СЕДЬМАЯ ГЛАВА

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Возрождение методов Архимеда

Главным событием в истории математики XVII в. была разработка дифференциального и интегрального исчисления. Интеграционные по своему существу задачи на спрямление кривых линий, квадратуру площадей плоских и кривых поверхностей, кубатуру объемов тел, определение центров тяжести встречались еще в древности. Старейшими из них были спрямление окружности и квадратура круга. Демокрит с помощью атомистических процедур дал вывод нескольких предложений о кубатурах. Евдокс создал метод исчерпывания, позволивший строго доказать правильность этих предложений. Метод исчерпывания, эта античная форма метода пределов, получил новое блестящее развитие у Архимеда, который в своих квадратурах и кубатурах уже пользовался верхними и нижними интегральными суммами. Ряд открытий Архимед произвел при помощи механического метода, уравновешивая сечения рассматриваемых фигур, переносимых им в другие точки; при этом он представлял себе тела, как составленные из всех их плоских сечений, между собой параллельных, а плоские фигуры, как составленные аналогичным образом из всех их хорд. В этом эвристическом приеме общая атомистическая идея выступала в форме идеи о неделимых элементах низшего измерения, чем данная измеряемая фигура. Архимед решал и задачи дифференциального исчисления, на проведение касательных к кривым линиям и нахождение максимумов и минимумов. Методы Архимеда получили некоторое развитие в странах ислама и в XII—XIII вв. стали известны в средневековой Европе.

Хотя распространение идей Архимеда в Средние века было ограниченным (наибольшую известность имели «Измерение круга» и некоторые предложения из труда «О шаре и цилиндре»), оно поддерживало интерес к «архимедовой традиции», так же как рассуждения и споры о свойствах непрерывного и дискретного поддерживали интерес к общим проблемам математики бесконечного. Все это сыграло свою роль, когда во второй половине XVI и начале XVII в. на первый план в механике и астрономии стали выдвигаться новые, все более сложные задачи, требовавшие инфинитезимальных методов решения.

Эпоха Возрождения явилась и временем возрождения архимедовой традиции.

Выше уже говорилось (стр. 13—15) о появлении в Италии первых печатных изданий Архимеда и, в частности, о превосходных латинских переводах его трудов, выполненных двумя блестящими знатоками древнегреческой математики — разносторонне образованным уроженцем Мессины Франческо Мавролико (1494—1575) и урбинцем Федериго Коммандино (1509—1575). Главной заслугой этих ученых явились самые переводы античных классиков, и особенно Архимеда, непосредственно с греческого, но они же оба дали первые в эпоху Возрождения образцы оригинального использования идей великого сиракузца, правда, к решению задач, еще не выходивших из очерченной им области. И Мавролико, и Коммандино хорошо усвоили метод исчерпывания и могли применять его самостоятельно. Об этом свидетельствуют «Книга о центре тяжести тел» (Liber de centro gravitatis solidorum, Bononiae, 1565) Коммандино и дополнения, приложенные к переводу Архимеда Мавролико. Оба они, в частности доказали, что центр тяжести сегмента параболоида вращения делит отрезок оси между вершиной и основанием в отношении 2 : 1. Архимед применяет это предложение в трактате «О плавающих телах», но его доказательство по методу исчерпывания не сохранилось, а механический вывод в «Послании» к Эратосфену в XVI в. известен не был. Мавролико опирается на то, что площади сечений сегмента, параллельные основанию, относятся, как квадраты ординат, т. е. как хорды образующей параболы. Поэтому центр тяжести сегмента можно определить так же, как треугольника, средней линией которого является ось параболоида. Подобные соображения, встречающиеся и у позднейших авторов, прокладывали путь к созданию метода неделимых. Однако доказательство Мавролико выдержано в классической форме метода исчерпывания.

В трудах Архимеда европейские математики находили много идей, стимулировавших их творчество. Но они не ограничивались одним применением античных приемов. Сложность и громоздкость классического метода исчерпывания в эпоху поисков универсальных методов исследования, расцвета алгебры и приближенных вычислений становилась и очевидной и непереносимой. Метод исчерпывания нужно было упростить, одновременно сообщив ему большую эффективность. Первые шаги к этой цели были сделаны с помощью выделения общих идей, лежавших в основании метода, и общей схемы вывода, которую греки в каждом отдельном случае повторяли применительно к свойствам рассматриваемой фигуры.

Первые обобщения метода исчерпывания

Единственной общей теоремой, которой древние постоянно пользовались при квадратурах и кубатурах, было предложение I книги X «Начал» (т. I, стр. 101), которое в наших обозначениях можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots) = 0,$$

если $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ для всех n. Математики начала XVII в. добавили нередко встречавшийся частный случай теоремы о пределе отношения двух вариант, как Ш. Мерэ назвал переменные, образующие последовательность: если две варианты a_n, b_n находятся в данном постоянном отношении c к d, то их пределы a, b $(\neq 0)$ также находятся в том же данном отношении. Это сформулировал в иных выражениях и доказал профессор высшей школы в Риме и член Академии деи Линчеи Лука Валерио (1552—1618), дарования которого высоко ценили современники, и среди них Галилей.

«Три книги о центре тяжести тел» (De centro gravitatis solidorum libri tres, Romae, 1604) Валерио, примыкающие к труду Коммандино, посвящены вычислению центров тяжести многих тел вращения конических сечений и их сегментов. Автор специально предупреждал читателя о своем намерении придать доказательствам этой трудной части геометрии прямой и общий характер. Выводы основаны на двух теоремах. В первой раз навсегда устанавливается, что разность между площадями вписанных и описанных около сегмента выпуклой кривой ступенчатых фигур, составленных из параллелограммов, может быть сделана, если взять их общую высоту достаточно малой, меньше любой данной площади. Другая теорема имеет предметом только что указанное свойство отношения пределов двух вариант, которые предполагаются либо монотонно возрастающими, либо монотонно убывающими [1]. Ограничение монотонными величинами, естественное в круге рассматривавшихся геометрических задач, сохранялось до самого конца XVIII в. Явного определения понятия предела и какого-либо специального термина для него у Валерио не было.

К тому же кругу идей принадлежали исследования фламандского иезуита Григория Сен Венсана (1584—1667), обучавшегося в Риме у Клавия и затем преподававшего математику в Лувене, Праге, Генте и других городах. Эта «охота к перемене мест» была, по-видимому, невольна и связана с открытым сочувствием Григория коперниканству. «Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений» (Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni) Григория был закончен к 1629 г., но увидел свет лишь в 1647 г. в Антверпене. К этому времени ряд остроумных приемов Григория был уже более систематически развит другими учеными, и его сочинение не привлекло того интереса, какой могло бы иметь в начале 30-х годов; к тому же оно было несколько скомпрометировано ошибкой, допущенной автором в его попытке квадратуры круга. Тем не менее «Геометрический труд» не остался без влияния, притом на столь выдающихся математиков, как Паскаль, Менголи, Грегори и Лейбниц. Последний высоко ценил открытия Григория и видел в нем одного из своих предшественников.

Большое место в «Геометрическом труде» занимают кубатуры тел, ограниченных плоскостями $z=0$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ и цилиндрами $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, где y и z суть ординаты конических сечений. Объем такого тела выражается интегралом $\int_a^b yz\,dx$. Выбирая y и z по-разному, но так, чтобы произведение yz оставалось неизменным, Григорий получал различные равновеликие объемы. Например, тело, ограниченное одинаковыми полуцилиндрами $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\sqrt{a^2-x^2}$ и плоскостями $z=0$, $y=0$, равновелико тетраэдру с гранями $z=0$, $y=0$, $y=a-x$, $z=a+x$. Наиболее известный результат Григория, вошедший во многие учебники, представляет собой вычисление объема цилиндрического копыта, как А. Г. Кестнер назвал сегмент, отсекаемый в прямом круговом цилиндре наклонной плоскостью, проходящей через диаметр основания. Григорий, конечно, не знал, что эта задача была решена в «Послании» Архимеда, но ему должны были быть известны соответствующие исследо-

[1] Точнее говоря, Валерио доказывает это свойство для нижних и верхних пределов вариант.

вания Кеплера (см. стр. 169). Упомянем еще, что Григорий первый указал в печати, что площади между гиперболой $y = c^2/x$ и ее асимптотой делятся сопряженными ординатами, следующими в геометрической прогрессии, на равновеликие полосы (при этом абсциссы и основания полос также образуют геометрическую прогрессию). Лейбниц справедливо относил это открытие, устанавливающее замечательное соотношение между гиперболической площадью и логарифмами, к лучшим достижениям Григория. Правда, в «Геометрическом труде» о логарифмах в явном виде не говорится. Это вскоре сделал в форме, равносильной равенству $\int\limits_a^b \frac{c^2}{x}\,dx = c^2 \ln \frac{b}{a}$, другой уроженец Бельгии, ученик и собрат Григория по ордену иезуитов,— Альфонс Антон де Сараса (1618—1667) в «Решении задачи, поставленной Мерсенном» (Solutio problematis a Mersenno propositi, Antverpiae, 1649).

Регулярно применяя метод исчерпывания, Григорий, подобно Валерио, стремился выделить его общую структуру. Излагая прием вписывания в два сравниваемых тела множества очень тонких параллелепипедов, он указывал, что их число можно увеличивать так, чтобы они исчерпали эти тела (ut corpora ipsa ... exhaustiant). Здесь впервые, кажется, было употреблено в данной связи слово «исчерпывать». Некоторые историки науки считают его неудачным, ибо при любом числе вписанных фигур данная фигура не исчерпывается до конца (это знал и Григорий!), но предложенный термин столь метко характеризовал процесс неограниченной геометрической аппроксимации, что прочно вошел в обиход математиков.

Григорий же на примере бесконечной убывающей геометрической прогрессии впервые сформулировал определяющее свойство предела варианты. Что сумма s_n прогрессии $a + aq + \ldots + aq^n$, $q = 1/4$, при достаточно большом числе членов сколь угодно приближается к $a/(1 - q)$, доказал еще Архимед. Орем мыслил бесконечную прогрессию $a + aq + \ldots$ $\ldots + aq^n + \ldots$, $0 < q < 1$, как целое, равное $a/(1 - q)$ (т. I, стр. 281). Виет, полагая в выражении $q = \frac{s_n - a}{s_n - aq^n}$ значение aq^n равным нулю, вывел, что $q = (s - a)/s$ («VIII книга ответов по различным вопросам математики», Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turonis, 1593). Конечно, во всех этих случаях производился переход от s_n к пределу s, так же как в рассмотренной несколько далее работе Ферма, где геометрические прогрессии служат средством квадратуры кривых $y = 1/x^n$ (см. стр. 184). Григорий трактует сумму убывающей прогрессии как предел суммы s_n ее первых n членов при $n \to \infty$ со всей определенностью. Разумеется, такая трактовка в глазах математика XVII в. лишь констатировала свойство величины s, существование которой предполагается заранее; она вовсе не служила формальным определением понятия «суммы» сходящейся прогрессии. Григорий (так же, как это делал, например, Орем) исходил из данного конечного отрезка $AK = s$ и затем делил его точками B, C, D так, что

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \ldots = \lambda < 1,$$

при этом AB, BC, CD,... образуют убывающую геометрическую прогрессию (со знаменателем $1/(1 + \lambda)$, точки B, C, D, ..., как доказывал Григорий, сколь угодно близко подходят к точке K, а величина AK равна «величине всей прогрессии», продолженной до бесконечности. Саму точку K Григорий называл пределом, концом (terminus) прогрессии: «Предел прогрессии есть конец ряда (Terminus progressionis est seriei finis), которого ни одна прогрессия не достигает, хотя бы была продолжена до бесконечности, но к которому может приблизиться более чем на любой данный промежуток» [1]. Как видно, предел здесь введен через предельную точку последовательности точек, соответствующих частным суммам убывающей прогрессии.

Основываясь на суммировании сходящейся геометрической прогрессии, Григорий подробно рассмотрел парадокс Зенона об Ахиллесе и черепахе (см. т. I, стр. 91). Это первый известный в мировой литературе анализ такого рода, хотя возможно, что рассуждали аналогично и некоторые греки. Такое «объяснение» знаменитого парадокса вслед за Григорием давали многие авторы вплоть до наших дней, особенно благодаря изложению вопроса в широко распространенной «Теории и практике арифметики» (Arithmeticae Theoria et Praxis, Lovanii, 1656) другого бельгийского иезуита, упоминавшегося нами,— Андре Таке.

В только что названном учебнике Таке чисто арифметически вывел сумму бесконечной сходящейся прогрессии $u_1, u_2, \ldots$ со знаменателем $q < 1$ из суммы s_n, взятой в виде $\frac{u_1 - u_n}{s_n - u_1} = \frac{\frac{1}{q} - 1}{1}$. Этот «переход» (transitus) он доказывал тем, что при продолжении прогрессии до бесконечности ее «наименьший член исчезает (evanescat)» [2].

В «Четырех книгах о цилиндриках и кольцах» (Cylindricorum et annularium libri IV, Antverpiae, 1651) [3] Таке применил систематизированный в духе Валерио и Григория метод исчерпывания к кубатуре различных цилиндрических отрезков и кольцевидных тел. 28-е определение I книги этого труда содержит описание «исчерпывания величины», весьма близкое позднейшим определениям предела: «говорят, что какая-либо величина исчерпывается вписанными в нее величинами, если вписанные величины могут отличаться от нее меньше, чем на данную величину, т. е. сколь угодно мало» [4]. Первое предложение той же книги содержит новую, несколько упрощенную формулировку теоремы Валерио: «Даны величины A и B либо поверхности, либо тела; пусть дано также некоторое отношение E к F. Если в величины A и B могут быть без конца вписываемы новые и новые величины, постоянно находящиеся в том же отношении, что E и F, и исчерпывающие величины A и B, т. е. разнящиеся от них на сколь угодно малый недостаток, то величина A будет относиться к величине B, как E к F» [5].

Заслуживает упоминания и более раннее применение метода исчерпывания С. Стевином в работах по статике, примыкающих к трудам Архиме-

---

[1] *Gregorius a St. Vincentio.* Opus geometricum, Antverpiae, 1647, p. 55.

[2] *A. Tacquet.* Arithmeticae Theoria et Praxis. Amstelaedami, 1704, p. 475.

[3] Б. Кавальери (1635) назвал «цилиндрикой» тело, ограниченное произвольной замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя секущими ее параллельными плоскостями; круговой цилиндр древних является частным случаем цилиндрики. Аналогично Кавальери обобщил определение кругового конуса, введя понятие о «конике».

[4] *A. Tacquet.* Opera mathematica. Antverpiae, 1707, p. 448. Аналогично рассматриваются последовательности описанных фигур.

[5] Там же, стр. 449.

