{где} \quad p^2 = r^2 + b^2 + d^2,$$

затем пишет снова x вместо $x + d$ и y вместо $y + r$ и получает

$$p^2 - x^2 = y^2.$$

Следует заметить все же, что Ферма обходит молчанием вопрос об отрицательных координатах, какими оказываются координаты центра $(-d, -r)$ в данной задаче (ибо d и r у него положительные). Разумеется, построить центр для него не представляло труда и в этом случае.

Основные уравнения конических сечений представляют собой у Ферма непосредственное выражение в терминах алгебры их свойств, известных по труду Аполлония. Для параболы это уравнения $x^2 = dy$ и симметричное $y^2 = dx$, для эллипса $(b^2 - x^2)/y^2 = \mathrm{const}$ (указывается, что в случае непрямого координатного угла кривая будет эллипсом и при $\mathrm{const} = 1$), для гиперболы $(b^2 + x^2)/y^2 = \mathrm{const}$. Любопытно, что на рисунке в последнем случае изображены обе ветви гиперболы, хотя опять-таки об отрицательных координатах ничего не сказано. Кроме того, приводится уравнение равносторонней гиперболы $xy = c$. Все это распространяется на соответствующие уравнения, дополненные линейными членами.

На частном примере уравнения $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ Ферма разбирает и наиболее трудный случай, когда группа старших членов содержит и член с произведением координат. Его выкладки и построения соответствуют переходу к новой системе координат X, Y с прежним началом и осью ординат и с осью абсцисс, образующей угол 45° со старой. В этой системе $X = \sqrt{2}\,x$, $Y = x + y$, так что $(2b^2 - X^2)/Y^2 = 2$ и фигура есть эллипс.

Изложив все это, Ферма писал: «Таким образом мы коротко и ясно изложили все, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест»[1]. На самом деле был сделан лишь первый шаг к созданию нового типа геометрии, которая, между прочим, получила свое нынешнее наименование лишь в самом конце XVIII в.[2]

[1] См. *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 146.

[2] Термин «аналитическая геометрия» в применении к любым геометрическим приложениям алгебры употреблялся в XVIII в. не раз. В более специальном смысле, совпадающем с общепринятыми в XIX в., его начал применять С. Ф. Лакруа, а первую книгу, озаглавленную «Начала аналитической геометрии» (Eléments de géométrie analytique. Paris, 1801), опубликовал профессор Политехнической школы Ж. Г. Гарнье (1766—1840).

Аналитическая геометрия Декарта

«Введение» Ферма, долгое время остававшееся в рукописи, не нашло того широкого распространения, какое получила «Геометрия» Декарта, изданная в 1637 г. О влиянии «Введения» на Декарта не может быть речи. Мы говорили уже, что все основные идеи «всеобщей математики», как в алгебраической, так и в геометрической части, имелись у ее творца не позднее 1632 г.

Изложение аналитической геометрии у Декарта во многом отличается от данного Ферма. В одном оно уступает, ибо разбросано по всем трем книгам «Геометрии» и даже во второй из них, содержащей наиболее важные элементы новой дисциплины, не имеет систематического характера, как во «Введении». Но в других отношениях геометрия Декарта имела решительные преимущества. Не говоря уже о том, что Декарт применял более развитую символику, что его изложение было доступнее и богаче примерами, он выдвинул несколько общих идей и предложений, весьма существенных для последующего.

Один из основных вопросов для Декарта заключался в следующем: какие линии служат предметом геометрии? Ответ определялся верой Декарта в то, что единственным общим методом математики является алгебраический. Сначала этот ответ формулируется в кинематических выражениях: геометрические линии — это те, которые «описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими,— ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру» [1]. Напротив, из геометрии, т. е. собственно всеобщей математики, исключаются механические линии, описываемые «двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить» [2]. Примеры механических линий — спираль и квадратриса: в качестве примера геометрических приводятся кривые, описываемые некоторым шарнирным механизмом, число звеньев которого можно неопределенно увеличивать. Этот механизм, по идее сходный с мезолабием, предложенным Эратосфеном в III в. до н. э. для построения двух средних пропорциональных, Декарт изобрел между 1619 и 1621 гг.: в третьей части «Геометрии» показано, как можно с его помощью строить любое число средних пропорциональных между двумя данными отрезками

$$a : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \ldots = x_n : b.$$

Уравнения описываемых этим прибором линий

$$r^2 (x^2 + y^2)^{2n-1} = x^{4n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Декарт не привел ни в общем виде, ни для частных значений n.

Кинематическое образование линий являлось отправным пунктом геометрии Декарта и применяется в ней неоднократно. Конечно, данная им при этом кинематическая характеристика геометрических линий как кривых, описываемых одним или несколькими непрерывными движениями, последовательно определяющими друг друга, не вполне отчетлива,

---

[1] *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 30.
[2] Там же, стр. 30—31.

так же как и заявление, что для проведения всех таких линий «нужно только то предположение, что две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другие линии»[1]. Но в этих утверждениях, по сути дела, Декарт предвосхитил уже упоминавшуюся важную теорему английского ученого А. Кемпе (1876), согласно которой посредством плоских шарнирных механизмов можно описать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Свой кинематический способ деления линий на геометрические и механические Декарт тотчас облекает в более ясную аналитическую форму и здесь же предлагает классификацию первых. «Все точки линий,— пишет он,— которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии»[2]. В этом поистине замечательном по глубине месте своего сочинения Декарт вводит и метод прямолинейных координат и понятие об уравнении кривой, а вместе с тем понятие о функции как аналитическом выражении, составленном из «неопределенных» отрезков x и y. Несколько перед тем Декарт объяснил, как описывать кривую или, вернее, строить любое число ее точек, вычисляя значения x по данным значениям y,— первой координатой у него служила y.

В 1684 г. Лейбниц назвал геометрические кривые Декарта алгебраическими, а механические — трансцендентными, мотивируя отказ от терминологии Декарта тем, что и механические линии не подлежат исключению из геометрии.

Непосредственно за изложенными общими соображениями Декарт приводит первую общую классификацию алгебраических кривых в зависимости от степени их уравнений, отнеся к роду n кривые с уравнениями степени $2n - 1$ и $2n$. Классификация требовалась прежде всего для всеобщей математики Декарта (стр. 30), а также была нужна в аналитической геометрии. Предложенное Декартом разделение кривых по родам, себя не оправдавшее, мотивировалось тем, что, по его мнению, кривые с уравнением степени $2n$ вообще не сложнее, чем с уравнением степени $2n - 1$. Все трудности, связанные с четвертой степенью, писал он, приводятся к третьей, а трудности, связанные с шестой степенью,— к пятой и т. д. Общепринятой классификацией плоских кривых по порядкам мы обязаны Ньютону.

Но классификация кривых в прямолинейных координатах по родам или порядкам имеет смысл, если род или порядок кривой не зависит от выбора координатной системы. Это было Декарту ясно, и он, правда мимоходом, но вполне отчетливо, сформулировал фундаментальное предложение об инвариантности рода кривой при замене одной системы прямолинейных координат другой: «Действительно, хотя для получения более короткого и удобного уравнения и нужен весьма тщательный выбор, но все же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода: это легко доказать»[3]. Впрочем, доказательство не приводится, да и формулы линейного преобразования координат у Декарта еще отсутствовали.

---

[1] *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 30

[2] Там же, стр. 33.

[3] Там же, стр. 34.

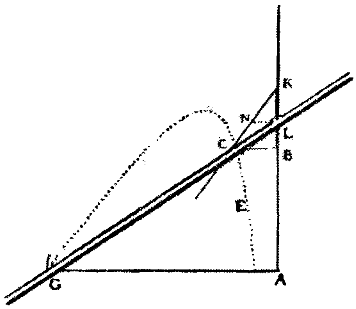
В качестве первого примера Декарт выводит уравнение линии EC, описанной точкой пересечения линейки GL и неопределенно продолженной стороны CNK плоской прямолинейной фигуры NKL, сторона которой KL движется вдоль данной прямой BA, заставляя вращаться вокруг точки G линейку, неизменно проходящую при этом через точку L. Приняв GA, перпендикуляр к BA, равным a, $KL = b$, $NL = c$, выбрав AB за ось x и точку A за начало, Декарт обозначает «неопределенные и неизвестные величины» $CB = y$, $BA = x$. Тогда на основании подобия треугольников CBK и NLK, с одной стороны, и CBL и GAL — с другой, быстро выводится уравнение линии ECG

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

так что эта линия первого рода и, как указывает без доказательства Декарт, гипербола (пример этот подробно разобрали комментаторы латин-

Страница первого издания «Геометрии» Р. Декарта (1637):
начало вывода уравнения линии EC

LIVRE SECOND.



Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & B L est $\frac{b}{c}y - - b$, & A L est $x + \frac{b}{c}y - - b$. de plus comme C B est à L B, ou y a $\frac{b}{c}y - - b$, ainsi a, ou G A, est á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - - b$. de façon que mul-

S f tipliant

ского издания «Геометрии»). Заменяя прямую CNK другими линиями, можно получать таким образом бесконечное множество кривых. Так, если CNK есть окружность с центром L, то будет описана конхоида (несомненно, что прием Декарта является как раз обобщением античного определения конхоиды), а если CNK есть парабола с диаметром KB, то возникает кривая второго рода, именно та, которую Ньютон впоследствии назвал трезубцем (ср. далее стр. 108). Вообще, заявляет Декарт, если образующая кривая имеет род n, то описанная линия будет рода $n+1$. Это одна из немногих ошибок Декарта, который не довел, видимо, до конца легкие, по его собственным словам, вычисления. На самом деле, если в подвижной системе координат $CB = y$, $BL = x'$, уравнение линии CNK есть

$$f(x', y) = 0,$$

то кривая ECG имеет в прежних координатах уравнение

$$f\left(\frac{xy}{a-y}, \ y\right) = 0.$$

Неточность Декарта показал на частном примере еще Ферма.

В рассмотренном только что примере нарисованы две взаимно перпендикулярные координатные оси, хотя и не в обычном для нас положении. Однако чаще всего Декарт, так же как Ферма и ближайшие поколения их последователей, чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат, вообще говоря наклонных. Отрицательные абсциссы не рассматривались, что иногда приводило к неточным или неполным чертежам. Эти замечания не относятся к Ньютону или Лейбницу, но правильное различение знаков координат и применение обеих осей стало обычным делом уже в XVIII в.

Силу своего метода Декарт затем демонстрирует на предложенной ему Я. Гоолем задаче Паппа о геометрическом месте к $2n$ или $2n-1$ прямым, которое определяется следующим образом: даны $2n$ (или $2n-1$) прямых, требуется найти геометрическое место таких точек, чтобы произведение отрезков, приведенных от них под данными углами к n из этих прямых, находилось в данном отношении к произведению аналогичных отрезков, проведенных к остальным n (или $n-1$) прямым. Древние знали, что при $n=2$ геометрическое место есть коническое сечение, но не оставили анализа и этого случая: случай же $n > 2$ остался нерассмотренным. Если мы запишем уравнение прямых в виде $a_k x + b_k y + c_k = 0$, то длины проведенных к ним отрезков d_k пропорциональны левым частям этих уравнений, и для нас отсюда ясно, что уравнение места будет, вообще говоря, кривой порядка n. Декарт, получив выражения для d_k в выбранной им косоугольной координатной системе из геометрических соображений, приходит к тому же общему результату. Более подробно он рассмотрел случаи $n = 2$ и $n = 3$. Это прежде всего место к трем или четырем прямым, исследование которого дает ему повод исследовать уравнение второго порядка, весьма общего, хотя и не самого общего вида. Пусть данные прямые суть AB, AD, EF и GH, причем углы, образуемые с ними отрезками CB, CD, CF и CH, проведенными из точек C искомого геометрического места, определяемого условием $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, известны (рис. 8). Декарт принимает одну из данных и одну из проведенных линий, именно AB и BC, за оси $AB = x$, $BC = y$ и обозначает данные длины отрезков $EA = k$, $AG = l$. Данными являются также углы треугольников на

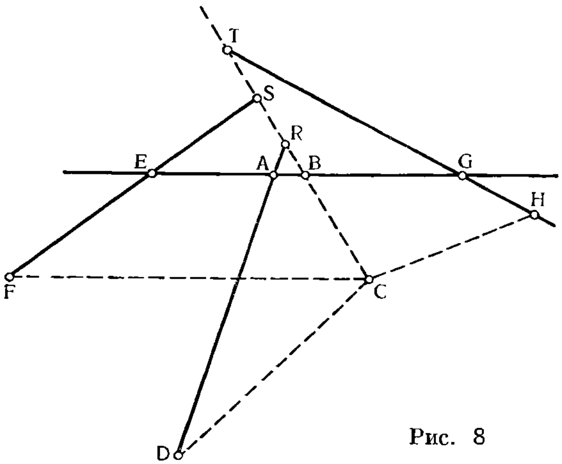


Рис. 8

рис. 8, а значит, отношения их сторон $AB : BR = z : b$, $CR : CD = z : c$ и т. д., где z, b, c, ... суть данные отрезки (Декарт не вводит синусы углов). После этого все нужные отрезки выражаются через x, y, z, b, c, ..., k, l линейно относительно x и y:

$$CB = y, \quad CD = \frac{czy + bcx}{zz}, \quad CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz},$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz},$$

а условие $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ выражается уравнением второй степени без свободного члена, решение которого относительно y, после введения некоторых сокращенных обозначений, дает

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}xx}\,.$$

Однородность полученного уравнения объясняется принятыми для отношений сторон выражениями и, в сущности, не была в глазах Декарта обязательной (ср. стр. 42), но представляла в данном случае то удобство, что в принципе позволяла сразу строить одни отрезки по другим. В приводимом несколько далее числовом примере однородность относительно буквенных величин не соблюдается в отличие от примера Ферма, в алгебре примыкавшего к Виету (ср. стр. 102).

Опираясь на теоремы I книги «Конических сечений» Аполлония, Декарт показывает, что полученное уравнение принадлежит коническому сечению, а в особых случаях, когда радикал обращается в нуль или корень извлекается нацело, оказывается прямой линией: в самостоятельном виде уравнение прямой отсутствует и о «вырождении» кривой второго порядка в пару прямых ничего не говорится. В ходе анализа выясняется, при каких знаках коэффициентов получаются парабола, гипербола и эллипс, в частности окружность, и определяются положение и форма конического сечения — в случае параболы вершина, диаметр и «прямая

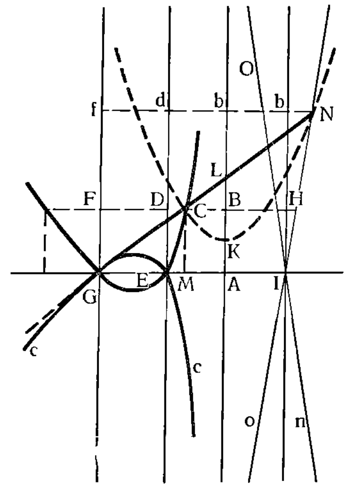


Рис. 9

сторона»[1], а в случае центральных кривых—центр вершины, «прямая сторона» и диаметры. Здесь же Декарт разбирает числовой пример, беря $EA = 3$, $AG = 5$, $AB = BR$ и т. д., а угол ABR равным 60°, так что уравнение есть $yy = 2y - xy + 5x - xx$: кривая при этом оказывается окружностью. Общее заключение гласит, что к первому роду принадлежат круг, парабола, гипербола и эллипс. Прямая не упоминается, — ее принадлежность к первому роду подчеркнул Дебон, который рассмотрел также случай, когда в уравнении нет членов с x^2 и y^2, но есть xy, оставленный Декартом в стороне.

Вслед за тем Декарт изучает еще место к пяти прямым и специально случай, в котором четыре прямые суть эквидистанты AB, IH, ED, GF, а пятая GA к ним перпендикулярна (рис. 9), причем $CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot a$, где a — расстояние между соседними эквидистантами. Здесь появляется первое в истории аналитической геометрии уравнение кривой третьего порядка. Обозначив $CB = y$, $CM = x$, Декарт находит

$$y^3 - 2ay^2 - aay + 2a^3 = axy,$$

т. е. уравнение трезубца (см. стр. 106), и показывает, что эта кривая CEG может быть, как он утверждал ранее, описана пересечением параболы CKN, диаметр которой $KL = a$ движется по AB, и линейки GL, вращающейся вокруг точки G и постоянно проходящей через точку L[2]. Он не упускает из виду, что искомым местом служит также кривая NIo, описанная пересечением GL с другой ветвью параболы (HKN); можно взять и сопряженные линии $cEGc$ и nIO, получающиеся, если подвижная пара-

---

[1] «Прямая сторона» — термин, восходящий к древности, есть отрезок, равный нашему удвоенному параметру. Слово «параметр» (от παραμετρέω — измеряю) предложил в этом смысле употреблять друг Декарта Кл. Мидорж во «Введении в катоптрику и диоптрику или труде о конических сечениях» (Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive conicorum opus, Parisiis, 1631).

[2] В подвижной системе координат $EB = y$, $LB = x'$ уравнение параболы CKN есть $y^2 = a(a - x')$, при этом $x' = xy/(2a - x)$.

бола обращена вершиной в другую сторону. Чертеж в «Геометрии» недостаточно отчетливо изображает вторую часть трезубца, который состоит из двух отдельных линий, имеющих каждая — в терминологии Ньютона — гиперболическую ветвь с асимптотой AB и параболическую ветвь, лишенную асимптоты. Как и должно быть, кривая пересекает на чертеже горизонтальную ось при значениях $y = -a$, $y = a$, $y = 2a$, но точка перегиба у части, лежащей справа от асимптоты, не обозначена.

Большое место занимают в «Геометрии» исследование оптических овалов (см. стр. 32), рассматриваемых в биполярных координатах, и проведение нормалей (см. стр. 194). Вторая книга сочинения завершается краткими замечаниями о возможности распространения метода на пространственные кривые посредством проектирования их точек на две взаимно перпендикулярные плоскости и заявлением: «Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий» [1].

