Галилей

Как уже говорилось, исключительно важное значение в развитии точных наук имела деятельность Галилео Галилея (1564—1642). Галилей — воспитанник и с 1589 г. профессор университета в Пизе, а с 1592 по 1610 г. профессор в Падуе, после того в течение долгих лет был «первым философом и математиком» великого герцога Тосканского во Флоренции. Драматическая судьба великого ученого, с 1605 г. открыто выступавшего с пропагандой гелиоцентрического учения и в 1632 г. опубликовавшего в его защиту знаменитый «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниканской» (Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano), общеизвестна. Уже в следующем, 1633 г., эта книга была внесена в список запрещенных католической церковью сочинений, а автор под угрозой тяжелых репрессий был принужден отречься от своих убеждений и принести публичное покаяние; оставшиеся годы жизни он провел под наблюдением инквизиции, всячески затруднявшей его общение с учеными Италии и других стран. Мы не будем здесь перечислять великие открытия Галилея в астрономии, оптике и различных областях механики. Заметим только, что его «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali, Leiden, 1638), в которых были заложены основы динамики и учения о сопротивлении материалов, представляют и чисто математический интерес.

Еще в молодые годы, не позднее 1586 г., познакомившись с работой о центрах тяжести Коммандино (стр. 131), Галилей провел по этому вопросу собственное исследование и среди прочего нашел центр тяжести усеченного параллельно основанию параболоида вращения; доказательства он проводил в манере древних. Но после выхода труда Валерио (стр. 132), получившего те же и другие результаты, Галилей отказался от намерения издать свое сочинение, и оно увидело свет только в составе «Бесед».

Если сочинение о центрах тяжести все же было издано, то другой задуманный Галилеем математический труд о неделимых, который он подготовлял в середине 20-х годов и о котором говорится в его переписке с Кавальери, вовсе не был завершен. Взгляды Галилея на взаимные связи между непрерывным и дискретным и на природу бесконечного нашли отражение и в этой его переписке, и в «Беседах». Он видел трудности, присущие понятиям и приемам инфинитезимальной математики, и много думал о том, как преодолеть эти трудности, но в сущности не пришел к каким-либо окончательным решениям. Некоторые его замечания очень глубоки. Мы говорили ранее о парадоксальных свойствах непрерывных бесконечных множеств точек, с которыми встретился Брадвардин (т. I, стр. 273). Галилей придал подобного рода парадоксам новую форму, отображая счетное бесконечное множество на его бесконечную же часть. Именно он показывает, что всех целых квадратов, с одной стороны, меньше, чем всех целых чисел, а с другой стороны, их столько же, ибо, как мы говорим теперь, между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие. Объяснение трудности Галилей видел в том, что «свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, они применимы только к конечным количествам» [1]. Это не то ре-

[1] *Г. Галилей.* Избранные труды, т. 2. М., 1964, стр. 141.

Галилео Галилей
(по рисунку О. М. Леони 1624 г., хранящемуся в Лувре, Париж)

шение вопроса, которое предложил в конце XIX в. Г. Кантор, разработавший арифметику мощностей бесконечных множеств. Но Галилей был несомненно прав, утверждая, что обычные свойства равенства и неравенства в применении к таким множествам нарушаются. Этой констатацией он ограничился, полагая, что количество натуральных чисел не больше количества их квадратов, но и не одинаково с ним.

Быть может, колебания в вопросе о соотношении между континуумом и неделимыми были одной из причин, по которой Галилей не написал книгу о неделимых. Все же в «Беседах» неделимые употребляются при разборе одного из самых ответственных вопросов — проблемы равномерно-ускоренного движения. Теорему о том, что при таком движении, начинающемся с нулевой скоростью, путь проходится за то же время, что и при равномерном движении со скоростью, равной половине конечной скорости равномерно-ускоренного движения, Галилей доказывал, представляя (рис. 26) время движения общей стороной AB треугольника ABE и прямоугольника $ABGF$, «все моменты скорости» обоих движений — отрезками, параллельными BE, а пути — площадями этих фигур. Теорема сразу вы-