да и Коммандино. Особенно интересны его числовые примеры, иллюстрирующие общие теоремы о давлении жидкости, в «Началах гидростатики» (De Beghinselen des Waterwichts, Leiden, 1586) — труде, получившем широкую известность благодаря латинскому переводу В. Снелля (1608) и французскому А. Жирара (1634). Требуется определить давление воды p на боковую стенку заполненного ею куба со стороной в 1 фут. Стенка делится горизонтальными линиями на 4, 10, 1000, n полос. Оценивая снизу и сверху давление на каждую полосу соответственно ее нижней и верхней границам, а затем суммируя неравенства, Стевин получает $\frac{6}{16} < p < \frac{10}{16}$, $0,45 < p < 0,55$, $0,4995 < p < 0,5005$ и вообще $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Таким образом доказывается, что разность между давлением на стенку p и весом $^1/_2$ кубического фута воды меньше любого данного давления. Далее Стевин проводит рассуждение, которое заменяет приведение к нелепости порознь неравенств $p > {}^1/_2$ и $p < {}^1/_2$: 1) если p отличается от $^1/_2$, то существует давление, меньшее их разности; 2) по доказанному не существует давления, меньшего, чем разность между p и $^1/_2$; 3) поэтому p не отличается от $^1/_2$, т. е. $p = {}^1/_2$. Понятие об арифметическом пределе варианты здесь выступает с совершенной ясностью, хотя и не определяется, а давление p на стенку трактуется как предел суммы давлений на бесконечное число бесконечно узких горизонтальных ее полос. Заключительное рассуждение устанавливает единственность предела этой суммы — совпадение p и $^1/_2$, причем Стевин оперирует фактически с модулем разности $|p - {}^1/_2|$. Впоследствии математики XVII в., например Б. Паскаль, уже без дальнейшего обоснования принимали, что две величины, отличающиеся на величину, меньшую любой данной, между собой равны. Заметим, что труды Стевина были, конечно, знакомы и Григорию Сен Венсану и Таке, а Паскаль хорошо знал сочинения последних.

Задачи анализа XVII века

Представители только что рассмотренного направления обобщали и упрощали классические приемы квадратур и кубатур и содействовали выделению идеи и простейших схем предельного перехода. Однако не это направление, столь близко придерживавшееся древнегреческих методов, стало ведущим в развитии инфинитезимальной математики Нового времени.

Для решения актуальных задач естествознания и математики было совершенно недостаточно выделить понятие предела последовательности и его простейшие свойства вроде приведенной теоремы Валерио. Уже на первом этапе научной революции Нового времени во внешне разнородной форме были поставлены проблемы интегрирования и дифференцирования целых, дробных и иррациональных алгебраических выражений, а также всех основных элементарных трансцендентных функций. К этому добавилась проблема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого, а затем и высших порядков. Между тем античная математика не вышла за границу исследования немногих простейших зависимостей вроде $y = x$, $y = x^2$ и нескольких замечательных пределов вроде $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Ученым XVII в. предстояло, таким образом, с помощью новой алгебры, впервые создать разветвленный аналитический аппарат математики бесконечного.

Но этого мало. В ходе исследований выяснялась необходимость и одновременно создавались условия для выработки целой системы общих понятий математического анализа. В ходе работы выяснялось внутреннее структурное единство в решении различных интеграционных проблем, будь то квадратуры, кубатуры, спрямления, вычисление центров тяжести, давления, пути движущегося тела и т. д. Такая же картина обнаруживалась в дифференциальных проблемах, шла ли речь о проведении касательных и нормалей, отыскании экстремумов, точек перегиба, кратных корней уравнений, скорости движения и проч. Лишь немногие такие наблюдения были сделаны в древности (ср. т. I, стр. 127). Вместе с тем была замечена взаимно обратная зависимость между обоими типами задач и между методами их решения, зависимость, о которой ранее и не подозревали. Все это влекло за собой неизмеримо более значительные изменения во всем математическом мышлении, чем первые обобщения Стевина, Валерио, Григория Сен Венсана и Таке. Математики начинают рассуждать в терминах теории функций, и из множества геометрических и механических образов кристаллизуются аналитические понятия функции, интеграла, дифференциалов различных порядков, производной и т. д., а из инфинитезимальных приемов вырабатываются как основные две операции — интегрирование и дифференцирование, к которым добавляется не менее важное разложение функций в бесконечные ряды.

Закладывая фундамент исчисления бесконечно малых, ученые XVII в. прежде всего отправлялись от античного наследия, например от идей математического атомизма или интегральных сумм Архимеда. Но магистральный путь в создании исчисления бесконечно малых приходилось прокладывать заново, руководствуясь совсем иными целями и средствами. Это относится прежде всего к центральной идее универсального научного метода, реализацией которой было операционное исчисление бесконечно малых, подобно е буквенной алгебре. Это относится и к представлению функций в форме аналитических выражений, особенно бесконечных рядов, произведений и непрерывных дробей. Во всем этом пришлось не только далеко выйти за рамки античных методов, но и отказаться на довольно долгое время от соблюдения норм научной строгости, бывших стандартными в доказательствах по методу исчерпывания.

Новые методы и математическая строгость

С самого начала XVII в. многие выдающиеся математики стали применять инфинитезимальные приемы, опиравшиеся на представление фигур как сумм бесконечного числа бесконечно малых элементов того же или даже низшего измерения, что и рассматриваемая фигура; во втором случае иногда для осторожности говорили не о сумме, а о совокупности неделимых, образующих фигуру. При вычислении пути по данной непрерывно меняющейся скорости принимали, что в весьма малые промежутки времени скорость постоянна, а от одного промежутка к другому меняется скачками. Чтобы провести касательную, кривую трактовали как ломаную с бесконечно большим числом бесконечно малых сторон. В нарушение законов арифметики в инфинитезимальных равенствах пренебрегали бесконечно малы и слагаемыми высших порядков и т. д. Так поступали Непер, Кеплер, Декарт, Ферма, Кавальери и многие, многие другие вплоть до Ньютона и Лейбница. Именно эти люди в большинстве своем интенсивно развивали аппарат вычислений с бесконечно малыми, в то время как ученые, применявшие в несколько облегченной форме методы древних, как правило, мало заботились о совершенствовании технических средств, без которых движение вперед было невозможно.

Очень скоро сложилась парадоксальная ситуация: результаты, достигнутые математиками, работавшими в классическом стиле, были исчезающе малы по сравнению с результатами, достигнутыми математиками, работавшими в новом, более свободном стиле. Основное нововведение состояло, коротко говоря, в открытом применении неуточненных и неуточняемых понятий бесконечно большого и бесконечно малого, которые лишь в неявной форме имелись в творениях греков (о «Послании» Архимеда, повторяем, в XVII в. не знали). Термин «бесконечное» более не отпугивает математиков, причем бесконечными величинами начинают смело оперировать, следуя чаще всего аналогиям с действиями над конечными величинами, а заодно применяются неполная индукция и умозаключения по вероятности. Множество новых открытий оправдывало эту смелость. Несомненная нестрогость приемов обычно не влекла за собой ошибок, от которых исследователей уберегала правильная интуиция.

Правда, новая математика бесконечного вызвала возражения со стороны ревнителей старины. Всего через год после издания «Нового измерения винных бочек» Кеплера учительствовавший в Париже шотландский математик, ученик Виета, Александр Андерсон (1582—1620) выступил с критикой Кеплера как за нестрогость его приемов обращения с бесконечно малыми, так и за то, что в этих приемах Кеплер усмотрел сущность метода Архимеда (ср. стр. 170). Свое сочинение Андерсон озаглавил «Иском Архимеда» (Vindiciae Archimedis, Parisiis, 1616). Критиковал приемы Кеплера, как и метод неделимых Кавальери (не отвергая, впрочем, их эвристической ценности), и швейцарец Пауль Гульдин (1577—1643), обучавшийся вместе с Григорием Сен Венсаном у Клавия и затем преподававший математику в иезуитских колледжах Рима, Вены и Граца. Свои возражения Гульдин поместил в сочинении «О центре тяжести» (De centro gravitatis, Viennae, 1635—1641), во второй книге которого (1640) привел две известные теперь каждому студенту втуза теоремы об объеме и поверхности тела вращения замкнутой фигуры вокруг непересекающей ее оси. Эти теоремы без доказательства имелись еще у Паппа, но не в издании, бывшем доступным Гульдину. Впрочем, доказательство самого Гульдина весьма туманно, и более ясный вывод — по методу неделимых — предложил Кавальери в своих «Геометрических этюдах» (1647; см. стр. 175). К числу ученых, отвергавших новые методы из-за их нестрогости, принадлежал и Таке, считавший, что фигуры можно представлять себе образованными путем «течения» неделимых, но не составленными из них.

Замечания этих и других критиков не были лишены основания. Однако они не понимали ни глубоко прогрессивного характера критикуемых приемов, ни их духовной связи с приемами древних, в частности Архимеда. Сами творцы математического анализа XVII в. также сознавали недостаточную логическую прочность его фундамента и нередко старались, сколько можно, его укрепить. Отдельные ученые продолжали облекать новые инфинитезимальные приемы в старые формы метода исчерпывания. Так поступал, например, Дж. Грегори, который первый провозгласил, что предельный переход надлежит поставить в один ряд по важности с операциями алгебры (стр. 151). Однако старые формы решительно стесняли прогресс математики, а выработать новые строгие приемы рассуждений не было ни времени, ибо слишком многие более важные задачи дожидались решения, ни острой потребности, ибо новые методы при надлежащем их употреблении давали совершенно несомненные результаты. К тому же для удовлетворяющего всех обоснования анализа недоставало сколько-нибудь единой системы понятий и операций. И так как дело не ждало, большинство математиков без тревоги применяли методы, нестрогость которых с лихвой искупалась их плодотворностью.

Любопытны высказывания некоторых ученых. Так, Кавальери утверждал, что строгость — забота философов, а не геометров. Блез Паскаль несколько позднее говорил, что не логика, а приличествующая случаю ясность достаточна для правильных умозаключений.

Само существование метода исчерпывания успокаивало ученых и позволяло им, не взирая на критику извне и собственные сомнения, быстро идти вперед по пути все множившихся открытий. Все были уверены, что результаты, полученные нестрогими методами, можно при желании доказать с помощью строгих методов древних. Ферма писал: «Было бы легко дать доказательство в духе Архимеда. . . достаточно предупредить об этом раз и навсегда, чтобы избежать постоянных повторений» [1]. То же говорил и Паскаль: «Один из этих методов отличается от другого только способом выражения» [2], и И. Барроу: «Это доказательство можно было бы удлинить апагогическим (т. е. методом приведения к противоречию.— *Ред.*) рассуждением, но для чего?» [3]. Современник Ферма Роберваль, сторонник метода неделимых, в своих лекциях во Французском коллеже специально разъяснял, как «приводить доказательства с помощью неделимых к доказательствам древних геометров с помощью вписанных и описанных фигур» [4]. Для этого ему служила «основная лемма», по содержанию совпадающая с теоремой Валерио, хотя и высказанная в других выражениях. По существу, однако, все это были красивые фразы, успокаивавшие совесть математиков, но маскировавшие суть проблемы: строгое обоснование новых методов. На самом деле, далеко не все результаты, полученные с их помощью, можно было бы передоказать посредством античных приемов, которые оказывались, например, недостаточными, без дополнительного развития, при рассмотрении площадей или объемов бесконечно простирающихся фигур (несобственных интегралов), бесконечных рядов, бесконечно малых высших порядков и т. д. Для всего этого требовалась гораздо более развитая теория предельных переходов, чем та, которой располагали ученые XVII и даже XVIII вв. Такая теория была создана на гораздо более богатой фактической основе плеядой первоклассных математиков XIX в. от Коши до Вейерштрасса.

Удивительное обстоятельство, что почти все результаты оказывались верными, в чем убеждала вся практика как математики, так и ее приложений, объяснялось прежде всего тем, что новые методы применялись там, где они работали безотказно, именно в области аналитических функций. И разумеется, совпадение, хотя бы в простейших случаях, результатов, выведенных с помощью новых методов, с ранее известными (скажем, в

---

[1] *P. Fermat.* Oeuvres, v. 1. Paris, 1891, p. 257.
[2] *B. Pascal.* Oeuvres, v. 8. Paris, 1910, p. 352.
[3] *I. Barrow.* Mathematical works. Cambridge, 1860, p. 251.
[4] *E. Walker.* A Study of the Traité des indivisibles of Gilles Personne de Roberval.

случае квадратуры параболы или проведения к ней касательной) позволяло с уверенностью двигаться вперед. Если же замечали, что получается осечка (скажем, при вычислениях с рядами вне промежутка сходимости), то останавливались и предупреждали об опасности других, хотя и не могли установить ни причины возникающих трудностей, ни границы применимости метода в общем виде.

Новым критерием, позволявшим отделять корректное рассуждение от некорректного, было, как правило, умение построить аналитический аппарат, допускавший числовую проверку прямым вычислением. Современниками такое уязвимое положение ощущалось очень остро. Мишель Ролль, резюмируя итог столетних усилий схватить существо вопроса, писал, что новое исчисление есть коллекция гениальных ошибок. Вольтер ядовито заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

Триумф новой науки побуждал математиков неустанно совершенствовать свои приемы на основе правильно понятого «экспериментального» метода. Решая конкретные задачи, они вырабатывали новые и новые эвристические схемы математических рассуждений. Изучая работы творцов нового анализа, от Кеплера и Кавальери до Ньютона и Лейбница включительно, можно увидеть, как не очень ясные индуктивные приемы превращаются, с одной стороны, в некую общую науку — эвристику (Декарт, Лейбниц), а с другой стороны, становятся мощными и верными методами математики (математическая индукция, рекуррентные соотношения и интерполяция). В работах Декарта и Лейбница можно найти вполне современное понимание задач эвристики как науки делать открытия, описывать и символически изображать законы человеческого мышления, позволяющие решать определенные классы задач.

Переходя к истории исчисления бесконечно малых, мы в первую очередь остановимся на развитии основного понятия анализа, которое стало в центре всей математики XVII—XVIII вв.— понятия о переменной величине и функциональной зависимости.

Развитие понятия функции

Ростки этого понятия, хотя и неосознанного и невыделенного, имелись в греческой математике и естествознании. Уже в попытках установить простейшие законы акустики, приписываемых ранним пифагорейцам, нашли выражение поиски количественных взаимосвязей между различными физическими величинами, как длина и толщина струны и высота звука. Позднее, в александрийскую эпоху, астрономы разработали целую тригонометрию хорд, соответствующих дугам окружности фиксированного радиуса, и с помощью теорем геометрии и интерполяции вычислили таблицы, равносильные таблицам синусов, которыми несколько веков спустя стали оперировать индийцы. Отметим также таблицы эмпирических «ступенчатых функций» и «зигзагообразных функций» вавилонской астрономии времен Селевкидов.

Но древность имела дело не только с табулированными функциями. В теории конических сечений основную роль играли так называемые симптомы — формулировавшиеся словесно уравнения этих кривых, причем, в отличие от таблиц значений строго индивидуализированных функций, симптомы выражают целые классы соответствий, скажем, для координат любого эллипса, или параболы или гиперболы. В некоторых случаях встречались и другие классы переменных величин, например в предложении I книги X «Начал» Евклида (см. т. I, стр. 101 и 130).

Объем множества функций, изучавшихся в античной математике, не был велик, но оперировали с ними в ряде задач довольно сходно с тем, как это вновь стали делать позднее: изучали их свойства, табулировали, интерполировали, определяли экстремумы, решали отдельные задачи, равносильные нашему интегрированию. Были сделаны также первые шаги в классификации соответствий: различали плоские задачи, которые можно построить с помощью прямых и окружностей, пространственные, требующие применения по крайней мере одного конического сечения, и линейные, для построения которых необходимы еще другие, более сложные кривые.