Конечно, в этих словах Декарта, как и в приведенной выше авторской оценке «Введения» Ферма, было несомненное преувеличение. Но действительно, перед геометрией раскрывались невиданно широкие перспективы. Историки науки немало спорили о том, имелась ли у Аполлония аналитическая геометрия и было ли творчество Ферма и Декарта в этой области новаторским. Ответ зависит от определения термина «аналитическая геометрия», который, как отмечалось в другой связи, понимается по-разному. Несомненно, что оба ученых чрезвычайно многим обязаны были древним и что в саму теорию конических сечений они не внесли каких-либо новых теорем, а также не построили ее в чисто аналитическом плане. И вместе с тем Декарт и Ферма закладывали фундамент поистине новой геометрии, хотя «симптомы» Аполлония и соответствовали буквенным уравнениям кривых второго порядка.

Дело в том, что, как правильно писал Г. Цейтен, «геометрическая форма, приданная методом древних самой алгебре, была причиной многочисленных комбинаций между средствами и объектом геометрического исследования — комбинаций, которые должны были оставаться довольно чуждыми аналитической геометрии, в особенности поскольку последняя стремилась превратить геометрические проблемы целиком в задачи исчисления»[2]. И до тех пор, пока средством исследования оставалась геометрическая алгебра, синтетическое рассмотрение неизбежно переплеталось с аналитическим, а в глазах некоторых ученых являлось принципиально господствующим. Ньютон, завершая свой вывод теоремы о том, что место к четырем прямым есть коническое сечение, писал: «Такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое не с помощью исчисления, но геометрическим построением, и изыскивалось древними»[3]. Между тем после Ферма и Декарта и благодаря им начинает развиваться чисто аналитический метод исследования геометрических образов, в принципе не нуждающийся в обращении к геометрическим построениям и опирающийся лишь на алгебраическое исчисление. Такова общая, идейная сторона дела. К этому следует добавить, что новая алгебра давала средства изучения кривых

---

1 *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 73.

2 *Г. Цейтен.* История математики в древности и в средние века. Перевод П. С. Юшкевича. М.— Л., 1938, стр. 138.

3 *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII. М.— Л., стр. 122.

любого порядка, первые примеры чего имеются уже у Декарта [1] (такое применение геометрической алгебры было невозможно), что система координат становилась свободной от связи с теми или иными исключительными точками и направлениями (например, диаметром и вершиной конического сечения), что приобретали право на существование отрицательные координаты и т. д. Мы не говорим уже о том, что в новой геометрии впервые нашло явное выражение понятие о функции, заданной формулой.

В свете сказанного второстепенное значение имеют недостатки, присущие аналитической геометрии Декарта и Ферма, пользовавшегося к тому же менее совершенной алгеброй Виета, например неразработанность вопроса об отрицательных координатах или отсутствие на большинстве чертежей второй оси, а также то обстоятельство, что оба они ограничились немногими примерами приложения нового метода.

Современники восприняли новую геометрию с энтузиазмом. Уже в латинских изданиях «Геометрии» Декарта мы находим отдельные, заслуживающие упоминания вещи.

Первые последователи Декарта в геометрии

Как говорилось, «Введение» Ферма более сорока лет оставалось в рукописном виде и почти исключительная заслуга в распространении охарактеризованного нами метода выпала на долю «Геометрии» Декарта, за которым последовали Дебон, Схоотен, де Витт, Валлис и многие, многие другие. Первым откликнулся на выход «Геометрии» Дебон, уже в 1639 г. приславший Декарту свои замечания, при полном одобрении Декарта помещенные в издании 1649 г. Отметим среди них предложение, что линейное уравнение выражает прямую линию (с учетом прямых $x = c$ и $y = c$), и подробный анализ уравнения гиперболы $xy + bx + cy - d = 0$, отсутствовавший у Декарта (но данный во «Введении» Ферма). Любопытно для математики того времени, что Дебон различал еще семнадцать видов указанного уравнения в зависимости от знаков коэффициентов и равенства тех или иных нулю. Иногда основной переменной у него служит x. И Схоотен дополнил кое в чем изложение Декарта: так, комментируя утверждение Декарта об инвариантности рода кривой, он привел формулы, выражающие новые координаты через старые при переносе начала и одновременном повороте обеих осей на некоторый угол. Если на рис. 10 $AB = x$, $BC = y$ и новой осью абсцисс служит DG, а новым началом D, причем $DA = a$ и перпендикулярный к DA отрезок $AF = b$, то новые, также ортогональные координаты DG, GC выражаются через старые формулами

$$DG = \frac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad CG = \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Вот, писал Схоотен, «вся разница, получающаяся от того, что точки C кривой один раз относят к точкам прямой AB, а другой раз — к точкам прямой DF»[2]: аналогично обстоит дело, если взять какие-либо другие оси

[1] Помимо трезубца Декарт рассмотрел (в переписке 1638 г.) так называемый декартов лист $x^3 + y^3 = 3\,axy$ и еще некоторые высшие кривые.

[2] *R. Descartes.* Geometria. Lugduni Batavorum, 1649, p. 193.

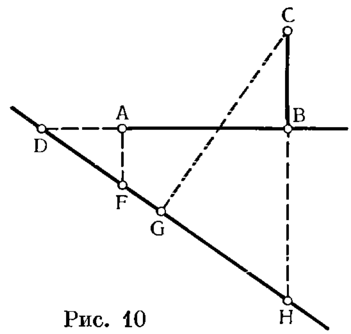


Рис. 10

координат. По-видимому, именно линейный характер этих формул (обеспечивающий линейность и выражения старых координат через новые) служил в глазах Схоотена основанием предложения об инвариантности рода кривой, хотя он это и не высказал со всей ясностью, как это сделал много спустя Л. Эйлер во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748)[1]. Добавим, что общими формулами преобразования координат Схоотен не пользуется и в каждом отдельном случае проводит все вычисления полностью. Так, например, он преобразует выведенное Декартом (см. стр. 105) уравнение гиперболы

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

сначала к виду

$$yy = \frac{c}{b}xy - ac,$$

а затем относит его к сопряженным диаметрам

$$yy = \frac{c^2}{4b^2}xx - ac.$$

Вообще, Схоотен подробно разъяснил многие теоремы и формулы, оставленные Декартом без вывода; например, чтобы построить нормаль к конхоиде, Схоотен выводит ее уравнение, которого нет у Декарта, и к полному решению задачи по методу своего учителя добавляет еще решение по способу Ферма, а также отыскание точек перегиба по Гюйгенсу (см. стр. 195).

Схоотен занимался также проблемой кинематического образования кривых и этому вопросу посвятил специальный «Трактат об органическом описании конических сечений на плоскости» (De organica conicorum sectionum in plano descriptione tractatus. Lugduni Batavorum, 1646), который впоследствии был переиздан в качестве четвертой из пяти книг его «Математических этюдов» (Exercitationum mathematicarum libri quinque. Lugduni Batavorum, 1657). В этом трактате приведен целый ряд как известных ранее, так и оригинальных кинематических построений эллипса, гиперболы и параболы. В частности, указано, что при движении концов данного отрезка по сторонам данного угла любая жестко связанная с отрез-

[1] Эйлер же впервые записал общие формулы преобразования координат, пользуясь тригонометрическими функциями угла поворота.

ком точка описывает дугу некоторого эллипса (для случая, когда точка лежит на отрезке, это знал еще Прокл в V в. нашей эры). Гораздо более общие приемы органического описания кривых вскоре предложил Ньютон (см. стр. 116—117).

Во втором латинском издании «Геометрии» помещены «Начала кривых линий» (Elementa curvarum linearum) другого ученика Схоотена Яна де Витта (1625—1672), республиканца, некоторое время состоявшего великим пенсионарием (государственным главой) Нидерландов. Целью де Витта было развитие подробного учения о конических сечениях, не прибегая к их пространственному определению, как сечений конуса. Для этого он положил в основу кинематическое образование параболы, гиперболы и эллипса, а затем геометрически показал, что возникающие таким путем кривые удовлетворяют симптомам Аполлония и, значит, суть сечения конуса. Труд де Витта содержит отдельные ценные результаты, но собственно аналитическое исследование в нем играет второстепенную роль [1].

Более высоко ценил и в большей мере использовал алгебраический метод Валлис в «Трактате о конических сечениях, изложенных по новому способу» (Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis, Oxoniae, 1655). Валлис определяет параболу, эллипс и гиперболу не стереометрически, а как кривые на плоскости в соответствии, как он говорил, с их абсолютной природой. В этих определениях формулируются зависимости между ординатами и отрезками диаметра, которые при соответствующем выборе системы координат выражаются уравнениями всех трех кривых, отнесенными к вершине. Здесь применяется та же система косоугольных координат, что у Аполлония, причем абсцисса обозначается d (diameter intercepta — «отсеченный диаметр»), соответствующие ординаты, параллельные направлению, сопряженному с выбранным диаметром, обозначаются p для параболы, e для эллипса и h для гиперболы, длина рассматриваемого диаметра обозначается t — «поперечная сторона» (latus transversum), а хорда, проведенная через фокус в направлении ординат, обозначается l — «прямая сторона» (latus rectum) [2]. В этих обозначениях уравнения параболы, эллипса и гиперболы получают вид

$$p^2 = ld, \quad e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2, \quad h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2.$$

Показав, что определенные таким образом кривые совпадают с коническими сечениями, Валлис стремится затем вывести их свойства из уравнений чисто алгебраически. Он подчеркивает преимущества такого вывода, как более общего и ясного и вместе с тем столь же научного. Однако в широком объеме это удалось сделать лишь в середине XVIII в. Сам он ограничился некоторыми основными теоремами, и его доказательства нередко состояли в передаче средствами алгебры рассуждений синтетического характера.