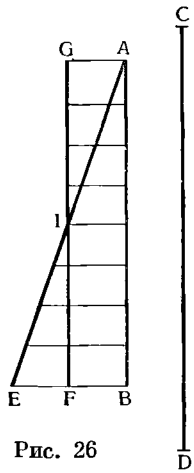


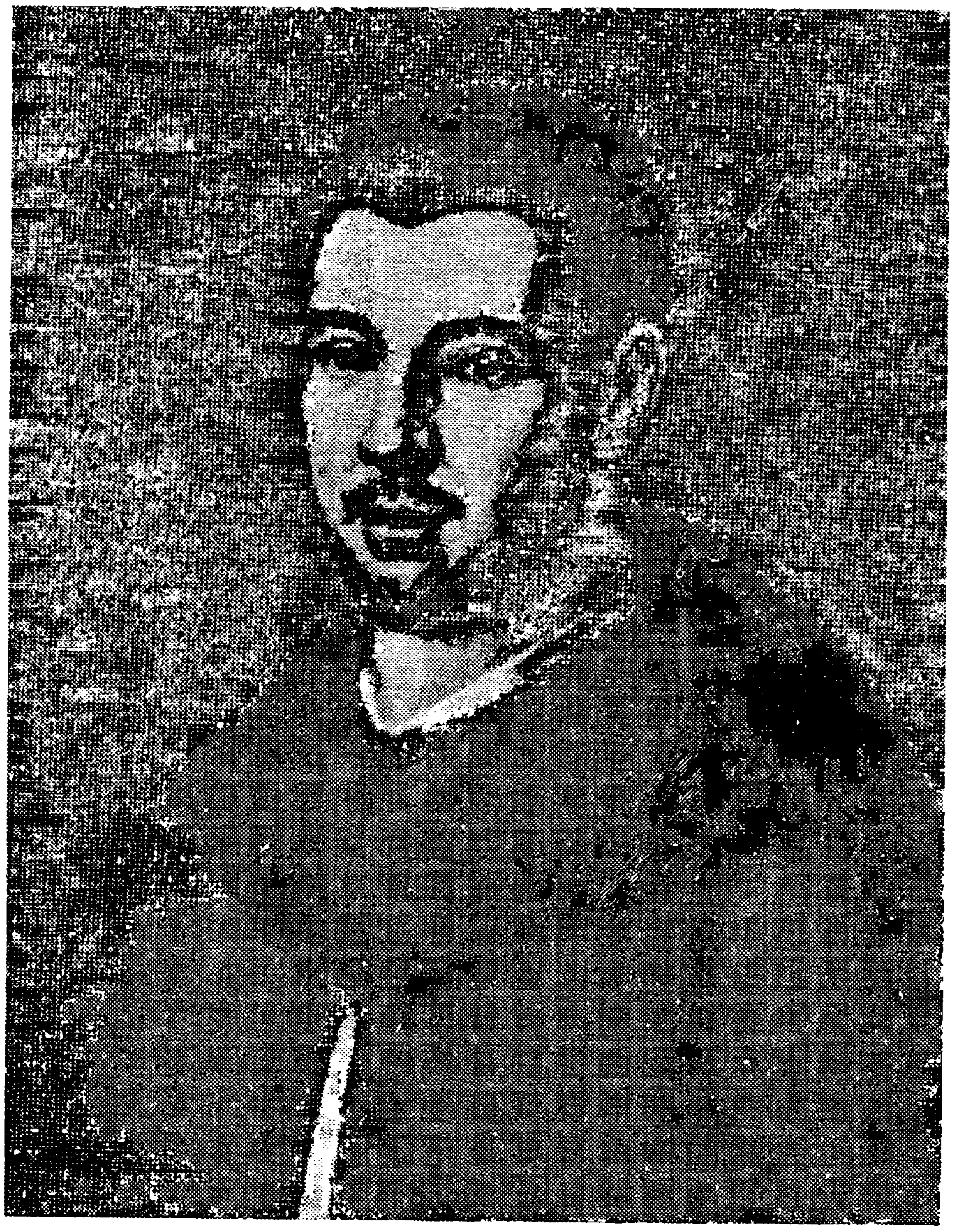
Рис. 26

текает из равенства площадей обеих фигур. Доказательство это, восходящее к Орему, повторялось многими — правда, вне всякой связи с движением падающих тел (см. т. I, стр. 279). В печатных книгах XVI в. оно встречается не менее семнадцати раз. В основе вывода лежит то же представление о площади, как о сумме линий, что у Кеплера, и представление о пути, как своего рода сумме скоростей. Впрочем, слово «неделимые» Галилей в данном случае не применил.