Аппарат аналитических выражений и символические формулы отсутствовали. Только у Диофанта появляются зачатки алгебраической символики, не получившие, однако, дальнейшего развития еще в течение многих столетий. Как ни значительны эти достижения, сыгравшие важнейшую роль в последующем, греки не выделили общей идеи, присущей всем изучавшимся взаимозависимостям,— идеи функции или переменной величины, так же как не было у них понятия предела, бесконечно малой и т. д.

Сама идея изменения переменной величины не была чужда греческой мысли. Со времени Гераклита и Зенона обсуждались проблемы движения, непрерывности, бесконечного. Вся «Физика» Аристотеля, по существу, трактует об этом. Аристотель, как мы знаем (т. I, стр. 282) различал «движение в отношении качества», т. е. качественное изменение, «движение в отношении количества» и «движение в отношении места», т. е. перемещение. Проводилось также различие между равномерным и неравномерным движением. Но как раз «движение в отношении количества» и «перемещение», которые позднее нашли выражение в понятии переменной величины, не стали у греков объектом математического исследования. Греческая механика и астрономия не вышли за границы равномерного движения, неравномерные движения небесных светил в античной картине мира сводились к совокупностям равномерных круговых перемещений, неравномерное движение, как таковое, не изучалось. Из математики по возможности изгонялись кинематические представления; несколько предложений Евклида, в которых применяется движение и наложение, как и отдельные случаи кинематического определения кривых (скажем, спирали Архимеда), не меняют общей картины.

Мы сказали, что у так называемых пифагорейцев возникло представление о естественнонаучных законах типа функциональной зависимости. Однако эта концепция закона природы не получила в греческой науке, в частности в астрономии, ни господства, ни заметного развития.

Почти полное отсутствие символики и недостаточное развитие понятия числа служили дополнительными внутриматематическими препятствиями для усмотрения в зависимостях числовых соответствий и перехода к их аналитическому выражению.

Понятие функции впервые явно выступает в средневековой Европе в связи с возобновлением попыток математического изучения различных естественных явлений и особенно с расцветом кинематических исследований в Оксфордской и Парижской школах XIX в. Мы подробно говорили ранее о «калькуляциях» Суайнсхеда, о теории «конфигурации качеств»

Орема (см. т. I, стр. 273 и след.) и о разработке этими и другими учеными понятия о переменной величине как о градусе (степени) или течении качества, а также понятия о функциональном соответствии, заданном словесным правилом или еще (у Орема) графически. Особого термина для функции тогда, правда, не было; вместо него пользовались описательными оборотами или уже наличным словом «отношение» (proportio), применявшимся в расширенном смысле. Напомним слова Орема: «...какое бы отношение ни оказывалось между одной интенсивностью и другой..., такое же отношение обнаруживается и между одной линией и другой, и наоборот» [1]. В возникновении этих идей решающее значение имел синтез кинематической и механической мысли. Вместе с тем в средневековой механике появляются примеры изучения неравномерных движений.

Теория конфигурации качеств пользовалась большой известностью в XV и первой половине XVI в., особенно в Англии, Франции, Италии и Испании. Ее излагали в университетских курсах, и, помимо большого числа рукописей, ей было посвящено несколько напечатанных книг. Все же сколько-нибудь значительного развития она в это время не получила и оставалась в стороне от господствующих научных направлений. Переворота в науке эта теория не произвела. Если в разработке некоторых понятий математики (и механики) обобщающая и абстрагирующая мысль оксфордских и парижских ученых продвинулась гораздо дальше, чем у их античных предшественников, то по числу и значимости конкретных открытий достижения Суайнсхеда или Орема не могут идти в сравнение с блестящими результатами Архимеда или Аполлония. Между теорией конфигурации качеств и новыми проблемами квадратур, кубатур, центров тяжести, касательных и т. д. вообще почти не было прямого соприкосновения.

Хотя вопрос о влиянии этой теории на науку Нового времени изучен далеко не полностью, но сходство ряда идей и приемов XIV и XVII вв. несомненно и прямое или косвенное действие средневековых концепций на духовное развитие Непера, Галилея, Кавальери, Декарта, Барроу, Ньютона, Лейбница и других математиков представляется весьма вероятным, а в нескольких случаях и достоверным. Об этом свидетельствуют употребление таких терминов, как мгновенная скорость и текущая величина, поразительное сходство вывода закона падения тяжелых тел у Галилея и закона равномерно-неравномерного движения у Орема, не менее удивительное сходство между представлением величин отрезками у Декарта и Орема, кинематическая трактовка основных понятий анализа у английских математиков и многие другие факты. Галилей упоминает Суайнсхеда, а Лейбниц высоко ценил этого замечательного ученого. И если те или иные из названных математиков XVIII в даже и не слыхали о Суайнсхеде или Ореме, то воззрения последних могли быть переданы и другими путями, не через слушание лекций и чтение первоисточников.

Для последующего развития учения о функциях решающее значение имели бурный рост вычислительной математики, в частности тригонометрии и учения о логарифмах, с одной стороны, и возникновение буквенной, символической алгебры — с другой,— процессы, с которыми было тесно связано расширение понятия о числе, к концу XVI в. охватившего всю область действительных чисел и, с некоторыми оговорками и колебаниями,

---

[1] *Н. Орем.* Трактат о конфигурации качеств. Перевод и примечания В. П. Зубова. Историко-математические исследования, 1958, вып. XI, стр. 637.

даже мнимых и комплексных чисел. Это были, так сказать, внутриматематические предпосылки введения понятия функции как непрерывного соответствия между числовыми множествами и для их аналитического выражения с помощью формул. Буквенные коэффициенты в алгебре Виета являлись уже переменными, подчиненными правилам определенного исчисления, и введение их стало важным этапом в истории понятия функции. Однако сам Виет не использовал свое замечательное открытие для дальнейшего развития понятия функции; ему не присуще было «функциональное мышление».

В это же время, особенно с начала XVII в., в математическом естествознании, в первую очередь в астрономии и механике, во все возрастающей мере и со все большей отчетливостью укрепляется упоминавшаяся новая концепция количественного закона природы и в ходе исследований быстро возрастает число подлежащих анализу разнообразных зависимостей и кривых. При этом наряду с алгебраическими законами (например, третий закон Кеплера) появляются и трансцендентные (например, оптический закон Снелля — Декарта, колебательные процессы).

Аналитическое представление функций

Следствием всего этого явилось распространение нового способа задания функций, который на долгое время стал основным в математике и ее приложениях. Как и ранее, функции все еще нередко задаются словесно, графически, кинематически или таблично, но на первый план выдвигается их аналитическое выражение.

Мы можем почти точно указать момент этого поворота. Еще на рубеже XVI—XVII вв. функции задаются только с помощью прежних средств. Так была введена важнейшая, наряду с тригонометрическими, логарифмическая функция (см. стр. 59). Всего через 15—20 лет после издания трудов изобретателей логарифмов Непера и Бюрги Ферма и Декарт, прилагая алгебру к геометрии кривых линий, независимо друг от друга показали, как представлять зависимости между двумя переменными величинами посредством уравнений. Ферма это сделал в рукописном сочинении «Введение в изучение плоских и телесных мест», а Декарт в «Геометрии» (1637). Мы подробно рассмотрели оба труда ранее (стр. 101 и след.); приведем лишь еще одно высказывание Декарта, со всей ясностью описывающее, как уравнение в y и x определяет собой зависимость между двумя совокупностями переменных величин и вместе с тем позволяет строить по точкам график этой зависимости: «Придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек...: они опишут требуемую кривую линию» [1].

Употребление аналитических выражений, позволяющих производить вычисления почти, так сказать, непосредственно, легко обозримых и отличимых друг от друга, наконец, пригодных для бесчисленных преобразований по определенным правилам, раскрывало совершенно новые перспективы. Возникнув в ходе применения к геометрии, это новое понятие функции немедленно распространилось на другие области, прежде всего

---

[1] *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 27.

в сферу инфинитезимальных вычислений, которые лишь на этой основе смогли перерасти в дифференциальное и интегральное исчисление.

Вначале круг аналитически выразимых функций ограничивался алгебраическими; Декарт даже исключил из своей геометрии все механические (трансцендентные) кривые, как не поддающиеся его общему методу исследования. Примерно через четверть столетия открытие, сделанное независимо друг от друга П. Менголи, Н. Меркатором, Дж. Грегори и И. Ньютоном, позволило распространить аналитическое представление на любые изучавшиеся в то время зависимости. Это было открытие разложения функций в степенные ряды, к которым добавлены были затем другие виды бесконечных выражений — бесконечные произведения, непрерывные дроби, а еще позднее — тригонометрические ряды и т. д. Бесконечные степенные ряды — геометрическая прогрессия и еще некоторые — были известны ранее, но идея выражать с помощью таких рядов любые функции была совершенно новой. Во второй половине XVII в. степенной ряд делается важнейшим и, как думали еще долгое время, универсальным средством аналитического выражения и исследования любых функций, недаром одно из основных произведений Ньютона называлось «Метод флюксий и бесконечных рядов».

Определение понятия функции

От первых описаний нового представления о независимой переменной, последовательно и непрерывно принимающей бесконечно много значений, и ее функции, относящихся к 30-м годам XVII в., было уже недалеко до формулировки соответствующих определений. Еще довольно долго при этом функция продолжает выступать в механическом или геометрическом облачении. Здесь действовали и традиции и то обстоятельство, что анализ возникал на почве механических и геометрических рассмотрений. Основные понятия анализа не были еще выделены в отвлеченной арифметико-алгебраической форме. Анализ бесконечно малых, только формировавшийся, еще не стал автономным по отношению к тем наукам, нужды которых требовали его разработки. У самих Декарта и Ферма, аналитическое выражение функции было неразрывно связано с его геометрическим образом.

С особенной яркостью кинематически-геометрическая концепция анализа была высказана у Ньютона, развивавшего в этом направлении идеи своего учителя И. Барроу.

Ньютон, как и Барроу, берет в качестве всеобщего аргумента время, а зависящие от него переменные вводятся как непрерывно текущие величины, обладающие теми или иными скоростями изменения. Эта концепция кратко сформулирована Ньютоном в письмах к другому его учителю — Дж. Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., напечатанных последним в выдержках в 1693 г. Здесь мы читаем: «Под текущими величинами (fluentes quantitates) он (т. е. Ньютон.— *Ред.*) разумеет неопределенные величины (indeterminatae), т. е. те, которые постоянно (perpetuo) возрастают или убывают при образовании кривых посредством местного движения, а под их флюксией (fluxio) понимает скорость возрастания или убывания» [1]. Более подробно те же идеи изложены в ряде других сочине-

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 256—257.

ний Ньютона, например в «Методе флюксий и бесконечных рядов». Впрочем, у Ньютона уже явно заметно стремление более отвлеченно трактовать основные понятия анализа. Так, о всеобщем аргументе — времени в «Методе флюксий» говорится: «Но так как мы здесь привлекаем к рассмотрению время лишь в той мере, в которой оно выражается и измеряется равномерным местным движением, и так как, кроме того, сравнивать друг с другом можно только величины одного рода, а также скорости, с которыми они возрастают или убывают, то я в нижеследующем рассматриваю не время как таковое, но предполагаю, что одна из предложенных величин, однородная с другими, возрастает благодаря равномерному течению, а все остальные отнесены к ней как ко времени. Поэтому по аналогии за этой величиной не без основания можно сохранить название времени» [1]. И несколько далее флюенту, играющую роль независимой переменной, Ньютон именует соотнесенной величиной (quantitas correlata), а зависящую от нее — отнесенной величиной (quantitas relata). При этом кинематически вводятся лишь основные понятия, фактически метод флюксий строится для флюент, выраженных аналитически либо в конечном виде, либо через суммы бесконечных рядов.

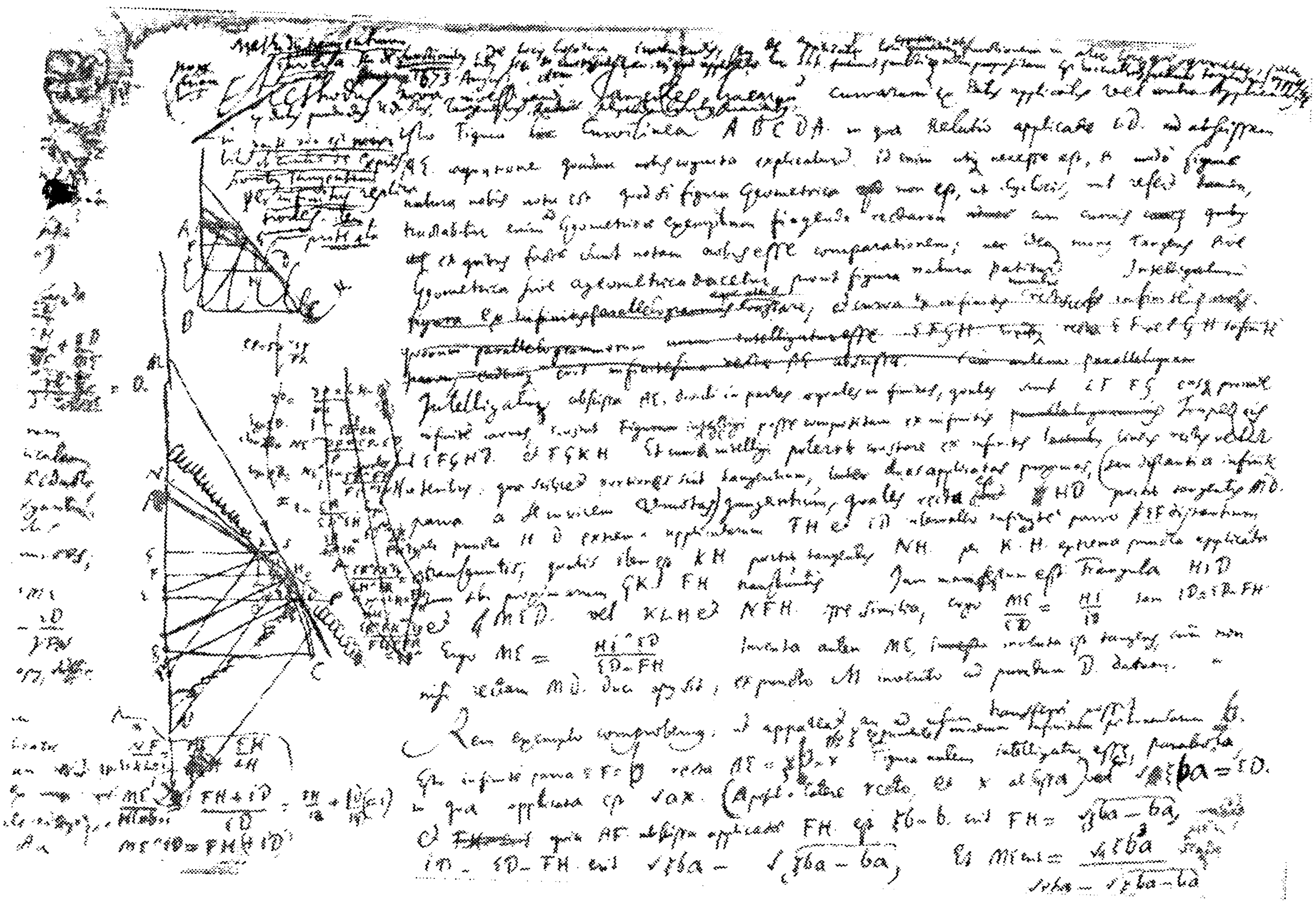
Отметим, что Барроу в одном случае со всей определенностью заметил, что «не имеет значения», изменяется ли рассматриваемая величина скорости «регулярно по некоторому закону или же нерегулярно» [2], иначе говоря имеется или нет аналитическое определение этой величины. Однако столь широкое понимание функциональной зависимости, выходящее за рамки фактически доступных средств вычислений, в XVII в. не представляло интереса, а для его теоретического исследования не было никаких средств. Важность понятия функции как произвольного (в некотором смысле) соответствия была обнаружена только в середине XVIII в. Эйлером (см. т. III, гл. 7), а вся плодотворность этой идеи, при соответствующем ее уточнении, как и все ее трудности, выяснилась еще позднее,— в теории функций XIX—XX вв.