Помимо кривых второго порядка, в «Трактате о конических сечениях» рассмотрена кубическая парабола $p^3 = l^2d$, но изучается только часть этой кривой при положительных d и p; вторая половина этой линии здесь

---

[1] Отметим все же первый чисто аналитический вывод уравнений эллипса и гиперболы, как геометрических мест точек, сумма или разность расстояний которых до двух данных точек постоянна.

[2] Эту хорду Валлис вслед за Клодом Мидоржем называл параметром. Теперь так именуют полухорду $l/2$.

ошибочно изображена в виде правой половины линии $p^3 = - l^2d$, так что вся линия имеет вид обычной параболы. Однако уже в 1656 г. в предисловии к «Трактату, опровергающему диалог... М. Мейбома» (Adversus M. Meibomii... dialogum tractatus elencticus) Валлис нашел форму этой кривой правильно. Он здесь же обобщил свое наблюдение на произвольные параболы n-го порядка $p^n = l^{n-1} d$. Тем самым впервые были сознательно и явно применены отрицательные абсциссы, а не только ординаты.

Пространственные координаты

Во второй половине XVII и начале XVIII в. появилось еще несколько сочинений, содержавших аналитическую трактовку конических сечений, из которых мы отметим «Новые начала конических сечений» (Nouveaux élémens de sections coniques, Paris, 1679) члена Парижской академии наук и профессора Французского коллежа Филиппа де Лагира (1640—1718).

Художник по своей первой профессии, Лагир применял в тео ии конических сечений и проективно-геометрические соображения, а на его терминологии отразилось несомненное влияние Дезарга (см. стр. 123 — 124) Так, начальная точка обозначалась O (origine — «начало»), ось абсцисс называлась «стволом» (tige), точки на этой оси обозначались N (neuds — «узлы»), точки геометрического места — L (lieu — «место»), абсциссы ON назывались «частями ствола», а ординаты NL — «ветвями» (rameaux). Эта терминология наглядно показывает расположение абсцисс и ординат на заре развития аналитической геометрии; из обозначений Лагира привилось только обозначение O.

В «Новых началах» Лагира впервые получили, хотя и мимоходом, аналитико-геометрическое применение «декартовы» координаты точки в пространстве. Сама идея определять положение точки в пространстве с помощью ортогональных прямолинейных координат была печатно высказана еще в 1636 г. Дезаргом, но в другой связи (стр. 121). Обозначая эти координаты x, y, v, Лагир вывел уравнение пространственного места, заданного некоторым свойством его точек,

$$a^2 + 2ax = y^2 + v^2.$$

Для него было ясно, что вообще уравнение с тремя переменными соответствует поверхности, однако он не отметил, а может быть, и не заметил, что его место есть параболоид, получающийся при вращении параболы $y^2 = 2ax + a^2$ вокруг оси абсцисс.

Хотя пространственными координатами в конце XVII в. несомненно пользовались и другие математики (например, Иоганн Бернулли), но, кроме Лагира, в то время никто ничего по этому вопросу не опубликовал, да и он ограничился одним примером без его анализа. Вторично уравнения поверхностей — шаровой и еще нескольких — появляются у коллеги Лагира по Парижской академии Антуана Парана (1666—1716) в его «Математических и физических опытах и исследованиях» (Essais et recherches de mathématique et physique, Paris, 1705). Только А. Клеро приступил к более широкой разработке аналитической геометрии в пространстве.

«Перечисление кривых третьего порядка» Ньютона

Несмотря на указанные успехи, конкретные новые результаты, полученные в геометрии с помощью нового метода, были на первых порах немногочисленны, а главное, имели разрозненный характер. Бо́льшую роль, чем в самой геометрии, координатный метод и применение уравнений играли в разработке исчисления бесконечно малых. Но уже во второй половине 60-х гг. XVII в. Ньютон присоединил к аналитической геометрии конических сечений новую обширную область кривых 3-го порядка, лишь отдельные примеры которых были известны ранее. Правда, свое «Перечисление кривых третьего порядка» (Enumeratio lineis tertii ordinis) Ньютон опубликовал вместе с «Оптикой» много позднее (Лондон, 1704), однако все главные результаты, содержащиеся в «Перечислении», он довольно подробно изложил еще в рукописях 1667 или 1668 гг., а часть их получил даже в конце 1664 г.[1] Тщательно проштудировав незадолго перед тем вышедшее второе латинское издание «Геометрии» Декарта (1659—1661), а также сочинения Валлиса, Схоотена и нескольких других авторов, Ньютон очень быстро далеко опередил всех современников. Он полностью овладел аналитико-геометрическим методом, научился производить сложные преобразования косоугольных координат и уверенно распространил на высшие кривые все необходимые ему понятия теории конических сечений, дополнив их рядом новых идей и создав соответствующую терминологию,— например термины двойная, тройная и вообще кратная точка (punctum multiplex). Характерно одинаковое заглавие двух наиболее важных рукописей: «Перечисление кривых трех измерений». Для этого перечисления Ньютон преобразует общее уравнение кривой 3-го порядка в произвольных косоугольных координатах

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0$$

к простейшим формам и затем, следуя чисто аналитическими путями, производит систематическую классификацию кубических кривых, причем детально характеризует особенности каждого из 58 установленных им тогда видов, дает их тщательно выполненные чертежи и каждому из них присваивает свое наименование. Впоследствии Ньютон несколько уточнил классификацию, добавив еще 14 видов, ускользнувших ранее от его внимания; кроме того, он изменил первоначальную терминологию. В 1667 или 1668 гг. Ньютон подробно разработал и свой общий метод органического описания алгебраических кривых. Значительная часть этих открытий вошла в «Перечисление кривых третьего порядка», а несколько предложений Ньютон включил в «Математические начала» (1687) и во «Всеобщую арифметику» (1707). Впрочем, одну весьма важную теорему, сформулированную в другой рукописи, относящейся примерно к 1667 г.: число точек пересечения двух алгебраических кривых равно произведению их «измерений» Ньютон нигде не опубликовал. Впервые это сделал, по-видимому, Маклорен в 1720 г. (см. т. III, гл. 5).

Ньютон в равной мере свободно владел как синтетическими, в том числе проективными, методами, так и алгебраическим. В «Математических

[1] The Mathematical Papers of Isaac Newton, vol. I—II, ed. by D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin. Cambridge, 1967—1968 (vol. I, p. 155—212; vol. II, p. 1—159).

началах» (1687) необходимые предложения о конических сечениях он доказывал преимущественно в манере древних. Аналитическая теория конических сечений вообще не привлекла интереса Ньютона, хотя во «Всеобщей арифметике» есть несколько блестящих примеров алгебраического решения ее задач, в том числе задач, в «Математических началах», решенных синтетически. В сочинении о линиях третьего порядка сочетаются оба подхода. Здесь для нас существен прежде всего аналитико-геометрический аспект этого труда. Заметим предварительно, что координатная система у Ньютона уже ни в чем не отличалась от нашей косоугольной, вычерчивались обе оси и обращение с отрицательными абсциссами было безукоризненным.

Ньютон начинает с того, что совершенствует декартову классификацию алгебраических кривых, которые называет, подобно Декарту, «геометрическими». Он распределяет их по порядкам соответственно степени уравнений или, как он указывает, числу возможных точек их пересечения с прямой. «Негеометрические» кривые Ньютон называет линиями бесконечного порядка. Вопрос об инвариантности порядка кривой при замене координат не затрагивается, как не разбирается подробнее вопрос о числе ее точек пересечения с прямой линией.

После этого Ньютон обобщает на кривые третьего порядка понятия диаметра, оси, вершины, центра, общего центра, параметра. Например, диаметр определяется, как геометрическое место точек, для которых сумма двух отрезков хорд, параллельных какому-нибудь направлению, взятых с одной стороны, равна третьему отрезку тех же хорд, взятому с другой стороны. Центр есть точка пересечения каких-либо двух диаметров, общий центр — точка пересечения всех диаметров. Затем для характеристики поведения кривых вводятся понятия гиперболической ветви, имеющей прямую асимптоту, с которой совпадает касательная при удалении точки касания в бесконечность, и параболической ветви, касательная к которой удаляется в бесконечность вместе с точкой касания. Число асимптот не превосходит порядка кривой. Вводятся также особые точки кривых — узловые, точки заострения, изолированные (термин «особая точка» (point singulier) употребил в работе 1740 г. французский геометр Ж. П. де Гюа де Мальв, см. т. III, гл. 5). Ньютон рассматривает и бесконечно удаленные точки, хотя несколько иначе, чем мы.