Метод неделимых Кавальери

Наиболее ярким и влиятельным представителем «геометрии неделимых», соединившей инфинитезимальные представления Кеплера и средневековой математической атомистики и вместе с тем руководившейся поисками общих вычислительных приемов, был монах-иеронимит Бонавентура Кавальери (ок. 1598—1647). Кавальери изучал в Пизе математику под руководством приверженца и друга Галилея Бенедетто Кастелли (1577—1644), и успехи его были столь быстры и значительны, что Кастелли поручал иногда своему ученику замещать его на кафедре математики. Через Кастелли Кавальери познакомился с Галилеем, жившим тогда в расположенной неподалеку Флоренции. В конце 1621 г. Кавальери уже значительно продвинулся в разработке метода неделимых, и в переписке с Галилеем он обсуждал вопрос: представляют ли собой «все линии» двух плоских фигур величины, находящиеся между собой в некотором отношении? Кавальери приводил доводы в пользу как положительного, так и отрицательного ответа, но сам склонялся к первому. Впоследствии он выразил свою точку зрения следующими словами: «*Независимо от того, состоит ли непрерывное из неделимых или не состоит, совокупности неделимых сравнимы между собой и величины их стоят в определенном отношении друг к другу*» [1] (курсив в оригинале.— *Ред.*). Когда в 1629 г. освободилась кафедра ма-

[1] *Б. Кавальери.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.— Л., 1940, стр. 208.



Бонавентура Кавальери

тематики в Болонье, Кавальери представил рукопись уже готового труда по геометрии неделимых. Кандидатуру его горячо поддержал Галилей, характеризовавший молодого ученого, как «соперника Архимеда». Профессором болонского университета Кавальери работал до конца жизни. Ему принадлежит несколько трудов по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике и т. д., но главным делом его жизни была «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного» (Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bononiae, 1635) и служащие ее продолжением «Шесть геометрических этюдов» (Exercitationes geometricae sex, Bononiae, 1647). Сравнение площадей плоских фигур Кавальери сводит к сравнению «всех линий» (omnes lineae) их, которые можно представить себе как сечения фигур прямыми, движущимися или текущими (этот термин употребляется неоднократно), оставаясь все время параллельными некоторой направляющей — регуле. Аналогично для сравнения объемов тел вводятся взятые во всей их совокупности (но не в сумме!) плоские сечения. Относительно «всех линий» (или «всех плоскостей») двух равновеликих фигур во 2-й теореме второй книги доказывается, что они между собой равны, по какой бы регуле ни были взяты. Отсюда следует, что «все неделимые» одной и той же фигуры, взятые по какой-либо регуле, равны «всем неделимым» по любой другой регуле. Следующая, 3-я теорема

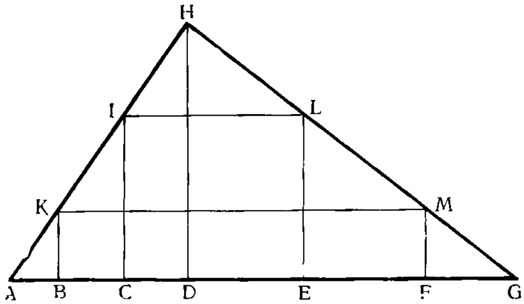


Рис. 27

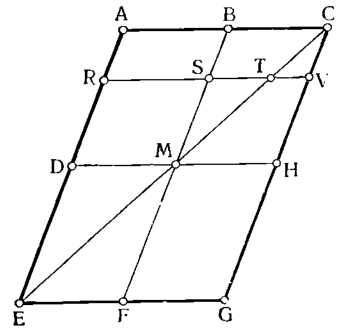


Рис. 28

второй книги гласит: «Фигуры относятся друг к другу, как все их линии, взятые по любой регуле, а тела, как все их плоскости, взятые по любой регуле» [1]. Отсюда следует, что для нахождения отношения между двумя плоскими или телесными фигурами достаточно найти отношения между всеми неделимыми обеих фигур по какой-либо регуле. Это положение Кавальери называл основным в его новой геометрии.