Лейбниц вначале подходил к понятиям разрабатывавшегося им дифференциального и интегрального исчисления, отправляясь от геометрии кривых линий. С этим оказалось связанным первоначальное употребление термина «функция». Это слово впервые появляется в рукописях Лейбница от 1673 г., в частности в рукописи, озаглавленной «Обратный метод касательных или о функциях» (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus). Сначала здесь идет речь об отыскании для «геометрической» или «негеометрической» кривой $ABCDA$, у которой отношение (Relatio) между аппликатой (ординатой) ED и абсциссой AE выражено каким-либо данным уравнением, ее подкасательной, поднормали и других связанных с кривой отрезков. Затем Лейбниц переходит к обратной задаче отыскания «аппликат» по данному свойству подкасательной или «другого рода линий, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию» (ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis) [3]. После того функциями именуются сами такие отрезки, связанные с кривой.

Напомним, что латинский глагол fungor, functus sum, fungi означает «осуществлять», «выполнять» (обязанность), «выражать» и т. д. В том же

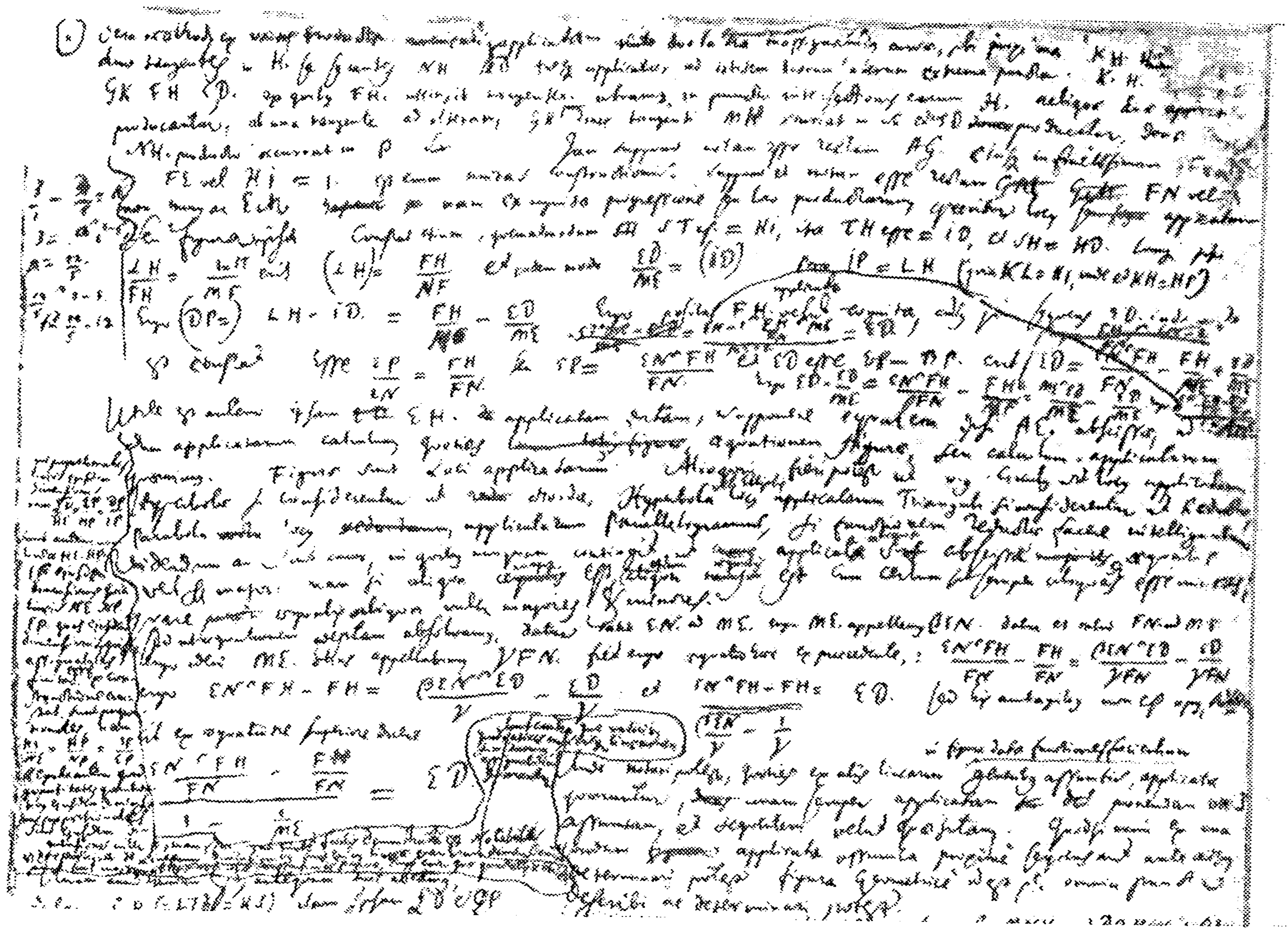
---

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 45.
[2] *I. Barrow.* Mathematical works. Cambridge, 1860, p. 191.
[3] См. *D. Mahnke.* Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte des höheren Analysis. Berlin,1926.S.47.Эти слова находятся в 6-й снизу строке второй фотографии на стр.145.



Начало рукописи Лейбница от августа 1673 г., озаглавленной в верхнем левом углу «Methodus tangentium inversa, seu de functionibus (оригинал хранится в архиве Лейбница в Ганновере)

Оборотная сторона второго листа той же рукописи Лейбница



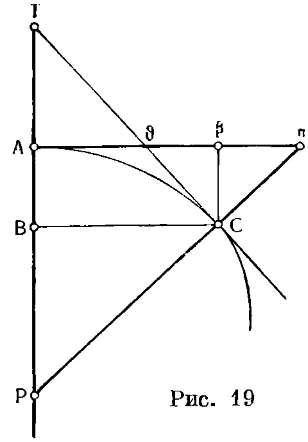


Рис. 19

смысле слово «функция» применяется в статье Лейбница, напечатанной в Journal des Sçavans в 1694 г. «Я,— писал здесь Лейбниц,— называю функциями (fonctions) всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесчисленные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса AB или $A\beta$ (рис. 19), ордината BC или βC, хорда AC, касательная CT или $C\vartheta$, нормаль CP или $C\pi$, подкасательная BT или $\beta\vartheta$, поднормаль BP или $\beta\pi$... и бесчисленное множество других, построение которых более сложно...» [1]. Еще ранее этот термин мимоходом был употреблен в одной статье Лейбница, опубликованной в «Acta Eruditorum» в 1692 г.

Однако такое определение функции не соответствовало ни более широкому фактическому объему этого понятия, ни приемам оперирования ими, ни свойственной анализу Лейбница и его школы широте и общности в трактовке основных понятий. Вскоре после выхода указанной работы понятие функции становится предметом обсуждения в переписке между Лейбницем и его учеником И. Бернулли. В том же 1694 г. в «Acta Eruditorum» Бернулли, не употребляя, правда, слово «функция», обозначил мимоходом буквой n любое «количество, как-либо образованное из неопределенных (величин — *Ред.*) и постоянных (posito n esse quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus)» [2]. Три года спустя в том же журнале Бернулли для этой цели употребил символы X и ξ и в письме к Лейбницу от 26 августа 1698 г. указал, что эти символы лучше, так как тогда «сразу видно, от какой переменной является функцией» X или ξ [3]. Лейбниц одобрил предложение И. Бернулли, со своей стороны предложив особые знаки для различия нескольких функций аргумента или для функций двух и большего числа переменных — знаки, не появившиеся тогда в печати и не вошедшие в употребление. В 1698 г. в переписке обоих ученых слово «функция» применяется уже в смысле аналитического выражения. Входят в обиход и введенные Лейбницем слова «переменная величина» и «постоянная величина», хотя, как мы только что видели, в ходу остается и термин «неопределенная величина».

---

[1] *Г. В. Лейбниц*. Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 180.
[2] См. *F. Cajori*. A history of mathematical notations, II. London, 1930, p. 267.
[3] Там же, стр. 267.

Прошло, однако, еще двадцать лет, прежде чем такое определение функции появилось в печати. В течение этого времени и слово «функция» оставалось мало кому известным, хотя термины «постоянная» и «переменная» уже получили распространение. Слова «функция» нет еще в изданном в Лейпциге в 1716 г. «Математическом словаре» (Mathematisches Lexicon) уже упоминавшегося профессора Христиана Вольфа. Правда, в этом словаре уже есть статьи «Постоянная величина» (Quantitas constans, eine unveränderliche Grösse) и «Переменные величины» (Quantitates variabiles, veränderliche Grössen). Последние определяются, как те, что «постоянно (immer) увеличиваются или уменьшаются, когда другие увеличиваются или уменьшаются» [1], причем для примера указана зависимость между абсциссами и ординатами (у Вольфа «полуординатами») кривой линии и добавлено, что различение между обеими категориями величин «очень нужно» в новом анализе Лейбница. Об аналитическом выражении зависимой переменной величины через независимую здесь не упоминается, но об этом говорится в другой связи в статье «Абсцисса(Abscissa,die Abscisse)»: «Кривые линии принято отличать друг от друга с помощью отношения (Relation) абсциссы AP к половине ординаты PM» [2]. В определении переменной величины Вольф характеризует идею соответствия между переменными весьма общим образом, но вряд ли он сам придавал этому какое-либо особое значение.

Определение функции, как аналитического выражения, было впервые со всей отчетливостью сформулировано в печати в статье И. Бернулли, опубликованной в «Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris» за 1718 г. В ней И. Бернулли писал: «Определение. Функцией переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных» [3]. И здесь же он предложил в качестве «характеристики» функции (термин Лейбница) греческую букву φ, записывая при этом аргумент еще без скобок, так: φx. Скобки, как и знак функции f, ввел Эйлер в 1734 г.

Какие способы «составления» функций имел в виду И. Бернулли, он не уточнил,— это сделал только Эйлер еще тридцать лет спустя (т. III, гл. 7).

Фактически математики XVII в. оперировали аналитическими функциями, представимыми в рассматриваемой области в виде бесконечных степенных рядов. К концу этого столетия они регулярно применяли разнообразные алгебраические функции, все элементарные трансцендентные и производили суперпозиции функций. Высшие трансцендентные, например эллиптические интегралы, они еще нередко представляли геометрически (в данном случае, как дуги эллипса), а вместе с тем выражали их бесконечными рядами. По традиции геометрическое представление функций часто применялось и к новым элементарным трансцендентным. Еще в первой четверти XVIII в. говорили, например, о выражении интегралов с помощью квадратуры гиперболы и других конических сечений (а не с помощью логарифмов и круговых функций). В учении об эллиптических интегралах геометрические образы и термины сохранялись на протяжении всего XVIII в.

---

[1] *Ch. Wolff.* Gesammelte Werke, Th. I, Bd. II. Hildesheim, 1965, S. 1149.
[2] Там же, стр. 5.
[3] *Joh. Bernoulli.* Opera omnia, v. II. Lausannae — Genevae, 1742, p. 241.

В классификации кривых и функций вместо терминологии Декарта (геометрические и механические кривые) утвердилось различение алгебраических и трансцендентных кривых и функций, предложенное Лейбницем. Это не было простой заменой названий, но выражало противопоставление нового анализа декартовой концепции математики. В одном наброске 1678 или 1679 г. Лейбниц назвал кривую с уравнением определенной степени «аналитической», а логарифмическую кривую — простейшей среди трансцендентных. В статье «Об определении размеров фигур» (De dimensionibus figurarum inveniendis, 1684) он вводит современную терминологию, одновременно полемизируя с Декартом, исключавшим неалгебраические кривые из геометрии. «Разумеется,— писал Лейбниц,— Декарт сделал это потому именно, что не мог привести такие линии к уравнениям и исследовать их по своим правилам». На самом деле исключенные Декартом кривые, имеющие самое широкое употребление, можно выразить с помощью «уравнений неопределенной степени или трансцендентных» и «подчинить вычислению..., но только это вычисление будет иной природы, чем применяемое обычно» [1]. Определение Лейбница совпадает с современным определением трансцендентных функций как аналитических функций, не являющихся алгебраическими. Внутреннее свойство трансцендентных функций комплексного переменного (наличие у них по крайней мере одной особой точки, помимо полюсов и точек разветвления конечного порядка) было установлено во второй половине XIX в.

Более подробная классификация функций была предложена Эйлером (см. т. III, гл. 7).

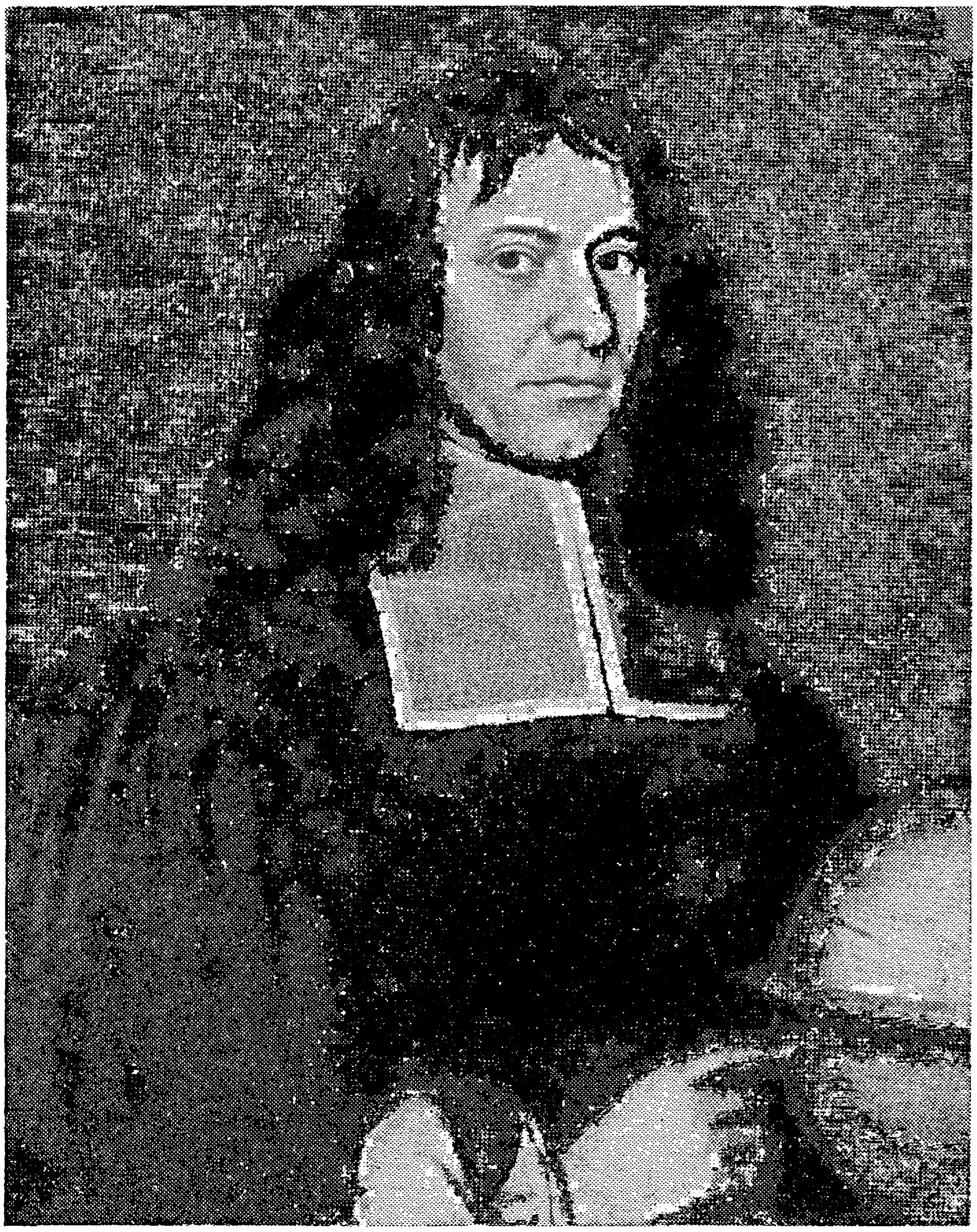
В конце XVII в. появляются также примеры функций двух (ср. стр. 146) и большего числа переменных. А в самые первые годы XVIII в. были сделаны первые шаги в области теории функций комплексного переменного,— об этом говорится в конце настоящей главы.