Все это используется для детального описания кривых третьего порядка, которые, согласно Ньютону, могут быть приведены к четырем основным типам, в свою очередь подразделяющимся на 72 вида. Для каждого вида указаны характер ветвей, асимптоты, особые точки и дан отдельный рисунок. Эти четыре типа имеют уравнения

$$xy^2 + cy = P, \quad xy = P, \quad y^2 = P \text{ и } y = P,$$

где

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

и вид кривой оказывается зависящим от характера корней уравнения $P = 0$, а в случае первого типа и корней уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0.$$

Перечислением и анализом свойств линий третьего порядка Ньютон не только чрезвычайно обогатил теорию алгебраических кривых, но и показал

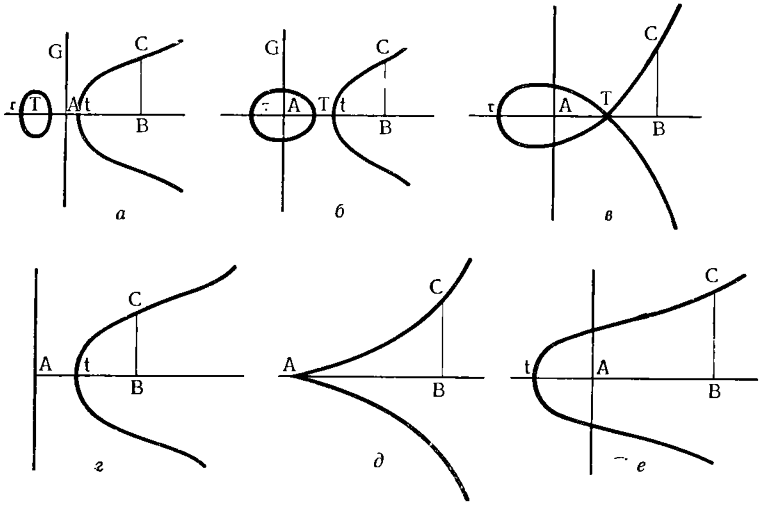


Рис. 11

огромное значение координатного метода в самой геометрии. В этом же сочинении он развивает и важные проективные идеи, ничего не зная, вероятно, о более ранних исследованиях Дезарга и Паскаля. Именно, он утверждает, что все виды линий третьего порядка суть центральные проекции — «тени от светящейся точки» — шести расходящихся парабол, т. е. кривых третьего типа, имеющих уравнения $y^2 = P$ (рис. 11, *а*, *б* соответствуют трем действительным неравным корням $A\tau$, AT, At уравнения $P = 0$; *в*, *г* — случаю двух равных корней; *д* — тройному корню, *е* — случаю двух мнимых корней). «Если,— писал Ньютон,— на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то тенями конических сечений всегда будут конические сечения; тени кривых второго рода будут всегда кривыми второго рода, тени кривых третьего рода будут всегда кривыми третьего рода и так далее до бесконечности. И совершенно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, точно так пять расходящихся парабол производят и доставляют все другие кривые второго рода» [1].

Сказанным Ньютон не ограничивается. Развивая кинематические приемы Декарта и Схоотена, он учит еще «органическому описанию» кривых. Если точка пересечения одной пары сторон двух заданных углов, вращающихся вокруг своих вершин, движется по прямой, то точка пересечения другой пары описывает коническое сечение (в частном случае — прямую). Эту теорему, в которой кривая второго порядка рассматривается по существу как место точек пересечения соответствующих лучей двух проективных пучков (их теорию построил Я. Штейнер, 1832), Ньютон доказал в «Математических началах» синтетически и во «Всеобщей ариф-

---

[1] *И. Ньютон.* Математические работы. Перевод, статьи и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.— Л., 1937, стр. 206. Родом кривой Ньютон называл ее порядок, уменьшенный на единицу.

метике» аналитико-геометрически[1]. «Органическое описание» служило Ньютону одним из средств решения актуальной задачи проведения конического сечения по пяти условиям, включающим прохождение через данные точки и касания с данными прямыми. Этот вопрос интересовал еще Паскаля и легко решается при помощи его теоремы о вписанном в коническое сечение шестиугольнике (см. стр. 124). Ньютон пришел к той же задаче, исследуя вопрос об определении параболической орбиты кометы по трем наблюдениям; впрочем, последний вопрос решен в «Математических началах» другим, более простым способом.

В «Перечислении» Ньютон распространяет прием органического (проективного) описания линий на уникурсальные кривые высших порядков. В частности, если точка пересечения одной пары сторон двух вращающихся углов движется по коническому сечению, то точка пересечения другой пары описывает кривую третьего или четвертого порядка с двойными точками. Тут же рассмотрена задача проведения конического сечения через пять точек и кривой третьего порядка по семи данным ее точкам, из которых одна двойная. В заключение даны некоторые указания о применении кривых третьего порядка к построению корней уравнений. Любопытно, что, подобно Декарту, Ньютон считал, что в «геометрии кривые употребляются для решения задач при помощи их точек пересечения»[2]. Этого же мнения придерживался также Лейбниц.

Ньютон не привел доказательств подавляющего большинства своих предложений. Это было сделано многими геометрами XVIII в. и потребовало дальнейшего развития аналитических и проективных методов.

Идея бесконечно удаленной точки у Кеплера

Нам уже несколько раз пришлось касаться истории проективной геометрии, первые теоремы которой имелись еще у древних (см. т. I, стр. 137 и 151). В XVII в. проективные методы получают у нескольких ученых замечательное развитие. Этому содействовали различные обстоятельства — прежде всего задачи теории перспективы, о которой мы скажем несколько далее, а также геометрические вопросы астрономии, о которых частично уже говорилось, да и внутриматематические потребности.

Возвращаясь от Ньютона к рубежу XVI и XVII вв., мы находим несколько важных идей, в частности применение бесконечно удаленной точки у Кеплера. Так как при проектировании параллельные прямые могут перейти в пересекающиеся (с этим явлением мы постоянно сталкиваемся, когда смотрим на две параллельные линии на горизонтальной плоскости: в нашем глазу эти линии проектируются в прямые, которые кажутся пересекающимися на линии горизонта), то для того, чтобы точке пересечения двух прямых, полученных проектированием двух параллелей, всегда отвечала некоторая точка, следовало ввести понятие о бесконечно удаленных точках, которые можно было бы считать точками пересечения параллельных прямых. Бесконечно удаленную точку можно представить

---

[1] В приведенном выше кинематическом описании гиперболы у Декарта (см. стр. 105) она также образуется как геометрическое место точек пересечения соответствующих лучей пучка прямых с центром в G и пучка прямых, параллельных направлению KC.

[2] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 208.

себе как предельное положение точки, удаляющейся по прямой в бесконечность, причем следует считать одной и той же бесконечно удаленной точкой предельные положения точки, удаляющейся в бесконечность с обеих сторон. Бесконечно удаленную точку можно представить себе как предельное положение двух прямых при стремлении этих прямых стать параллельными; поэтому бесконечно удаленные точки всяких двух параллельных прямых совпадают и их можно рассматривать как точки пересечения этих прямых.

Понятие бесконечно удаленной точки появилось тогда, когда математики стали систематически иметь дело с предельными переходами. Впервые оно было сформулировано одним из основоположников интеграционных методов Нового времени великим астрономом Иоганном Кеплером (1571—1630). Кеплер, уроженец г. Вейля в Вюртемберге, был воспитанником Тюбингенского университета, где под влиянием профессора Михаэля Местлина (1550—1631) полюбил математику и астрономию и стал приверженцем коперниканской системы мира. Впрочем, Местлин мог познакомить своего ученика с гелиоцентрической доктриной лишь частным образом: в лекциях он, по требованию университетских руководителей, излагал систему Птолемея. Жизнь Кеплера была трудной. С 1594 г. он работал профессором «математики и морали» в Граце, где должен был заниматься и предсказанием не только погоды, но и политических событий как астролог. Горькая ирония звучит в словах Кеплера, говорившего, что матери астрономии пришлось бы голодать, если бы ей не зарабатывала на хлеб ее дочь астрология. Но Грац пришлось покинуть, так как здесь начались гонения на протестантов, к числу которых принадлежал Кеплер. В 1600 г. он переехал в Прагу по приглашению выдающегося датского астронома Тихо Браге (1546—1601), состоявшего тогда придворным астрономом и астрологом германского императора Рудольфа II (1552—1612). После смерти Браге Кеплер занял его должность. Годы жизни в Праге были весьма продуктивными для Кеплера, хотя жил он постоянно в большой нужде: жалованье ему платили весьма неаккуратно и неполностью. В Праге вышел его труд по оптике, о котором говорится несколько далее, и здесь же, используя значительные по своей точности наблюдения Браге над движением планеты Марс, он установил первые два закона обращения планет, которые носят его имя: 1) планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, и 2) время движения планеты на дуге ее орбиты относится по времени ее полного оборота как площадь, описанная радиус-вектором, проведенным из фокуса в точки дуги, к площади всего эллипса. Эти замечательные открытия были опубликованы в «Новой астрономии» (Astronomia nova, Pragae, 1609) [1]. В 1612 г. после смерти императора Кеплер переехал в Линц и здесь преподавал математику, а также наблюдал за измерительными работами. В Линце он опубликовал свой главный труд по математике — «Новое измерение винных бочек» (1615), о котором говорится далее, а также увенчал свои астрономические исследования открытием третьего закона: 3) квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы их средних расстояний от Солнца («Гармония мира» — «Harmonices mundi», 1619). Но в этот же период жизни ему довелось перенести тяжелую драму — судебный процесс против его матери,

---

[1] В этой книге оба закона установлены для Марса; в «Кратком изложении коперниканской астрономии» (Epitome astronomiae Copernicanae, Lincii — Francoforti, 1618—1621) Кеплер распространил их на все планеты и спутники.