Отметим еще 1-ю теорему седьмой книги: объемы (или площади) двух фигур равны, если равны между собой площади (или длины) всех соответственных их сечений, проведенных параллельно некоторой данной плоскости (или прямой). Это предложение было впоследствии включено во многие учебники геометрии в качестве очевидного «принципа Кавальери».

Мы уже упоминали о трудности, связанной с законом выбора неделимых, трудности, хорошо известной Кавальери. В «Шести геометрических этюдах», отвечая на различные возражения со стороны Гульдина (стр. 137), Кавальери сам указал на парадокс, возникающий при неосмотрительном пользовании 3-й теоремой второй книги «Геометрии»: все линии треугольника HDA равны всем линиям треугольника HDG по общей регуле HD (рис. 27), и, казалось бы, по названной теореме неравные треугольники HDA и HDG должны быть равны. Парадокс объясняется тем, указывал Кавальери, что расстояния между линиями KB и IC не равны расстояниям между линиями MF и EL. Впрочем, ясных общих указаний о правиле выбора неделимых Кавальери не дал.

Было бы неточно сказать, что «все линии» площади между кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя ординатами соответствуют интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, но отношение «всех линий» двух фигур, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, соответствует отношению двух интегралов: $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx : \int\limits_a^b f_2(x)\,dx$. В «Геометрии» Кавальери фактически вычислил два простейших интеграла степенной функции $y = x^n$ при $n = 1$, $n = 2$. В общей формулировке этих результатов состояло преимущество метода Кавальери перед разнообразными приемами преобразования фигур у Кеплера. Теорему об интеграции $y =$

[1] *Б. Кавальери.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, стр. 209.

$= x^2$ можно было теперь применять, не выводя ее всякий раз вновь, к квадратуре параболы и спирали Архимеда, к кубатуре пирамиды и многих других тел, в том числе однополостного гиперболоида вращения — фигуры, на которую Кавальери обратил внимание первым и которую он назвал гиперболическим барабаном.

Впрочем, само вычисление интеграла от x^2 у Кавальери, который не применял новый алгебраический аппарат, было чисто словесным и довольно громоздким. Он вводит наряду со «всеми линиями» фигуры «все квадраты» на этих линиях и в 24-й теореме второй книги доказывает, что все квадраты параллелограмма относятся ко всем квадратам любого из треугольников, образуемых его диагональю, как 3 : 1. Если обозначать сумму квадратов линий фигуры Σ, то рассуждение Кавальери можно вкратце передать следующим образом. Пусть на рис. 28 $AB = BC$, $CH = HG$, $BF \parallel CG$ и за регулу принята EG, так что «все линии», как RV, параллельны EG. Поскольку $RT^2 + TV^2 = 2RS^2 + 2ST^2$, то, смещая RV из положения AC в EG, имеем

$$\sum AEC + \sum ECG = 2\sum AF + 4\sum BMC \text{ или } \sum AEC = \sum AF + 2\sum BMC.$$

Далее, по одному из следствий 22-й теоремы суммы всех квадратов двух подобных треугольников относятся, как кубы сходственных сторон, так что

$$\sum BMC = \frac{1}{8}\sum AEC;$$

кроме того,

$$\sum AF = \frac{1}{4}\sum AG.$$

Следовательно,

$$\sum AG : \sum AEC = 3 : 1.$$

В переводе на наш язык этот результат можно выразить формулой

$$\int_0^a a^2dx : \int_0^a x^2dx = 3 : 1 \text{ или } \int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}.$$

Через два года Кавальери распространил свой результат и на четвертые степени «всех линий»

$$\int_0^a x^4dx = \frac{a^4}{4}$$

и благодаря этому смог вычислить объем тела, которое Кеплер назвал параболическим веретеном. Определение этого объема, выполненное Ибн ал-Хайсамом (т. I, стр. 241), было тогда неизвестно. Вскоре затем последовало обобщение на последующие степени вплоть до девятой и заключение по неполной индукции для любых натуральных показателей

$$\int_0^a x^ndx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Все это Кавальери включил в «Шесть геометрических этюдов». Правда, к этому времени те же результаты были независимо получены и французскими математиками — Ферма, который ими владел с 1629 г., а также

Робервалем, который их нашел около 1634 г., но оба они ограничивались сообщением своих открытий в переписке.