Бесконечные последовательности. Джемс Грегори

Мы уже говорили, что развитие вычислительной техники привело в XVII в. к открытиям, значение которых выяснилось значительно позднее (см. стр. 63), в первую очередь к сходящимся бесконечным последовательностям. С бесконечными последовательностями математики встречались всякий раз, когда удавалось найти некоторое рекуррентное правило, справедливое на любом шагу вычислений, будь то иррациональные числа, вроде $\sqrt{2}$ или π либо же иррациональные корни алгебраических уравнений, значения тригонометрических функций и логарифмов и т. д. К такого же рода последовательностям приводили задачи квадратур и кубатур.

Новый тип последовательностей — бесконечные произведения, впоследствии ставшие важной составной частью анализа,— был введен Виетом в том самом сочинении, в котором он произвел суммирование бесконечной геометрической прогрессии (стр. 133). Напомним (см. т. I, стр. 314), что занимаясь задачей о квадратуре круга, он вывел зависимость между площадями S_n и S_{2n} вписанных в этот круг правильных n- и $2n$-

[1] *Г. В. Лейбниц.* Избранные отрывки из математических сочинений, стр. 174.



Джемс Грегори
(оригинал портрета хранится в Шотландской национальной галерее)

угольников. Если обозначить r — радиус данного круга, а r_n — радиус круга, вписанного в n-угольник, то

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{r_n}{r} = \cos\frac{\pi}{n}.$$

Полагая последовательно $n = 4, 8, 16, \ldots$ и естественно принимая, что S_{2n} имеет пределом площадь круга S, Виет, перемножая полученные таким образом равенства, нашел, что

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots$$

Некоторое сходство с приемом Виета имеет прием, употребленный для исследования квадратуры произвольного сектора центрального конического сечения шотландцем Джемсом Грегори (1638—1675). Воспитанник Абердинского университета, Грегори посвятил свою недолгую жизнь главным образом математике, но успешно занимался также астрономией и оптикой. Так, в 1663 г. он предложил строить зеркальные телескопы — идею, реализованную независимо от него Ньютоном в 1672 г. Несколько лет занятий в Падуе позволили Грегори глубоко познакомиться с достижениями итальянской школы анализа, и два изданных им здесь труда по инфинитезимальной математике создали ему международную известность. Это были «Истинная квадратура круга и гиперболы» (Vera circuli et hyperbolae quadratura, Patavii, 1667) и «Всеобщая часть геометрии» (Geometriae pars universalis, Patavii, 1668). Возвратившись в Англию, он тотчас опубликовал еще «Геометрические этюды» (Exercitationes geometricae, Londini, 1668); и в том же 1668 г. он был избран членом Королевского общества и назначен профессором математики родного университета.

Годы работы Грегори в Абердине были отмечены целым рядом новых открытий, но он их более не публиковал, отчасти с целью не раскрыть раньше времени методы, приносившие ему богатые плоды. Отдельные найденные им результаты он сообщал в письмах к лондонскому любителю математики и члену Королевского общества Джону Коллинсу (1625—1683), который поддерживал личное знакомство и вел переписку почти со всеми английскими математиками, нередко кратко информируя их о новых научных достижениях. Последний год жизни Грегори был профессором в Эдинбурге.

Грегори принадлежат выдающиеся заслуги в разработке математического анализа и, в частности, теории рядов, где его пути часто шли параллельно ньютоновым. Если бы он обнародовал все свои открытия и прожил еще несколько лет, он, быть может, встал бы в один ряд с обоими создателями исчисления бесконечно малых. Однако этого не случилось, а несколько самых значительных его результатов были обнаружены в его рукописном наследии лишь в последние десятилетия.

Метод Грегори, о котором идет речь, изложен в «Истинной квадратуре круга и гиперболы». Целью автора было доказать, что площадь произвольного сектора круга, а также эллипса и гиперболы нельзя точно выразить через площади вписанных или описанных треугольников и четырехугольников посредством конечного числа пяти действий алгебры — сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Иными словами, Грегори стремился доказать, что круговые и логарифмическая функции не являются алгебраическими.

Обозначим площадь сектора круга через S, площадь соответствующего ему центрального треугольника OAB через i_1, а площадь четырехугольника $OACB$, где BC и AC — касательные, через I_1 (рис. 20). Пусть D — точка касания прямой, параллельной AB, тогда OD делит данный сектор на два равных сектора. Если обозначить через i_2 сумму площадей вписанных в последние треугольников, через I_2 — сумму площадей описанных четырехугольников и аналогично образовать i_3, I_3, i_4, I_4, и т. д., то вообще

$$i_n = \sqrt{i_{n-1} I_{n-1}}, \qquad I_n = \frac{2i_n I_{n-1}}{i_n + I_{n-1}}.$$

Последовательности, задаваемые этими выражениями, как угодно точно аппроксимируют площадь сектора; Грегори назвал их сходящимися.

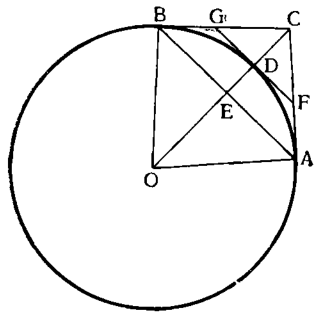


Рис. 20

Этот термин применяется на протяжении всего труда, и уже в предисловии говорится о сходящейся последовательности многоугольников, окончание (предел) которой есть круг (series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus)[1]. Операцию предельного перехода Грегори считал исключительно важной в математике и ставил ее как шестое действие рядом с четырьмя элементарными и извлечением корней. Характерно, что он аналитически доказывает сходимость рассматриваемой двойной последовательности, т. е. что $I_n - i_n \to 0$, хотя геометрически факт очевиден.

Выражения для i_n, I_n Грегори использовал, с одной стороны, для приближенного вычисления площадей конических сечений, весьма громоздкого из-за многократного извлечения квадратных корней, а с другой,— для обоснования утверждения, что площадь произвольного сектора s не выражается элементарно через i_0 и I_0. По-видимому, вначале Грегори пытался решить проблему квадратуры круга, но затем пришел к убеждению в ее неразрешимости элементарными средствами, и это явилось отправным пунктом исследования. Долгом анализа, писал он, является не только решение проблем, но и доказательство невозможности в случаях, когда они неразрешимы. К числу последнего рода вопросов он относил еще проблемы решения в радикалах общего алгебраического уравнения и приведения к квадратным уравнениям общего двучленного уравнения $x^n - 1 = 0$. Однако приводимое Грегори доказательство неалгебраичности логарифмической и круговой функций не было полноценным. Кроме того, из общего результата не следовала (и он этого не утверждает прямо) невозможность квадратуры круга, подобно тому, например, как из неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени не следует, что такое выражение корней невозможно в отдельных частных случаях. Еще Гюйгенс, не оценивший, впрочем, должным образом труд Грегори (1668), а позднее Лейбниц указали, что общий вывод Грегори не исключает того, что значение некоторой S алгебраически выражается через какие-либо другие определенные значения i и I, чем принятые. Строгие доказательства трансцендентности функций и чисел требовали гораздо более тонких средств, чем средства, имевшиеся в распоряжении ученых XVII в., и удались только через два столетия.

---

[1] Термин convergere — «сходиться» Грегори, вероятно, перенес в математику из оптики, бывшей, как сказано, другой его специальностью.

В заключение заметим, что Грегори, совершенно правильно оценивший исключительную важность в анализе операции предельного перехода, не подверг исследованию ее общие свойства. В стороне остались и свойства бесконечно малых, которые он применял в своем труде. К теории предельных переходов или бесконечно малых мы вернемся в связи с рассмотрением творчества Ньютона и Лейбница.

«Квадратура круга» Валлиса

Несколько ранее Грегори задача квадратуры круга привлекла внимание Валлиса, который нашел для числа $4/\pi$, обозначенного им $\square$, удивительное выражение в виде бесконечного произведения

$$\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\ldots}.$$

Это открытие, содержащееся в «Арифметике бесконечных» (Arithmetica infinitorum, Oxoniae, 1656) Валлиса, было сделано с помощью особого рода интерполирования последовательностей — вставки между их членами с целыми номерами промежуточных членов с дробными индексами. Самое слово interpolare (сглаживать, переделывать и т. п.) Валлис употребил в качестве математического термина впервые; иногда он пользовался также словом intercalare — «вставлять».

Важная часть «Арифметики» посвящена квадратуре кривых $y = x^n$. Как мы увидим, для натуральных значений n Валлис осуществил это с помощью сумм n-х степеней натуральных чисел, а полученный по неполной индукции результат распространил на дробные и рациональные значения показателя n (см. стр. 181). Уже здесь Валлис смело и уверенно применил наряду с неполной индукцией оригинальные интерполяции, которыми владел с беспримерным искусством. В еще более своеобразной форме он использовал оба приема в поисках, как он выражался, «истинной квадратуры круга в числах». Валлис поставил вопрос следующим образом. Площадь четверти круга $x^2 + y^2 = 1$ единичного радиуса выражается интегралом

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4},$$

который есть частный случай при $k = 2$ и $n = 1/2$ интеграла $\int_0^1 (1 - x^k)^n dx$.

Значение последнего интеграла при натуральных n и дробных положительных k Валлис нашел по неполной индукции

$$\int_0^1 (1 - x^k)^n dx = \frac{k\cdot2k\cdot3k\ldots nk}{(k+1)(2k+1)(3k+1)\ldots(nk+1)}.$$

Эта формула при $k = 2$ и $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ дает последовательность $1, \frac{2}{3}, \frac{2\cdot4}{3\cdot5}, \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}, \ldots$, и задача состояла в подходящем выборе члена, промежуточного между 1 и $2/3$. Такая интерполяция не удавалась, и Валлис обратился к последовательности обратных значений интеграла

$1:\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, соответствующих $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. Эту последовательность

$$1, \frac{1\cdot 3}{2}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots$$

Валлис назвал гипергеометрической, как и другие последовательности с общим членом Πa_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где множители a_n монотонно возрастают или убывают. Число $4/\pi$, которое Валлис далее обозначает $\square$, надлежало определить, как член, соответствующий $n = 1/2$, т. е. промежуточный член между 1 и $\frac{1\cdot 3}{2}$. Однако и это интерполирование оказалось затруднительным и Валлис в конце концов обратился к интегралам вида $\int\limits_0^1 (1-x^{1/p})^q\,dx$ и их обратным значениям, которые при натуральных p, q выражаются фигурными числами различных порядков[1] (ср. т. I, стр. 68), т. е. числами сочетаний

$$J(p, q) = 1:\int\limits_0^1 (1-x^{1/p})^q\,dx = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{1\cdot 2\ldots q} =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!\,q!} = C_{p+q}^p = C_{p+q}^q.$$

Число $\square$ нужно теперь вычислить, как значение при $p = 1/2$, $q = 1/2$, функции двух переменных, заданной сначала для целых неотрицательных аргументов, т. е. как $J(1/2, 1/2)$; что $0! = 1$ Валлису было ясно[2]. Для функции $J(p, q)$ Валлис составил таблицы фигурных чисел и их обобщений на полуцелые p и q. Именно,выражение $J(p, q)$ при $p = 1/2$ есть

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+q\right)!}{\frac{1}{2}!\,q!} = \frac{\left(\frac{1}{2}+q\right)\left(\frac{1}{2}+q-1\right)\ldots\frac{3}{2}}{q(q-1)\ldots 2.1},$$

так что при различных целых q получается

q	1	2	3	4
$\dfrac{\left(\frac{1}{2}+q\right)!}{\frac{1}{2}!\,q!}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}$	$\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}$	$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$

[1] Фигурные числа первого порядка — это натуральные числа, т. е. C_n^1, фигурные числа второго порядка — треугольные, т. е. C_n^2, а третьего порядка — пирамидальные, т. е. C_n^3. Вообще, фигурные числа k-го порядка суть суммы чисел (k — 1)-го порядка и равны C_n^k. Связь между фигурными числами и биномиальными коэффициентами знали Отред и Валлис; Б. Паскаль ее строго доказал.

[2] Обозначение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p = p!$ ввел в 1806 г. Хр. Крамп.

Далее, при различных полуцелых q

q	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\dfrac{\left(\frac{1}{2}+q\right)!}{\frac{1}{2}!\,q!}$	$\square$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\square$	$\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\square$

Затем Валлис показывает, что если a_1, a_2, a_3 и a_4 — значения $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+q\right)!}{\frac{1}{2}!\,q!}$ при четырех последовательных значениях q, то $\frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3}$, откуда следует, что $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \frac{a_3}{a_2} > \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}$. Применяя эти последние неравенства для $q = {}^5/_2$, 3, ${}^7/_2$, 4, Валлис получил, что

$$\sqrt{\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7} : \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}} > \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}\square : \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} > \sqrt{\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} : \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}},$$

т. е.

$$\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}\sqrt{\frac{8}{7}} > \square > \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}\sqrt{\frac{9}{8}}.$$

Из аналогичных неравенств для сколь угодно больших значений q Валлис и получал

$$\square = \frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\ldots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\ldots},$$

причем доказал, что при бесконечном продолжении действий разность между верхней и нижней границами для искомой величины становится меньше любой заданной величины и «наконец совершенно исчезнет».

Само значение $\square$ Валлис считал отличным от всех ранее употреблявшихся иррациональностей,— потому он и обозначил его новым символом. Это было, кажется, первое явное указание на трансцендентную природу числа π.