Иоганн Кеплер
(с современного портрета *Я.* ван дер Гейдена)

которую обвинили в колдовстве и которую он мужественно защищал и в конце концов с немалым риском для самого себя спас от угрожавшего ей сожжения на костре. Но и Линц оказался небезопасным из-за усилившихся преследований протестантов, и Кеплер его покинул в 1626 г. Последние годы он провел в скитаниях, тщетно добиваясь того, чтобы с ним расплатились его различные высокопоставленные должники, в том числе известный полководец Валленштейн (1583—1634).

Для истории геометрии большой интерес представляет «Оптическая часть астрономии» (Astronomiae pars optica, Francoforti, 1604). Под-

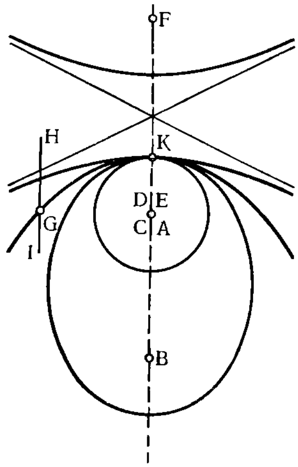


Рис. 12

заголовок последнего сочинения («Дополнения к Вители» — «Paralipomena ad Vitellionem») и большое число ссылок на «Оптику» Ибн ал-Хайсама (Альхазена) указывают на преемственные связи с этими учеными. Здесь в разделе «О конических сечениях» Кеплер указывает, что сечение конуса плоскостью может быть прямой, кругом, параболой, гиперболой и эллипсом, причем «прямая линия переходит в параболу через бесконечные гиперболы, а далее через бесконечные эллипсы в круг» (рис. 12) и что «самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола, самый острый из эллипсов — парабола, а самый тупой — круг» [1]. Далее Кеплер говорит: «У круга имеется один фокус A, он же и его центр. У эллипса имеются два фокуса B, C, равноудаленные от центра фигуры, и чем острее эллипс, тем более удаленные. У параболы имеется только один фокус D внутри фигуры, а другой следует представлять себе на оси сечения вне или внутри его удаленным от первого на бесконечное расстояние, так, что линия HG и IG, проведенная из этого невидимого фокуса в произвольную точку G сечения, параллельна оси DK. У гиперболы внешний фокус F тем ближе к внутреннему фокусу E, чем тупее гипербола, причем внешний фокус для одного из двух противоположных сечений является внутренним для другого и наоборот» [2].

Рассуждение Кеплера замечательно в нескольких отношениях. Здесь впервые в европейской литературе появляется термин «фокус» (focus — буквально «огонь, очаг») под несомненным влиянием Вители, называвшего фокус параболического зеркала точкой, где «можно зажечь огонь» (ignem est possibile accendi) [3]. Впоследствии этот термин Кеплер употреблял в «Новой астрономии». Здесь, далее, появляется выражение «бесконечно удаленный» — у Кеплера «удаленный на бесконечное расстояние» (infinito intervallo remotus) для второго фокуса параболы, причем этот

---

[1] *I. Kepler.* Gesammelte Werke, Bd. II. München, 1939, S. 90.
[2] Там же, стр. 91—92.
[3] Vitellonis Thuringopoloni Opticae libri decem. Basileae, 1572, p. 401.

фокус называется невидимым (caecus). Кеплеру ясно, что «невидимый фокус» замыкает ось DK в обоих направлениях и что через него проходят все прямые HGI, параллельные оси. Кеплер рассматривает непрерывный переход конических сечений друг в друга, при котором эллипс может перейти в параболу, а парабола — в гиперболу, причем после перехода второго фокуса через бесконечно удаленную точку он появляется с другой стороны вместе со второй ветвью гиперболы, которую Кеплер называет античным термином «противоположное сечение». Выражения Кеплера «самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола», и «самый острый из эллипсов — парабола», показывают, что он считает прямую предельным случаем гиперболы, а параболу — предельным случаем и гиперболы, и эллипса. Представление о параболе как о гиперболе или эллипсе с бесконечно удаленным фокусом — первое применение так называемого принципа непрерывности.

Возникновение проективной геометрии

Как было сказано, проективная геометрия выросла главным образом из теории перспективы, которая в XVI в. была в центре внимания художников и архитекторов. И в начале XVII в. появилось несколько книг по этому предмету Гвидубальдо дель Монте (1545—1607), Стевина, Франсуа д'Эгильона (1566—1617) и других. Заметим, что в «Шести книгах по оптике» (Opticorum libri VI, Antverpiae, 1613) д'Эгильона наряду с другими проекциями рассмотрена и стереографическая, описанная еще Птолемеем, и вводится этот термин.

Все названные авторы были далеко превзойдены французским инженером, архитектором и геометром Жераром Дезаргом (1591—1661), который положил начало проективной геометрии как отдельной науке. О его жизни известно очень немногое. Мы знаем все же, что он был тесно связан с парижскими учеными, группировавшимися около Мерсенна, и не раз участвовал в их собраниях.

Дезарг не преследовал столь широких целей, как Декарт в его всеобщей математике, и идея алгебраизации геометрии осталась для него далекой. Его задача была более специальной: дать глубокое теоретическое обобщение графических приемов, употребляемых в архитектуре, живописи, резке камней и т. д., и вместе с тем учение о перспективе, оставшееся в значительной мере собранием полуэмпирических правил, поднять до уровня настоящей геометрической науки. Решая эту задачу, Дезарг и пришел к выделению общего проективного преобразования, как особого метода изучения свойств и взаимозависимостей фигур. В своем первом небольшом сочинении, объемом всего в 12 страниц, «Образец одного из общих способов... для употребления перспективы...» (Exemple de l'une des manières universelles ... touchant la pratique de la perspective..., Paris, 1636) Дезарг, определяя положение предмета расстояниями его точек от картинной и предметной плоскости и положением их проекций на линии пересечения этих плоскостей, показал, как построить перспективный масштаб для каждого из определяющих отрезков и с его помощью получить перспективное изображение предмета. По существу здесь было впервые предложено упоминавшееся уже координатное определение точек в пространстве, причем каждый отрезок предполагается выраженным числом.

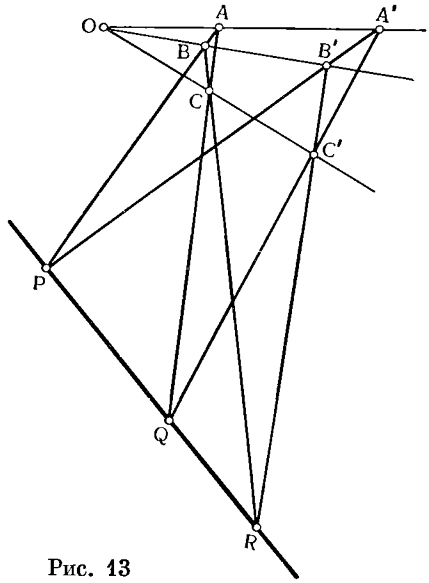


Рис. 13

Невелик по объему (30 страниц) и основной труд Дезарга «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan, Paris, 1639). Здесь уже широко применяется проективное преобразование, бесконечно удаленные точка и прямая (как точка или прямая пересечения пучков параллельных прямых или соответственно плоскостей), а также двойное отношение четырех точек, в частных случаях встречавшееся у Паппа. Дополняя плоскость бесконечно удаленной прямой, Дезарг трактует гиперболы и параболы как замкнутые линии, соответственно пересекающие эту прямую в двух точках или касающиеся ее; асимптоты гиперболы при этом представляют собой касательные к ней в ее бесконечно удаленных точках. Он рассматривает преобразования прямой, сохраняющие двойное отношение четверок точек, в частности инволюцию, и аналогичные преобразования плоскости, при которых параллельные прямые могут перейти в пересекающиеся, а эллипс — в гиперболу или параболу. Такие преобразования в настоящее время называются проективными преобразованиями прямой и плоскости. Инволюцию Дезарг определил как такое соответствие между точками B и H, C и G, D и F, ... прямой, на которой отмечена точка A, что прямоугольники, построенные на соответственных парах отрезков AB и AH, AC и AG, AD и AF, ..., имеют постоянную площадь. Если мы введем на прямой координаты и обозначим координаты точек, соответствующих друг другу и инволюции, через x и $'x$, то мы можем записать инволюцию в виде $'x = a^2/x$ и $'x = -a^2/x$. В первом случае инволюция обладает двумя неподвижными точками ($x = \pm a$) и называется гиперболической, во втором случае инволюция не имеет неподвижных точек (условию $'x = x$ удовлетворяют мнимые числа $x = \pm ia$) и называется эллиптической. Инволюция является простейшим проективным преобразованием на прямой и определяется

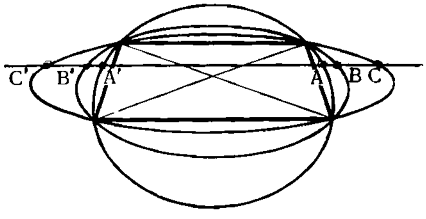


Рис. 14

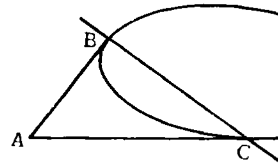


Рис. 15

как такое проективное преобразование на прямой, которое совпадает с обратным ему преобразованием (в настоящее время всякие преобразования, совпадающие с обратными им, называют инволютивными, и термин Дезарга, таким образом, получил распространение далеко за пределами проективной геометрии). Названия инволюций «эллиптическая» и «гиперболическая» объясняются тем, что первая из этих инволюций определяется на бесконечно удаленной прямой сопряженными диаметрами эллипса, а вторая — сопряженными диаметрами гиперболы, тогда неподвижными точками инволюции являются бесконечно удаленные точки асимптот гиперболы. Дезарг доказал, что неподвижные точки гиперболической инволюции гармонически разделяют каждую пару ее соответственных точек; он доказал также ряд теорем о гармонических четверках точек.