Просторы, которые открывал метод неделимых, как и первые сделанные с его помощью открытия, произвели чрезвычайно сильное впечатление на младших современников Кавальери и ближайшее поколение, от Валлиса до Лейбница. Особенное влияние метод неделимых оказал на итальянских математиков, общее мнение которых выразил Торричелли, писавший: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем и дает возможность разрешить огромное число, казалось бы, неразрешимых теорем краткими, прямыми, наглядными доказательствами, что невозможно сделать по методу древних. Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника.... Метод Кавальери является действительно научным способом доказательства, всегда идущим путем прямым и свойственным самой природе. Жаль мне древней геометрии, что она либо не знала, либо не хотела признавать учения о неделимых...»[1].

Несмотря на ряд недостатков метода неделимых Кавальери,— прежде всего невыясненный математический смысл понятия «неделимого», отсутствие даже простейшей алгебраической символики и невозможность применить этот метод, по крайней мере непосредственно, к измерению длины дуг, ибо соответствующее неделимое является точкой, т. е. безразмерной величиной,— многие математики с энтузиазмом последовали за Кавальери. Употребление неделимых приводило к интересным находкам.

Ярким примером сказанного может служить одна из интеграций только что цитированного Эванджелисты Торричелли (1608—1647), ученика Кастелли и последователя Галилея и Кавальери. Более известны исследования Торричелли по физике (атмосферное давление, ртутный барометр, «торричеллиева пустота») и механике (парабола безопасности, закон истечения жидкости через боковую стенку сосуда). Но ему принадлежат и крупные математические открытия. Интеграция, о которой идет речь, представляет собой измерение объема бесконечно вытянутого тела $FEBDC$ (рис. 29), получающегося при вращении вокруг асимптоты AB (или Oy) площади между равносторонней гиперболой $xy = a^2$, ординатой CD ее точки (x_0, y_0) и обеими асимптотами AB и AC (или Ox). Эта кубатура изложена в мемуаре «Об остром гиперболическом теле» (De solido hyperbolico acuto, 1641), опубликованном в сборнике работ Торричелли «Геометрические труды» (Opera geometrica. Florentiae, 1644). Здесь Торричелли воспользовался в качестве неделимых кривыми поверхностями. Именно, он представляет себе, что тело $FEBDC$ составлено из цилиндрических поверхностей, образующие которых суть ординаты IL гиперболы, и площади каждой такой поверхности $2\pi xy = 2\pi a^2$ ставит в соответствие равную ей площадь круга на диаметре MI в прямом цилиндре $AHGC$, основание которого есть круг, построенный на диаметре $AH = 2\sqrt{2}a$ и перпендикулярный к горизонтальной асимптоте, а высота есть $AC = x_0$. Из равенства площадей соответственных неделимых тела $FEBDC$ и цилиндра $AHGC$ Торричелли заключает о равенстве объемов этого тела и цилиндра. Произведенное Торричелли определение объема равносильно интеграции $\int_0^{x_0} 2\pi xy dx = \int_0^{x_0} 2\pi a^2 dx = 2\pi a^2 x_0$.

[1] *E. Torricelli*. Opera geometrica. Florentiae, 1644, p. 56.

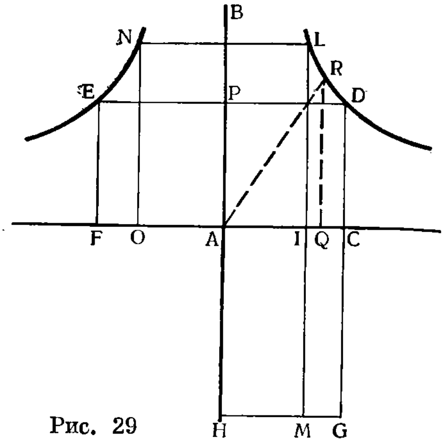


Рис. 29

Впрочем, «острым гиперболическим телом» Торричелли называет не $FEBDC$, но тело EBD, объем которого, очевидно, оказывается равным $\pi a^2 x_0$. Мы могли бы выразить этот последний объем несобственным интегралом $\pi \int\limits_{y_0}^{\infty} x^2 dy = \pi a^4 \int\limits_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$, однако такого хода мыслей в сочинении Торричелли нет[1]. Что касается идеи искривленных неделимых, то еще Кавальери в шестой книге своей «Геометрии неделимых» применил их для сведения квадратуры площади между витком спирали Архимеда $\rho/a = \varphi/2\pi$ и окружностью $\rho = a$ к квадратуре сегмента параболы $x^2/a = y/2\pi$ — сведения, которое можно выразить преобразованием $\rho = x$, $\rho\varphi = y$ и интеграла $\int\limits_0^a \rho\varphi d\rho$ в интеграл $\int\limits_0^a y dx$.