Чем же руководствовался Валлис при выборе своей интерполяции? Ведь в принципе подбор промежуточного члена его гипергеометрического ряда мог быть осуществлен многими способами. Руководящими в исследовании были, вероятно, следующие обнаруженные им свойства функции двух целых аргументов $J(p, q)$:

I. $J(p, 0) = 1$.

II. Мультипликативное свойство

$$J(p, q+1) = \frac{p+q+1}{q+1} J(p, q).$$

III. Симметрия

$$J(p, q) = J(q, p)$$

и еще оценка для полуцелого q

$$\text{IV.}\quad \frac{J\left(p, q+\frac{1}{2}\right)}{J(p, q)} > \frac{J(p, q+1)}{J\left(p, q+\frac{1}{2}\right)}.$$

В частности, свойство IV позволило однозначно определить путем предельного перехода значение J (1/2, 1/2) $= \square$.

Еще до вывода «Арифметики бесконечных» Валлис сообщил найденное им значение для $\square$ и гипергеометрический ряд Броункеру, поставив при этом вопрос о других удобных выражениях этой величины. Броункер в ответ сообщил изящное представление $\square$ в форме бесконечной непрерывной дроби, не приведя, однако, вывода:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Несомненно влияние «Арифметики бесконечных» на младших современников ее автора, как Дж. Грегори и особенно Ньютона, который в своих первых исследованиях по теории рядов применил как неполную индукцию, так и интерполяции в духе Валлиса. Через 75 лет после выхода это сочинение сыграло выдающуюся роль в создании Эйлером теории бета- и гамма-функций. Заметим, что изучавшийся Валлисом интеграл $\int\limits_0^1 (1 - x^{1/q})^p\,dx$ при подстановке $x = y^q$ преобразуется в интеграл $q\int\limits_0^1 (1-y)^p y^{q-1}dy = qB(q, p+1)$. Впрочем, как мы увидим (т. III, гл. 7), Эйлер обратил прием Валлиса, выражая общие члены последовательностей с помощью определенных интегралов, а не разыскивая значение определенного интеграла с помощью интерполяционного вычисления промежуточных членов последовательностей.

Интерполяционные формулы Бригса и Дж. Грегори

Как мы уже знаем, в начале XVII в. были табулированы тригонометрические и логарифмическая функции, а также log sin x с точностью до семи и даже большего числа десятичных знаков для довольно плотного множества значений аргумента. При такого рода вычислениях широко применялась известная с древности линейная интерполяция: значения функции $f(x)$ в промежутке между какими-либо двумя значениями аргумента x, $x + h$, скажем при аргументе $x + \lambda h$, $0 < \lambda < 1$, находили, как

$$f(x + \lambda h) = f(x) + \lambda\,[f(x + h) - f(x)].$$

Если разделить промежуток $(x, x + h)$ на n равных частей Δx, то значения функции в точках деления, вычисленные по этому правилу, будут равноотстоящими, подобно значениям аргумента. Другими словами, первая разность функции при этом постоянна. Напомним, что первой разностью $f(x)$ при $x = X$ называется $\Delta f(X) = f(X + \Delta x) - f(X)$, здесь X может принимать значения $x + n\Delta x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$. То, что ошибка при линейном интерполировании во многих вычислениях была допустимо малой, объяснялось достаточной гладкостью соответствующих функций, обращавшихся в бесконечность разве что на границе рассматриваемого промежутка.

Однако линейная интерполяция оказывалась достаточной не всегда, это обнаруживалось при непостоянстве первой разности. Но в этих случаях постоянной могла быть разность первой разности, или вторая разность $\Delta^2 f(X) = \Delta f(X + \Delta x) - \Delta f(X)$, или же третья разность $\Delta^3 f(X) = \Delta^2 f(X + \Delta x) - \Delta^2 f(X)$, вообще какая-либо разность n-го порядка, определяемая рекуррентным соотношением

$$\Delta^n f(X) = \Delta^{n-1} f(X + \Delta x) - \Delta^{n-1} f(X).$$

По разностям высших порядков можно последовательно найти низшие разности и в конце концов сами искомые значения функции. Когда математики заметили, что ошибку можно значительно уменьшить, используя разности выше первого порядка, они приступили к разработке теории интерполирования и вместе с тем теории конечных разностей. Здесь и далее мы пользуемся современным обозначением разностей, введенным Л. Эйлером (1755).

Впервые более глубоко в этот мир интерполирования разностями высоких порядков проник Бригс, заложивший в своей «Логарифмической арифметике» (1624) основы интерполяционной техники. При составлении своих таблиц он вычислял значения встречавшихся ему разностей высоких порядков до тех пор, пока эти разности не становились (в пределах взятого им количества знаков) равными между собой. Как было установлено Ньютоном, функции, разности n-х порядков которых постоянны, являются многочленами n-й степени [1]. Таким образом, Бригс фактически начал работы по приближению функций многочленами или, как тогда говорили, параболами высших порядков, хотя в то время эта сторона его методов осталась совершенно нераскрытой.

Чтобы найти, скажем, десятичный логарифм 6, Бригс образует тождество $9 \log 6 - 7 \log 10 = \log 1{,}0077696$, приводя тем самым задачу к вычислению логарифма числа λ, близкого к единице. Затем он вставляет между 1 и λ большое число средних пропорциональных с помощью многократного извлечения квадратного корня:

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{k^2} = \frac{k^2}{k^3} = \ldots = \frac{k^{n-1}}{\lambda},$$

где $k = \sqrt[n]{\lambda}$ и n есть некоторая степень числа 2. Именно, он вычисляет значения $k = \sqrt[2^i]{\lambda} = \lambda^{2^{-i}}$ для $i = 1, 2, 3, \ldots, 11$ и значения $k - 1 = e_0$, $k^2 - 1 = e_1$, ... до $k^{256} - 1 = e_8 = 0{,}0077696 = \lambda$. Составляя по этим значениям e_i таблицы последовательных разностей, Бригс заметил связывающие эти разности рекуррентные соотношения, а также установил, что высшие разности неограниченно умаляются.

---

[1] Впрочем, еще И. Фаульгабер (1631) отметил постоянство $\Delta^n (x^n)$ для $n = 20$.

Обращая процесс, т. е. переходя от высших разностей к низшим, он, наконец, пришел к следующему замечательному результату: если обозначить $k = 1 + \alpha$, где α — весьма малая дробь, то

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{16}\alpha^3 - \frac{5}{128}\alpha^4 + \frac{7}{256}\alpha^5 + \ldots$$

В глазах самого Бригса это разложение было только техническим приемом, позволяющим усовершенствовать технику вычисления логарифмов, и он не обнаружил закона образования коэффициентов. Все же фактически Бригс впервые вывел начальные члены разложения степени бинома в случае дробного показателя, равного половине, и при желании число членов можно было неопределенно увеличить. Трудно сказать, в какой мере идеи Бригса, изложенные им весьма пространно, но неясно, повлияли на дальнейшую разработку всего этого круга проблем. Среди немногих читателей пояснительного текста «Логарифмической арифметики» был Дж. Грегори, но Ньютон, которому принадлежит первое открытие разложения $(1+\alpha)^n$ для любого действительного n, с идеями Бригса знаком, по-видимому, не был.

Дж. Грегори продвинулся в области интерполирования гораздо дальше Бригса. В «Геометрических этюдах» (1668) он предложил способ интерполирования для случая постоянной разности второго порядка, равносильный замене данной функции квадратичным многочленом $y = ax^2 + bx + c$. В применении к приближенной квадратуре кривых это дало ему правило, равносильное так называемой формуле Т. Симпсона (1743). Грегори упомянул здесь и о возможности распространения приема на параболы высшего порядка. Однако свой основной результат в теории интерполирования Грегори изложил только в письме к Коллинсу от 23 ноября 1670 г. Речь идет об общей формуле интерполирования с равноотстоящими узлами, в которой функция, заданная своими значениями в $n+1$ точке с равноотстоящими абсциссами x_0, x_0+h, x_0+2h, ..., $x_0+nh = X$, заменяется параболой n-го порядка, проходящей через эти точки:

$$f(x_0+xh) = f(x_0) + \frac{x}{1}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots 2\cdot 1}{n!}\Delta^n f(x_0).$$

Мы упоминали, что приемы, соответствующие $n = 2$ и $n = 3$, употреблялись ранее китайскими астрономами (т. I, стр. 174).

Не позднее середины 70-х годов та же формула была известна Ньютону; в настоящее время она обычно называется формулой Ньютона для интерполирования вперед, так как в нее входят значения функции вправо от $f(x_0)$ и ее чаще применяют в окрестности начала ряда табличных значений. В «Методе разностей», написанном около 1675 г. (Methodus differentialis, Londini, 1711), Ньютон, кроме этой формулы, дал еще формулу для интерполирования назад, в которую входят значения функции влево от $f(x)$ и которая особенно удобна в конце таблицы. Но главным вкладом Ньютона явился вывод интерполяционного параболического многочлена в случае неравноотстоящих углов с помощью так называемых (по предложению А. де Моргана, 1842) разделенных разностей. Этот результат, как и первую формулу для равноотстоящих углов, Ньютон опубликовал еще в V лемме III книги «Математических начал натуральной философии» (1687) в связи с рассмотрением вопроса об орбитах комет. В «следствии» к этой лемме Ньютон особо отмечал, что его формулы позволяют приближенно вычислять площади любых кривых через площади парабол высших порядков.

Интерполяционные вычисления и формулы сыграли огромную роль в развитии новых математических методов. С одной стороны, они позволяли свести к числовому расчету множество задач, беспредельно расширяли прикладные возможности математики, а с другой,— приводили к новым квадратурам и разложениям в ряды, раскрывая тем самым новые теоретические просторы. Очень ярко эта роль интерполяций видна в творчестве Ньютона; не без ее влияния, в частности, Ньютон пришел к мысли об определяющей роли степенных рядов в его теории флюксий.

Логарифмы и бесконечные ряды

Приближенные вычисления и интерполирование явились той почвой, на которой выросла теория бесконечных рядов — одно из самых значительных созданий XVII в. Нам пришлось уже несколько раз говорить о суммировании бесконечных рядов, преимущественно геометрических прогрессий. Принципиально новым явилось употребление бесконечных рядов для приближения и выражения функций. В этом отношении особую роль сыграли логарифмы, и их пример — исторически первый — представляет собой превосходную иллюстрацию тех взаимодействий между вычислениями и общей теорией, которые были одной из непосредственных причин математического прогресса на протяжении всего Нового времени.

Как сказано, Григорий Сен Венсан (1647) и в более явной форме де Сараса (1649) отметили связь площади, ограниченной гиперболой, ее асимптотой и двумя сопряженными ординатами, с логарифмами. Численно, и притом в форме бесконечного ряда, эту связь выразил не позднее 1657 г. В. Броункер, опубликовавший свой результат

$$\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots$$

в статье «Квадратура гиперболы с помощью бесконечного ряда рациональных чисел» (The squaring of the Hyperbola by an infinite series of rational numbers. Philos. Trans., 1668).

Впрочем, в публикации этого разложения его опередил итальянский математик, последователь Кавальери и профессор математики в Болонье, Пьетро Менголи (1625—1686). Труды Менголи в теории рядов заслуживают очень высокой оценки, хотя и не привлекли, отчасти из-за трудного изложения, должного внимания большинства современников. Дж. Грегори они были все же известны.

В «Новых арифметических квадратурах или о сложении дробей» (Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum, Bononiae, 1650) Менголи просуммировал некоторые числовые ряды вроде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

и независимо от Орема (т. I, стр. 281) доказал расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, применяя неравенство[1]

$$\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}>\frac{1}{k}.$$

Этот результат Менголи распространил на обобщенные гармонические ряды[2], члены которых обратны членам арифметической прогрессии, т. е. ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a+kb}$. Частные суммы гармонического ряда, как мы увидим несколько далее, он применил к изучению логарифмов. Менголи пытался исследовать и ряд обратных квадратов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Он доказал его сходимость, но суммирование ему, естественно, не удалось, и он выразил сомнение в возможности произвести его в конечной форме[3]. Впоследствии этот и более общие ряды обратных степеней были глубоко изучены Эйлером (см. т. III). Числовой ряд для $\ln 2$ Менголи привел в «Началах видовой геометрии» (Geometriae speciosae elementa, Bononiae, 1659), в которой среди прочего произвел квадратуру кривых $y = x^p(1-x)^q$ для натуральных p и q, т. е. вычислил интеграл

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1}{p+q+1} : C_{p+q}^p.$$

Прием вычисления $\ln 2$, предложенный Броункером, прост и изящен. Рассматривая площадь между гиперболой $xy = 1$, асимптотой и ординатами точек E (1,1) и C (2, 1/2), а также описанный около этой фигуры квадрат (рис. 21), Броункер делил отрезок AB на 2, 4, 8, 16, ... равных частей и, проведя через соответствующие точки кривой отрезки, параллельные сторонам квадрата, подсчитывал площади возникающих при этом прямоугольников, из которых одни вписаны в фигуру $EDCE$, а другие — в фигуру $ABCEA$:

$$\text{пл. } bD=\frac{1}{2\cdot 3},\ \text{пл. } ad=\frac{1}{4\cdot 5},\ \text{пл. } ce=\frac{1}{6\cdot 7},\ \ldots,$$

$$\text{пл. } AC=\frac{1}{1\cdot 2},\ \text{пл. } bf=\frac{1}{3\cdot 4},\ \text{пл. } ag=\frac{1}{5\cdot 6},\ \ldots$$

---

[1] Сначала, полагая $k = 1$, Менголи находит, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$; затем он берет 3^2 членов с 1/5 до 1/13, группируя их по три, и находит, что сумма их в силу предыдущего также больше 1; далее аналогично оценивается сумма следующих 3^3 членов и т. д.

[2] Термин «гармонический ряд» ввел Броункер (1668) в связи с тем, что три его последовательных члена $1/[a+(k-1)b]$, $1/(a+kb)$, $1/[a+(k+1)b]$, образуют гармоническую пропорцию.

[3] Я. Бернулли, очевидно, незнакомый с результатами Менголи, привел в своих «Арифметических предложениях о бесконечных рядах и их конечной сумме» (Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita, Basileae, 1689—1704) два новых доказательства расходимости гармонического ряда: одно собственное, другое принадлежащее его брату Иоганну, обнаружившему этот факт первым. Подобно Менголи, Я. Бернулли безуспешно пытался просуммировать ряд обратных квадратов

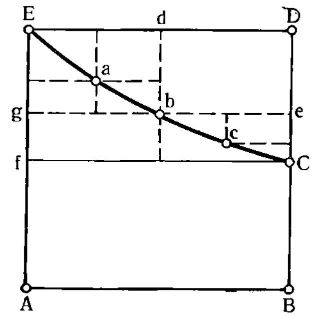


Рис. 21

Установив по неполной индукции общее правило для выражения таких площадей, Броункер получил, что

$$\text{пл. } EDCE = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots,$$

$$\text{пл.} ABCEA = \ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

Сходимость обоих рядов к соответствующим площадям Броункер доказал из элементарных соображений, для вычислений же он использовал третий ряд, выражающий площадь сегмента $EbCE$, как полуразность площадей $EDCbE$ и $EfCbE$. Этот третий ряд, образованный почленным вычитанием второго (без члена $\frac{1}{1\cdot 2}$) из первого и делением пополам, дает

$$\text{пл. } EbCE = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$$

Новый ряд, сходящийся быстрее, чем предыдущие, может служить для вычисления $\ln 2$, ибо $\ln 2$ представляется разностью между площадью прямолинейной трапеции $ABCE$, равной $^3/_4$, и площадью сегмента $EbCE$.