Имя Дезарга носят две доказанные им теоремы проективной геометрии. Согласно первой, содержащейся в сочинении 1636 г., если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке, то точки пересечения их соответственных сторон лежат на одной прямой (рис. 13). Согласно второй теореме, приведенной в «Черновом наброске», три пары прямых, которые можно провести через четыре точки (эти прямые можно рассматривать как стороны и диагонали четырехугольника; такую фигуру называют полным четырехсторонником), и всякое проходящее через эти четыре точки коническое сечение пересекается с любой прямой в парах точек, образующих инволюцию (рис. 14).

Дезарг доказал также ряд теорем о полюсах и полярах конических сечений. Если на каждой прямой, проходящей через некоторую данную точку плоскости, мы построим четвертую гармоническую точку для данной точки и двух точек пересечения этой прямой с некоторым коническим сечением, то все полученные таким образом точки лежат на одной прямой, которая называется полярой данной точки относительно данного конического сечения; данная точка в этом случае называется полюсом полученной прямой относительно конического сечения[1]. Если на плоскости задано коническое сечение, то на каждой прямой этой плоскости оно определяет инволюцию, которая ставит в соответствие каждой точке этой прямой точку пересечения этой прямой с полярой этой точки. Если прямая пересекается с коническим сечением, эта инволюция — гиперболическая, ее неподвижными точками являются точки пересечения прямой с коническим сечением; если прямая не пересекается с коническим сечением, инволю-

[1] Термины «полюс» и «поляра» (см. о них т. I, стр. 135—136) ввели в 1810 г. и в начале 10-х годов XIX в. французские геометры Ф. Ж. Сервуа (1767—1847) и соответственно Ж. Д. Жергонн (1771—1859).

ция — эллиптическая. Дезарг показал, что если из точки плоскости можно провести к коническому сечению две касательные, то прямая, соединяющая точки касания, является полярой этой точки (рис. 15), что полюс бесконечно удаленной прямой относительно эллипса или гиперболы — центр этого конического сечения и что поляра точки самого конического сечения — касательная к этой кривой в этой точке. Дезарг применил доказанные им теоремы к решению задач на построение, например к нахождению осей симметрии конического сечения, полученного проектированием окружности.

В своих сочинениях Дезарг пользовался особой, придуманной им терминологией, часто заимствованной из ботаники. Многие такие термины применял, как уже говорилось, Лагир, отец которого был дружен с автором «Чернового наброска». Все они были вскоре забыты, за исключением слова «инволюция» (involution — буквально «скрученность молодых листьев»).

Проективная геометрия Дезарга была встречена современниками поразному. Декарт вообще не проявил к ней интереса, что и не удивительно. Ферма дал ей высокую оценку, но сам этой проблематикой не занялся. Некоторых отпугивала уже одна необходимость овладеть новым математическим языком Дезарга. Идеи Дезарга увлекли тогда лишь одного математика, но зато им был Блез Паскаль, которому не исполнилось еще и семнадцати лет. Юный Паскаль немедленно обогатил проективную теорию конических сечений замечательной теоремой, которую, как говорят, Дезарг называл «великим предложением — Паскалью (la Pascale)».

Теорема Паскаля

Свое открытие Паскаль опубликовал в виде афиши, изданной в пятидесяти экземплярах для раздачи и пересылки отдельным ученым. Аналогично поступал ранее в нескольких случаях Дезарг. Афиша носила название «Опыт о конических сечениях» (Essay pour les coniques, Paris, 1640), рядом с которым стояли инициалы автора. В тексте воздается должное Дезаргу, как одному из великих умов того времени, наиболее искусных в математике. Сама теорема в принятой ныне форме, отличающейся от формулировки в афише (но также известной Паскалю), состоит в том, что точки пересечения произвольных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (рис. 16). Частным случаем является теорема Паппа о шестиугольнике, вписанном в пару прямых (см. т. I, стр. 151).

Но содержание афиши не ограничивалось сказанным. Паскаль подчеркивал, что с помощью его теоремы и еще двух примыкающих к ней можно построить полную теорию конических сечений, включая свойства диаметров и касательных, описание сечений по нескольким данным их точкам и т. д. Известно, что после смерти Паскаля остались рукописи по проективной теории конических сечений. Их видел в 1676 г. Лейбниц, и в одном письме он кратко излагает их богатое содержание. Лейбниц полагал, что рукописи достаточно закончены, чтобы их можно было опубликовать. Однако труд Паскаля не увидел света и до сих пор разыскать его не удалось.

В условиях почти всеобщего увлечения разработкой математического анализа и его приложений, существенно опиравшихся на аналитическую

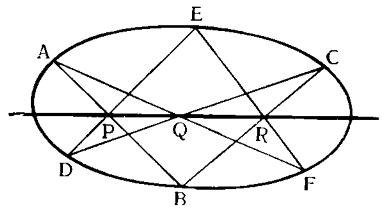
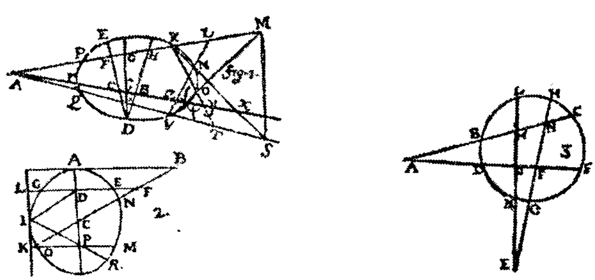


Рис. 16

геометрию, проективно-геометрическое направление Дезарга и Паскаля почти не получило продолжения. «Черновой набросок» первого был вовсе утерян, и лишь в 1845 г. М. Шаль, один из творцов новой проективной геометрии, случайно нашел его копию, сделанную в 1679 г. Лагиром. Печатный экземпляр этого сочинения был обнаружен еще сто лет спустя.

Если не считать нескольких учеников Дезарга в среде мастеров и художников, пытавшихся распространить более всего его учение о перспективе, то после Паскаля единственным его последователем был в XVII в. Лагир. Но этому геометру, имя которого встретилось нам уже в истории аналитической геометрии, не доставало, в отличие от Паскаля, глубины

Верхняя часть афиши с «Опытом о конических сечениях» Б. Паскаля (Париж, 1640)



ESSAY POVR LES CONIQVES Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.

Vand plusieurs lignes droictes concourent à mesme point, ou sont toutes paralleles entr'elles, toutes ces lignes sont dites de mesme ordre ou de mesme ordonnance, & la multitude de ces lignes, est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Ellipse, l'Hyperbole, la Parabole & l'Angle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupe parallellement à sa base, ou par son sommet ou des trois autres sens qui engendrent l'Ellipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Ellipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure I. Si dans le plan, M, S, Q du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droites MA, SA, & μ, le concours des droites MV, SK, & que par deux des quatre points, A K μ V qui ne soient point en mesme droite auec les points, M, S, comme par les points, K, V, passe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, es points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, sont de mesme ordre.

LEMM. II

проникновения в идеи Дезарга, которые он воспринял неполностью. Это относится, например, к идее введения бесконечно удаленных элементов и учению об инволюции. Все же одно из сочинений Лагира — «Конические сечения в девяти книгах» (Sectiones conicae in novem libros distributae, Parisii, 1685) — заслуживает быть отмеченным. Здесь свойства круга проектированием переносятся на конические сечения, причем используется теория поляр круга. Лагиру принадлежат и некоторые заслуги в разработке учения о перспективе.

В течение долгого времени проективная геометрия нового развития не получала. Оно началось лишь в первые десятилетия XIX в., и подготовкой ему послужили успехи начертательной геометрии в конце XVIII столетия.

Принцип непрерывности Лейбница и идея «геометрии положения»

Принцип непрерывности, в первичной форме встречающийся нам у Кеплера, был значительно обобщен Лейбницем в работе «Некий общий принцип, полезный не только в математике, но и в физике...» (Principium quoddam generale non in mathematicis tantum sed et in physicis utile...). В этом труде, при жизни Лейбница остававшемся в рукописи, он писал: «Этот *принцип всеобщего порядка* коренится в бесконечном и весьма полезен в рассуждениях, хотя до сих пор применялся он недостаточно и значение его не было оценено во всей его широте. Он абсолютно необходим в геометрии, но с успехом действует и в физике, ибо высшая мудрость, являющаяся источником вещей, действует в согласии с совершеннейшей геометрией и соблюдает гармонию ни с чем не сравнимой красоты. Поэтому я часто пользуюсь для проверки этим принципом, как своего рода пробным камнем, с помощью которого можно сразу же и при одном лишь внешнем рассмотрении вскрыть ложность многих дурно связанных мнений. Сформулировать этот принцип можно следующим образом: если среди *данных* или принятых явлений (casus) различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то оно вместе с тем необходимо станет меньше всякой величины и у *искомых* или последующих, вытекающих из данных. Или же, если выразиться общедоступнее: *если явления* (*или данные*) *непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами* (*или искомыми*). Это зависит от следующего более общего принципа: *если упорядочены данные, то упорядочены и искомые*» [1]. Лейбниц приводит несколько примеров применения этого принципа в математике, физике и философии. Один из математических примеров состоит в том, что касательная к кругу при проектировании круга в коническое сечение проектируется в касательную к этой линии; второй пример возвращает нас к идеям Кеплера о бесконечно удаленных точках: теоремы об эллипсе можно применять к параболе, если рассматривать ее как эллипс, один из фокусов которого бесконечно удален. Принцип непрерывности стал мощным орудием доказательства новых теорем в руках творцов проективной геометрии начала XIX в.— Л. Карно и особенно Ж. В. Понселе.

Лейбницу же принадлежит идея «геометрии положения» (geometria situs) или «анализа положения» (analysis situs) — своеобразного геометри-

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 194—195.

ческого исчисления, в котором роль чисел играют линии и другие геометрические фигуры и где ту роль, которую в обычной геометрии играют величины, выполняет взаимное расположение линий и геометрических фигур. Об этом Лейбниц 8 сентября 1679 г. писал Гюйгенсу: «Я еще не доволен Алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений. Поэтому... я полагаю, что нам нужен еще иной чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm), как Алгебра выражает величину (magnitudinem). Я думаю, что располагаю таким средством и что фигуры и даже машины и движения можно было бы представлять с помощью знаков, как Алгебра представляет числа и величины; и я посылаю вам этюд об этом, который, на мой взгляд, имеет существенное значение» [1]. Это письмо, опубликованное в собрании сочинений Лейбница, было хорошо известно математикам XIX в.: на него ссылаются основоположник векторного исчисления Г. Грассман и автор первого сочинения по топологии И. Б. Листинг. Лейбницевский термин «геометрия положения» применялся в 1736 г. Л. Эйлером при решении топологической задачи о семи кенигсбергских мостах (см. т. III, гл. 5), а в XIX в. для обозначения проективной геометрии Л. Карно и X. Штаудтом; термин «анализ положения» употребляли для топологии Б. Риман и А. Пуанкаре; введенный Листингом общепринятый ныне термин «топология» по существу является переводом латинского термина Лейбница на греческий язык. Однако геометрические исчисления XIX в. значительно отличались и по замыслу и по реализации от наброска самого Лейбница.

Проективное преобразование у Ньютона

При всем интересе Лейбница к проективной геометрии он сам ограничился здесь формулировкой общих идей. Ньютон применял проективные методы к решению конкретных задач. Мы упоминали об этом, рассказывая о его теории кривых третьего порядка. Остановимся еще на одном применении Ньютоном проективного преобразования специального вида. В V разделе I книги «Математических начал натуральной философии», посвященном определению орбит движущихся тел, имеющих вид конических сечений, в случае, когда не задан ни один фокус этих конических сечений, имеется XXII лемма: «Преобразовать фигуру в другую фигуру того же рода» (Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare) [2]. В этой лемме Ньютон определяет следующее преобразование кривой HGI в кривую hgi (рис. 17): произвольная точка G кривой HGI сначала проектируется параллельно прямой AO в точку D прямой AB, затем точка D проектируется из точки O в точку d прямой BL, из точки d проводится прямая dg под некоторым постоянным углом α к прямой BL и на этой прямой откладывается отрезок dg, определяемый пропорцией $dg : Od = DG : OD$. Если мы отнесем кривую HGI к косоугольным координатам с осями AB, AO, точка G этой кривой определяется абсциссой $X = AD$ и ординатой $Y = DG$. Если мы отнесем кривую hgi к косоугольным координатам с осью абсцисс BL, началом в точке a пересечения оси BL с прямой Oa, параллельной оси AB, и координатным углом α, то точка g этой кривой

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 198—199.
[2] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 131.

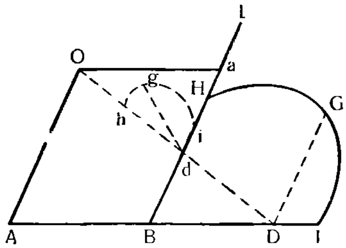


Рис. 17

определяется абсциссой $x = ad$ и ординатой $y = dg$. Если, далее, обозначить $AB = p$, $OA = q$, то $Od : OD = p : X$ и приведенную пропорцию можно переписать в виде $y : p = Y : X$. С другой стороны, из подобия треугольников Oad и OAD следует, что $ad : Oa = OA : AD$, т. е. $x : p = q : X$, так что преобразование Ньютона может быть записано в виде

$$X = \frac{pq}{x}, \quad Y = \frac{qy}{x}.$$

Такое преобразование является проективным. Ньютон показывает, что если точка G описывает прямую, коническое сечение и вообще алгебраическую кривую n-го порядка, то точка g описывает также соответственно прямую, коническое сечение и алгебраическую кривую n-го порядка; это преобразование переводит две прямые, пересекающиеся на оси AO, в параллельные прямые. Далее Ньютон замечает, что «эта лемма служит для решения трудных геометрических задач, преобразуя заданные фигуры в простейшие... После того, как для преобразованной фигуры задача будет решена, стоит только преобразовать ее обратно в первоначальную, чтобы получить требуемое решение для этой последней» [1].

В том же разделе «Математических начал» Ньютон строит коническое сечение по пяти точкам и по четырем точкам и одной касательной (ср. стр. 117). Это построение основано у Ньютона на XXI лемме, в которой доказывается, что если два пучка прямых, соответственные прямые которых пересекаются в точках одной прямой, повернуть на один и тот же угол вокруг их центров, то получатся два пучка, соответственные прямые которых пересекаются в точках одного конического сечения. Эта лемма является частным случаем важной теоремы проективной геометрии — теоремы Штейнера.

Хотя эти две леммы не получили дальнейшего развития у самого Ньютона, проективные преобразования в общем виде изучались уже аналитическим методом математиком школы Ньютона Эдвардом Варингом (см. т. III, гл. 5).

Теория параллельных линий

К XVII в. относится доказательство V постулата в работе Джона Валлиса «О пятом постулате и пятом определении VI книги Евклида, спорный вопрос геометрии» (De postulato quinto et definitione quinto lib. 6 Eucli-

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 133.

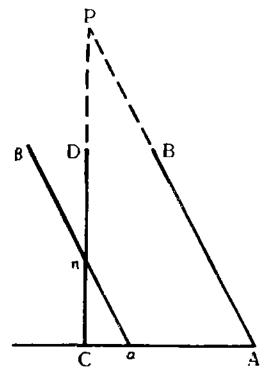


Рис. 18

dis dissertatio geometrica, 1663, опубл. 1693). В этой работе приводится полный перевод доказательства ат-Туси по римскому изданию 1594 г. Валлис исходит из следующей предпосылки: «Наконец, я приму (считая уже известными природу отношения и учение о подобных фигурах) в качестве «общего понятия»: для всякой фигуры возможна другая подобная ей фигура произвольной величины» [1]. Валлис обосновывает естественность этого «общего понятия», т. е., иными словами, аксиомы, тем, что его частным случаем является III постулат Евклида: «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг». Для того чтобы доказать, что две прямые AB и CD (рис. 18), образующие с прямой AC углы, в сумме меньшие двух прямых, пересекаются, Валлис передвигает эту прямую AB вдоль прямой AC таким образом, что угол CAB остается постоянным. При достаточном приближении к точке C прямая AB займет такое положение $\alpha\beta$, в котором оно пересечется с прямой C в точке π. По предположению Валлиса, для полученного треугольника $\alpha C\pi$ имеется подобный треугольник ACP; точка P и является искомой точкой пересечения.

Это сочинение Валлиса получило большую известность, хотя само по себе и не продвинуло сколько-нибудь далее исследование труднейшей проблемы постулата о параллельных, над решением которой математики продолжали трудиться еще в течение всего XVIII и первых десятилетий XIX в.

Наряду с теорией параллельных линий, сыгравшей важную роль в подготовке открытия в XIX в. неевклидовой геометрии, существенную роль в разработке этой геометрии сыграла упомянутая нами теорема о том, что площадь сферического треугольника пропорциональна избытку суммы его углов над двумя прямыми углами, доказанная Жираром (см. стр. 24). В случае, когда сумма углов треугольника меньше двух прямых, площадь треугольника также оказывается пропорциональной разности между двумя прямыми и суммой его углов; и этот факт, так же как его сравнение с теоремой Жирара, будет иметь первостепенное значение в исследованиях математика XVIII в. И. Г. Ламберта и Н. И. Лобачевского.

[1] *J. Wallis.* Opera mathematica, v. II. Oxoniae, 1693, p. 665.

9 Зак. № 1030