Не останавливаясь на дальнейших преобразованиях и оценках, примененных для упрощения и уточнения выкладок, добавим, что прием Броункера годился, как он отмечал сам, для отыскания натуральных логарифмов всех рациональных чисел.

Подход Менголи в теоретическом отношении был глубже. Отправляясь от площади сегмента гиперболы (хотя его рассуждения можно освободить от геометрических элементов), Менголи вводит «гиперлогарифмы» $\underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum \frac{1}{\lambda}$, где $rn \leqslant \lambda \leqslant rm - 1$, и «гипологарифмы» $\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum \frac{1}{\lambda}$, где $rn + 1 \leqslant \lambda \leqslant rm$. При этом $\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r < \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r$, а разность их стремится к нулю при $r \to \infty$. После этого (натуральный; ср. стр. 63) $\log \frac{m}{n}$ определяется как величина, удовлетворяющая при всех r неравенствам

$$\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r \leqslant \log \frac{m}{n} \leqslant \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r,$$

т. е. в сущности как общий предел гиперлогарифма и гипологарифма при $r \to \infty$. Очевидно, что такое определение вытекало из сравнения площади гиперболы $xy = 1$ между ординатами точек $x = rn$ и $x = rm$ с площадями ступенчатых вписанных и описанных фигур; мы бы сказали теперь: с нижней и верхней суммами функции $y = 1/x$. Аналогичные нижние и верхние суммы Менголи применял и при вычислении квадратур $y = x^p(1 - x)^q$.

Любопытно, что к основным неравенствам Менголи на двадцать лет раньше пришел из других соображений и — для других целей — Декарт (см. стр. 164). Все свойства логарифма Менголи выводит из этого аналитического определения. Из него же он получает разложение

$$\log \frac{m}{n} = \sum_{r=1}^{\infty} [P(m)_r - P(n)_r],$$

где

$$P(m)_r = \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{(r-1)m+s};$$

ряд Броункера для $\ln 2$ отсюда получается при $m = 2$, $n = 1$ и притом в более привычной теперь форме

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Разложение $\ln(1 + x)$ в степенной ряд

Следующим шагом в исследовании логарифмической функции явилось ее представление в форме бесконечного степенного ряда. Этот важный шаг сделал проживавший в то время в Лондоне немецкий любитель математики, член Королевского общества Николай Кауфман (1620—1687) более известный под именем Меркатора (латинское mercator — как и немецкое Kaufman — купец). Свое исследование Меркатор опубликовал в «Логарифмотехнике» (Logarithmotechnia, Londini, 1668) почти одновременно с появлением статьи Броункера. Но два эти труда, посвященные одной цели — вычислению логарифмов, резко отличались по методу. Уступая Броункеру в строгости изложения, Меркатор значительно превзошел его в общности приема и результата. Счастливым образом перейдя от равносторонней гиперболы $y = 1/x$, отнесенной к обеим асимптотам, к смещенной гиперболе $y = 1/(1 + x)$, он применил к дроби $1/(1 + x)$ обычное деление по правилам алгебры, продолжающееся в данном случае без конца

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Затем почленным интегрированием (квадратуры кривых $y = x^n$ были ему известны по труду Валлиса, см. стр. 181) он нашел, что

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots;$$

результат Броункера при этом тотчас получался при $x = 1$. Правда, Меркатор не выписал еще ряд в общем виде, а только для значений аргумента $x = 0{,}1$ и $x = 0{,}21$, но поскольку в той же работе он произвел еще вычисление «суммы логарифмов», т. е.

$$\int_0^x \ln(1+x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} - \ldots$$

для $x = 0{,}1$, то ясно, что он в обоих случаях владел общим разложением. Так это и было воспринято современниками. Вопроса о сходимости Меркатор совершенно не затронул.

Меркатор не первый пришел к разложению логарифмической функции в степенной ряд. К тому же результату пришли Гудде в 1656 г. и Ньютон в 1665 г., но оба хранили его при себе. Значение публикации «Логарифмотехники» оказалось поэтому очень велико. Валлис откликнулся рецензией в «Philosophical Transactions» еще в том же 1668 г. Выразив восхищение открытием Меркатора, он указал, что пользоваться рядом при $x > 1$ нельзя, и одновременно дал разложение

$$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

В том же 1668 г. Грегори в «Геометрических этюдах» предложил вывод ряда Меркатора в античной манере и разложение

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right),$$

пригодное для вычисления логарифма любого положительного числа $z = (1+x)/(1-x)$, ибо тогда $x = (z-1)/(z+1)$ по абсолютной величине меньше единицы.

Интересен вывод логарифмического ряда с помощью общей формулы бинома Ньютона (см. стр. 228), предложенный Галлеем (в «Philosophical Transactions» за 1695 г.). Пусть $\log(1+x)$ при основании a есть m/n, т. е. $a^{m/n} = 1 + x$ или $a^{1/n} = (1+x)^{1/m}$. Фиксируя m/n и считая n (и, следовательно, m) сколь угодно большим числом, Галлей представил разность $a^{1/n} - 1$ в виде k/n, где $k = \mathrm{const}$, так что

$$a^{1/n} = 1 + \frac{k}{n}.$$

В таком случае для $\log(1+x)$ получается выражение, в сущности известное ранее Бриггу (стр. 68):

$$\log(1+x) = \frac{m}{k}\,[(1+x)^{1/m} - 1].$$

Раскладывая правую часть в бесконечный ряд и заменяя произведения вида $\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\ldots\left(\frac{1}{m} - r\right)$ на $(-1)^r r!$, Галлей получил ряд Меркатора

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right),$$

а для десятичных логарифмов привел значения $k = 2{,}302585\ldots$ и $1/k = 0{,}434299\ldots$ с 60 десятичными знаками. Эти и некоторые другие подсчеты произвел, вероятно, астроном Абрахам Шарп (1651—1742). Аналогично, отправляясь от равенства

$$1 + x = \left[1 + \frac{k}{m} \log (1 + x)\right]^m,$$

Галлей при очень большом m вывел разложение показательной функции

$$1 + x = 1 + y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

где $y = k \log (1 + x)$ (ср. стр. 232). Этот метод впоследствии встречается у Эйлера (см. т. III, гл. 7).

Таким образом, логарифм, введенный Непером кинематически и как табулированное решение дифференциального уравнения типа $dy = adx/x$, через немногие десятилетия перевоплотился в геометрический образ площади под гиперболой, а затем был аналитически выражен в форме степенного ряда.

Любопытно, что и Декарту пришлось встретиться с логарифмической функцией, и притом дважды. Занимаясь одной задачей механики, он исследовал кривую, обладающую в полярных координатах тем свойством, что угол α радиус-вектора с касательной в его конце постоянен. Отсюда он вывел, что длина дуги s, считая от полюса, пропорциональна радиус-вектору ρ. Об этой кривой он писал 12 сентября 1638 г. Мерсенну [1]. Как решил Декарт эту задачу — одну из первых обратных задач на касательные, в которых требуется найти кривую по данному свойству касательной, — неизвестно. Скорее всего, он воспользовался характеристическим бесконечно малым прямоугольным треугольником со сторонами ds, $d\rho$, $\rho d\varphi$, в данном примере дающим $ds = \sec \alpha d\rho$, так что $s = \sec \alpha \cdot \rho$ (ибо $s = 0$ при $\rho = 0$). Если бы Декарт пожелал найти зависимость между ρ и φ, т. е. полярное уравнение кривой, то он бы встретился с «уравнением Непера» $d\varphi = (\operatorname{tg}\alpha \cdot d\rho)/\rho$. К этому уравнению, выраженному в кинематических терминах, пришел Валлис, не отметивший, впрочем, как и Декарт, логарифмической зависимости между φ и ρ. Той же кривой занимались Э. Торричелли и позднее Я. Бернулли, а Лопиталь назвал ее логарифмической спиралью [2].

В то же время Декарт уже подошел вплотную к «уравнению Непера», решая другую знаменитую обратную задачу на касательные, поставленную перед ним Дебоном: определить кривую, у которой отношение подкасательной к ординате равно отношению данной линии к разности абсциссы и ординаты. Мы можем записать это условие уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{b}$. Уверенный, что общего приема точного решения таких задач не существует, Декарт сначала перебрал в поисках требуемой линии множество алгебраических кривых. Не добившись успеха на этом пути, он построил искомую линию приближенно. Перейдя к некоторой другой системе косоугольных координат, он установил, что в ней эта линия имеет постоянную

---

[1] Письмо это было опубликовано в 1657 г.

[2] В письмах 1645—1647 гг. Торричелли произвел независимо от Декарта спрямление и квадратуру этой спирали, кинематически определив ее свойством, которое можно записать нашими уравнениями $\varphi = kt$, $p = a^{-t}$; при этом он ясно описал, как кривая асимптотически приближается к полюсу, совершая вокруг него бесконечное множество оборотов.

подкасательную, именно $dx' = -\frac{\sqrt{2}\, b dy'}{y'}$, и, численно решая задачу, пришел к тем неравенствам, которыми определял логарифм Менголи (см. стр. 161):

$$\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} < \sum_{i=n+1}^{m} \Delta x_i < \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i-1};$$

при этом Декарт отметил, что разность левой и правой границ $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ можно, увеличивая n и m, сделать сколь угодно малой, а точки кривой строить с любой точностью. Наконец, Декарт приводит кинематический способ описания искомой кривой с помощью пересечения двух движущихся прямых, причем закон движения определяется аналогично неперову определению логарифмов. Впрочем, о логарифмах Декарт при изложении своего решения (в письме Дебону 20 февраля 1639 г.) не упомянул ни словом и далее в этом направлении не продвинулся. Менголи о решении Декарта почти несомненно не знал.

Связь гармонических рядов с логарифмами побуждала к их более подробному изучению и привела к рассмотрению асимптотических сумм. Это сделал все в те же годы Ньютон, изложивший свои результаты в письмах к Коллинсу от января 1669 г. и 20 июля 1671 г.

Функция $f(x)$ называется асимптотически представимой функцией $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ (в частности, $x \to \infty$), если при этом $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 1$, или, что то же, $\frac{f(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)} \to 0$, т. е. разность между обеими функциями бесконечно мала относительно функции сравнения $\varphi(x)$. Говорят также об асимптотическом равенстве $f(x) \sim \varphi(x)$. Например, $1 - \cos x \sim x^2/2$ при $x \to 0$, а $\frac{x^2}{2} + x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to \infty$. Функция $f(x)$ называется асимптотически разложимой при $x \to x_0$ (в частности, $x \to \infty$) в бесконечный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$, если при этом

$$\frac{f(x) - \sum_{0}^{n-1} \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \to 1,$$

или, что то же,

$$\frac{f(x) - \sum_{0}^{n} \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \to 0,$$

т. е. разность между функцией и частной суммой ряда бесконечно мала относительно последнего члена суммы. Всякая функция асимптотически разложима в сходящийся к ней ряд Тейлора, но асимптотический ряд для данной функции может быть и расходящимся. Это не мешает использованию — при надлежащей осторожности — асимптотических расходящихся рядов для исследования и приближения функций.

Ньютон специально исследовал поставленный перед ним Коллинсом вопрос о вычислении частных сумм общего гармонического ряда $\sum \frac{1}{a+kb}$.

Разлагая каждый член такой суммы, записанный в виде $\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{kb}{a}}$, в геометрическую прогрессию до некоторого ее места, он получил

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a+kb}=\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{b}{a}\right)^i S^{(i)}(n),$$

где $S^{(i)}_{(n)}$ — сумма i-х степеней натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. При возрастании числа n до бесконечности такие суммы, вообще говоря, расходятся. Вместе с тем для каждого n можно подобрать такое N, что разность

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a+kb}-\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\left(\frac{b}{a}\right)^i S^{(i)}(N)$$

будет достаточно мала. Хотя точность приближения не может быть увеличена для данных a, b и N, но совершаемая погрешность при взятии «усеченного» ряда может быть точно вычислена. Сам Ньютон показал на числовых примерах, как вести выкладки, чтобы получить при заданном числе членов приближение с ошибкой, не превышающей данного числа.

Асимптотические представления стали чрезвычайно ценным средством исследований и вычислений в XVIII в., особенно благодаря Стирлингу и Эйлеру; их успешно применяли затем Лагранж, Лежандр и Лаплас. Строгая теория вопроса была разработана только в XIX в.

Открытия Грегори

На примере логарифмической функции мы познакомились с первыми успехами теории рядов и вместе с тем увидели, какими принципами руководствовались математики в этой области. Когда речь шла о приближенном вычислении отдельной конкретной величины, принимали во внимание сходимость к ней ряда и искали оценки аппроксимации. Здесь дело было не только и, пожалуй, не столько в античной традиции строгости, сколько в существе расчетных задач и возможности установления соответствующих неравенств. Но когда переходили к операциям над буквенными рядами, то на них, как правило, не задумываясь, переносили приемы действий над конечными алгебраическими многочленами. Поскольку фактически оперировали функциями, аналитическими внутри соответствующего промежутка, такое оперирование бесконечными степенными рядами обыкновенно не приводило к ошибкам. В этих условиях еще отсутствовали реальные стимулы к постановке общих проблем теории сходимости и к изучению рядов как самостоятельных объектов анализа; исключения были редкостью (стр. 255). В результате при выводе и даже проверке степенных разложений (стр. 230), как и при манипулировании ими, часто применяли формальные приемы, получившие еще большее развитие в XVIII в. Сказанное относится и к другим процессам бесконечного приближения.

Разложение в ряд логарифма было не единственным примером употребления степенных рядов. Многочисленные другие разложения открыл Дж. Грегори. Из его письма к Коллинсу 23 ноября 1670 г. (стр. 157) видно, что в это время он владел уже общим разложением бинома $(1+x)^{p/q}$, а к началу 1672 г. вывел еще несколько важных разложений, которые мы запишем в современной форме:

$$1^\circ.\quad \varphi = \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\varphi - \ldots$$

Ряд для арктангенса Грегори, вероятно, получил почленным интегрированием ряда, возникающего при делении $1:(1+x^2)$, где $x = \operatorname{tg}\varphi$.

$$2^\circ.\quad \operatorname{tg}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{15} + \ldots$$

$$3^\circ.\quad \ln\sec\varphi = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{12} + \frac{\varphi^6}{90} + \ldots$$

Последний результат был, скорее всего, найден интегрированием членов предыдущего ряда

$$4^\circ.\quad \sec\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{5\varphi^4}{24} + \ldots$$

$$5^\circ.\quad \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{24} + \ldots$$

Данный ряд также возникает при интегрировании предыдущего.

Все эти и некоторые другие разложения приведены в письме к Коллинсу от 15 февраля 1672 г. Можно предполагать, что в это время Грегори владел и гораздо более общим результатом — разложением в ряд Тейлора — Маклорена, хотя прямого свидетельства о том не существует. Весьма правдоподобно, что разложения для $\operatorname{tg}\varphi$ и $\sec\varphi$ он вывел с помощью последовательного дифференцирования.

Однако только что перечисленные открытия Грегори не оказали существенного влияния на развитие математического анализа. О наиболее важном из них (если оно действительно было им произведено), т. е. ряде Тейлора, никто не мог в ту пору и подозревать: о нем заключили по рукописному наследию Грегори лишь исследователи XX в. [1] А между тем еще в 1665—1669 гг. далеко продвинулся в теории рядов начиная с открытия той же теоремы о биноме, Ньютон, результаты которого начали получать распространение не позднее конца 1669 г. как в Англии, так и за границей. О работах в этой области Ньютона, а также Лейбница (с 1673 г.) мы расскажем далее. Теперь же мы обратимся к развитию в XVII в. новых интегральных и дифференциальных методов.

Инфинитезимальные методы Кеплера

Первый решительный разрыв с античными формами квадратур и кубатур совершил Кеплер, ярко обнаживший лежавшее в их основе оперирование неограниченно возрастающими по числу суммами беспредельно малых величин и вновь доказавший на многочисленных примерах эвристическую ценность метода неделимых, который он, можно сказать, между строк вычитал в творениях Архимеда [2].

[1] Ряд Тейлора — Маклорена Грегори мог бы вывести путем предельного перехода из своей интерполяционной формулы (стр. 157) так, как это сделал впоследствии сам Тейлор.

[2] С этим методом Кеплер мог в какой-то мере познакомиться по известному ему «Математическому сборнику» Паппа.

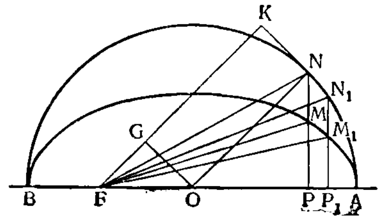


Рис. 22

Квадратуры играли решающую роль в астрономических исследованиях Кеплера. Вот как он сам высказал второй закон движения планет в своей «Новой астрономии» (1609): время движения планеты от конца большой оси до произвольного места на орбите относится ко времени полного оборота, как «сумма радиус-векторов», проведенных из фокуса, в котором находится Солнце, в точки пройденной дуги, относится к «сумме радиус-векторов» всего эллипса. Кеплер говорил о сумме радиус-векторов сектора там, где мы говорим о его площади. Это не значит, что он отождествлял эти понятия. Такой оборот речи имел другое содержание: отношение площадей выражается через отношение сумм неограниченно большого количества радиус-векторов, принадлежащих этим площадям,— мы бы сказали — через предел такого отношения. Однако величина отношения зависит от того, как выбирать эти радиус-векторы, или, что то же, точки дуг, к которым они проведены. Такой выбор, соответствующий нашему выбору аргумента интеграции при интегрировании функции, выражающей радиус-вектор, представлял основную трудность. Ее вполне оценил еще Кавальери, в предисловии к своему главному труду писавший: «Всякий, кто видел трактат упомянутого Кеплера о движении Марса, может легко убедиться на основании наших исследований, как легко ему было впасть в ошибку..., исходя из предположения, что площадь эллипса равновелика совокупности всех расстояний планеты, вращающейся по эллиптической линии, от Солнца» [1].

Свое вычисление, т. е. приближенное интегрирование, Кеплер произвел следующим образом. Он строит на большой оси эллипса, как на диаметре, окружность и рассматривает радиус-векторы тех точек эллипса, которые являются проекциями в направлении малой оси точек окружности, находящихся на равных дуговых расстояниях. В самом деле, пусть точка M эллипса является проекцией точки N окружности (рис. 22); тогда фокальный радиус-вектор FM точки M, как известно, равен $a + \varepsilon x$, где $a = OA$ — большая полуось эллипса, т. е. радиус круга, $x = OP$ — абсцисса точек M и N, а $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет эллипса, т. е. отношение фокусного расстояния OF к OA. Проведем из фокуса F параллельно радиусу ON прямую FK до пересечения в точке K с касательной к окружности в точке N и опустим перпендикуляр OG из центра O на линию FK. Тогда из подобия треугольников OGF и ONP следует, что

$$\frac{FG}{OF} = \frac{OP}{ON}, \text{ т. е. } FG = \frac{OF}{ON} OP = \frac{c}{a} x = \varepsilon x,$$

[1] *Б. Кавальери.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Перевод, вступительная статья и комментарии С. Я. Лурье. М.— Л., 1940, стр. 91.

и так как $GK = ON = a$, то линия $FK = FG + GK$ равна линии $FM = a + \varepsilon x$. Если точка N_1 близка к точке N, то фигура NFN_1 мало отличается от треугольника, ограниченного лучами FN, FN_1 и касательной NK; поэтому площадь фигуры NFN_1 мало отличается от половины произведения $FM = FK$ на дугу NN_1 или от половины произведения FM_1 на дугу NN_1. Поэтому если мы разделим дугу окружности AN на равные части точками $N_1, N_2, \ldots, N_n$, то площади фигур MFM_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ пропорциональны площадям NFN_i, которые мало отличаются от половины сумм произведений FM_i на дугу $NN_1 = N_1N_2 = \ldots = N_{n-1}N_n$, т. е. площади MFM_i почти пропорциональны суммам радиус-векторов $FM_1, FM_2, \ldots$ $\ldots, FM_i$, если точки эллипса $M_1, M_2, \ldots, M_n$ построены указанным способом. Кеплер действительно складывал радиус-векторы выбранных таким образом точек и вычислял отношения таких сумм.

Иными словами, если обозначить угол AON, так называемую эксцентрическую аномалию, буквой ψ, то Кеплер приближенно вычисляет интегралы вида $\int\limits_0^\psi r d\psi$ и устанавливает пропорциональность между временем t и значением этого интеграла. Если ввести еще полярный угол AFM или истинную аномалию φ, то результат Кеплера можно аналитически передать следующим образом. Радиус-вектор $r = a + \varepsilon x = a + c\cos\psi$, а

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{c+x} = \frac{b\sin\psi}{c + a\cos\psi},$$

где $y = PM$, b — малая полуось; поэтому (C — коэффициент пропорциональности)

$$Ct = \int\limits_0^\varphi r^2 d\varphi = \int\limits_0^\psi brd\psi = b(a\psi + c\sin\psi),$$

где первый интеграл выражает, если его поделить на 2, площадь в полярных координатах. Кроме того, если обозначить $C/ba = k$, то

$$kt = \psi + \varepsilon\sin\psi,$$

и это уравнение служит Кеплеру для определения положения планеты в данный момент времени. Мы видели, что «уравнение Кеплера» приходилось приближенно решать в другой связи еще багдадским астрономам IX в. (т. I, стр. 237). Сам Кеплер выразил сначала это уравнение геометрической задачей, вытекающей из его второго закона: из точки, лежащей на диаметре круга, провести прямую, делящую площадь полукруга в данном отношении. Прямое, неприближенное решение задачи он считал невозможным в силу разнородности углов и синусов.

Упомянем в этой связи, что, сравнивая между собой суммы синусов углов, взятых через один градус, от $1°$ до $\varphi°$ для нескольких значений φ, Кеплер установил равенство, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\int\limits_0^\varphi \sin x dx = 1 - \cos\varphi.$$

Позднее Кеплер узнал, как доказывается этот результат на основе строгих методов Архимеда, который пришел к тому же по существу выводу при измерении поверхности шарового сегмента (т. I, стр. 121).

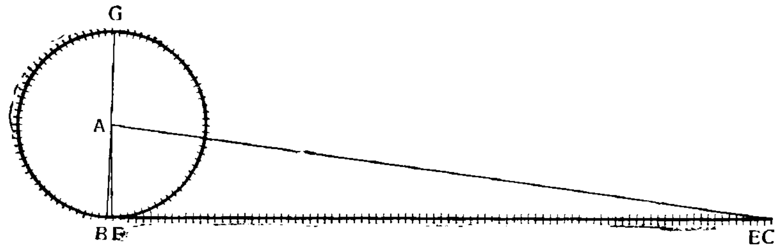


Рис. 23

Впрочем, наряду с такими приемами, в пределе дающими точные соотношения, Кеплер пользовался и заведомо неточными приближениями. Так, он принимает длину эллипса равной $\pi(a + b)$ по аналогии с тем, как площадь этой фигуры образуется из площади круга πa^2. Но он указал, что это лишь приближенное выражение для длины эллипса.

Случайное обстоятельство дало повод Кеплеру подробно рассмотреть вопрос о кубатурах тел вращения. Это были его наблюдения над распространенным приемом измерять вместимость винных бочек, которую определяли независимо от формы с помощью всего одного промера — отметки на линейке, просунутой через наливное отверстие в верхней точке пуза до пятки днища. В «Новом измерении винных бочек» (Nova stereometria doliorum vinariorum, Lincii, 1615) Кеплер изложил «принципы» геометрических измерений, «как они установлены Архимедом, конечно, лишь настолько, насколько этого достаточно для удовлетворения ума, любящего геометрию, а полные и во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения» [1]. Эти принципы опять-таки состоят в пользовании бесконечно малыми элементами фигур без уточнения основных понятий. Но если в «Новой астрономии» основным приемом было приближенное вычисление сумм неделимых в отношений между суммами, то в «Новом измерении» им является преобразование одних фигур в другие на основании равновеликости их соответственных беспредельно малых частей или же неделимых элементов.

Доказывая, что отношение площади круга к квадрату диаметра приближенно равно 11 : 14, Кеплер усматривает «смысл» косвенного доказательства Архимеда в следующем. «Окружность круга BG содержит столько же частей, сколько точек,— именно бесконечное число. Каждую из них рассмотрим как основание некоторого равнобедренного треугольника с боковой стороной AB (рис. 23), и, таким образом, в площади треугольника окажется бесконечное множество треугольников, соединенных вершинами в центре A. Пусть далее окружность круга BG вытянута в прямую и пусть ей равна BC, а AB к ней перпендикулярна. Тогда основания всех этих бесчисленных треугольников или секторов будут представляться расположенными друг за другом по прямой BC; пусть одно из таких оснований — BF, и какое-нибудь равное ему — CE; наконец, соединим F, E, C с A. Таких треугольников ABF, ACE над прямой BC получится столько же, сколько секторов в площади круга, и их основания BF, EC и общая высота

[1] *И. Кеплер.* Новая стереометрия винных бочек. Перевод и предисловие Г. Н. Свешникова. Вступительная статья М. Я. Выгодского. М.— Л., 1935, стр. 109. Мы переводим слово stereometria более подходящим в данном случае словом «измерение».

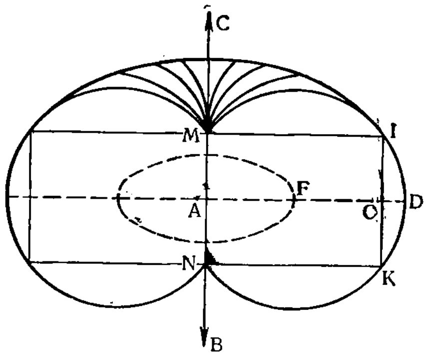


Рис. 24

AB будут такие же, как у секторов; следовательно, все эти треугольники ABF, ACE и т. д. будут равновелики и каждый из них будет равновелик соответственному сектору круга. А значит и все вместе эти треугольники, имеющие основания на линии BC, т. е. треугольник BAC, всеми ими составленный, будет равновелик сумме всех секторов круга, т. е. составленной ими площади круга» [1].

В I части книги Кеплер доказывает этим способом ряд теорем о площади круга и поверхностях и объемах круглых тел, известных Архимеду, причем он считает, что Архимед, получая эти результаты, не мог рассуждать иначе, чем он. В частности, приведенное им рассуждение о площади круга Кеплер заканчивает словами: «Это самое и имеет в виду архимедово приведение к нелепости». Кеплер, как мы знаем, был недалек от истины, так как его рассуждения весьма близки по идее к эвристическому методу, изложенному в письме Архимеда к Эратосфену. Здесь же в «Дополнении к Архимеду» Кеплер находит аналогичным образом объем целого ряда тел, полученных вращением дуг конических сечений около различных прямых; этим телам, до него в большинстве случаев не рассматривавшимся, Кеплер дал название яблока, лимона, груши, сливы, айвы, земляники и др. Яблоко и лимон, в частности, образуются при вращении вокруг своего основания сегмента круга, большего или соответственно меньшего, чем полукруг. Для определения, например, объема яблока (рис. 24) Кеплер разворачивает его в отрезок цилиндра «по тем же законам, по которым Архимед в теореме II развернул площадь круга в прямоугольный треугольник» [2], именно в отрезок $MNDS$ прямого цилиндра, основанием которого служит сегмент круга (рис. 25). Отрезок отсекается от цилиндра плоскостью MNS, проходящей через основание сегмента, и имеет высоту, равную длине окружности экватора яблока. Если взять какую-либо хорду IK сегмента, параллельную основанию, то при вращении она описывает внутри яблока цилиндрическую поверхность; плоскость же, проходящая через хорду перпендикулярно к основанию, образует внутри цилиндрического отрезка прямоугольник IKL. На очевидной равновеликости площадей поверхности цилиндра и прямоугольника и основан немедленный вывод Кеплера о равенстве объема яблока и цилиндрического отрезка. Тут же

[1] *И. Кеплер*. Новая стереометрия винных бочек, стр. 114—115.
[2] Там же, стр. 179.

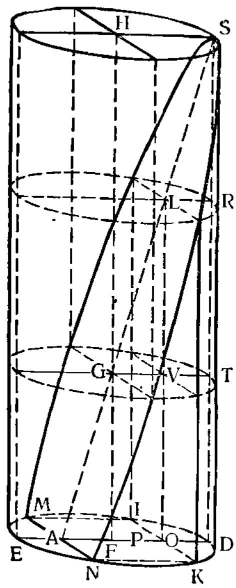


Рис. 25

определяется объем «пояса яблока» — его части, описываемой вращением вокруг MN сегмента IKD (этот объем равен объему $IKDSL$) [1],— и даются указания относительно проведения расчетов. В частном случае полукруга отрезок цилиндрического копыта сразу же выражается через равный ему объем шара. Мы видели, что после Кеплера вычислением объемов цилиндрических отрезков занимались Григорий Сен-Венсан и Таке (стр. 132).

Во II части книги общая теория применяется к определению объема австрийской винной бочки, доказательству выгодности этой формы и обоснованию применения для измерения ее объема градуированной линейки. Изучая вопрос, при какой форме бочки имеют наибольшую вместимость, Кеплер пришел к изопериметрическим задачам. Попутно он заметил, что по обе стороны от места наибольшего значения величины ее убывание вначале нечувствительно. Через тридцать лет Ферма открыл общее правило отыскания экстремумов.

Подавляющее большинство результатов Кеплера было правильным. Но в нескольких случаях, опираясь на аналогии или заключения, представлявшиеся ему правдоподобными, он допустил ошибки. Мы упоминали о критике его труда Андерсоном и Гульдином, которые отметили некоторые такие ошибки (стр. 137). Но отдельные неточности не вытекали из существа инфинитезимальных методов Кеплера, и передовые математики той эпохи, как Бригс и Кавальери, горячо приветствовали его сочинение, раскрывшее яркие перспективы новых изысканий. Свое дальнейшее развитие метод неделимых получил прежде всего как раз у Кавальери.

---

[1] Вместе с тем Кеплер выражает объем пояса яблока, как сумму объема шарового пояса, образуемого вращением IKD (он равновелик отрезку цилиндра $LVTS$), и отрезка цилиндра $IKDT$.