Рассмотренный пример ни в коей мере не исчерпывает богатства математических открытий Торричелли. Его имя встретится далее не раз, и здесь мы лишь кратко перечислим несколько особенно выдающихся его результатов. Около 1641 г. он независимо от Декарта (см. стр. 163) исследовал логарифмическую спираль, которую называл геометрической, и дал ее квадратуру и спрямление. Наряду с Робервалем и Ферма (и опять-таки независимо) он произвел квадратуру парабол и гипербол любого порядка, т. е. кривых с уравнением $y^n = kx^{\pm m}$, причем совершенно правильно установил условие существования и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^{\infty} y dx$ в случае гипербол. Для этих же кривых он построил касательные. Вслед за тем, обобщая прием Кавальери, он распространил свои исследования на спирали высших порядков $\rho^n = k\varphi^m$. Наконец, он изучил логарифмическую кривую $x = k \log y$, показав, что ее подкасательная имеет постоянную величину, и определив как площадь между нею и ее асимптотой, так и соответствующий объем тела вращения. Все

[1] Напомним, что бесконечно простирающиеся фигуры конечной площади (или конечного объема) рассматривал еще Орем; см. т. I, стр. 280.

Эванджелиста Торричелли
(с портрета неизвестного художника XVII в., хранящегося
в галерее Уффици, Флоренция)

эти и еще некоторые открытия, сделанные в 1646—1647 гг., Торричелли собирался объединить в большом сочинении «О новых линиях» (De lineis novis). Однако преждевременная смерть помешала этому, и подготовленные им фрагменты увидели свет без малого триста лет спустя, в 1919 г. Но, хотя наиболее общие и тонкие математические открытия Торричелли остались в рукописях, они получили, по крайней мере частично, распространение еще в ту эпоху, прежде и более всего среди итальянских ученых, а через их посредство и далее, став известными Дж. Грегори, Барроу и другим. Впрочем, теперь трудно в точности оценить степень влияния неопубликованных открытий Торричелли, тем более что почти одновременно к ним в большинстве случаев приходили также Декарт, Роберваль, Ферма и еще некоторые геометры.

Заслуживает еще упоминания, что Торричелли трактовал неделимые не как геометрические образы на единицу меньшего измерения, чем данная фигура, но как однородные с нею бесконечно малые элементы, так что неделимым линии оказывается бесконечно малый ее отрезок или дуга и т. п. Такая трактовка открывала прямой путь к рассмотрению интегральных сумм и интеграла, как их предела. Не менее важным был процесс алгебраизации метода неделимых, состоявший в переводе рассуждений и выкладок с геометрического языка на язык алгебраических формул. Каждое, даже небольшое, достижение в этом направлении укрепляло и усиливало зарождающийся математический анализ.

Арифметический вариант метода неделимых Валлиса

Если перевести теоремы Кавальери обо «всех квадратах», «всех кубах», и т. д. параллелограмма и треугольника на язык арифметики, то речь в них идет о том, что при бесконечном возрастании m отношение

$$\frac{0^n+1^n+2^n+\ldots+m^n}{m^n+m^n+\ldots+m^n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} k^n}{(m+1)\,m^n}$$

стремится к значению $1/(n+1)$. В этом легко убедиться, разделив сторону AE параллелограмма $AECG$ (рис. 28) на равные части, проведя через точки деления отрезки, параллельные AC, и сделав соответствующие подсчеты. Простейшие случаи при $n=1$ и $n=2$ рассмотрены были Архимедом. В чисто арифметическом виде только что указанный предельный переход был произведен независимо друг от друга несколькими математиками, сначала Ферма, затем Робервалем, Декартом и Валлисом. Мы остановимся прежде всего на приеме английского математика, который непосредственно примыкал к методу неделимых. Правда, Валлис знал идеи Кавальери только по изложению Торричелли, «Геометрические труды» (1644) которого изучил в 1650 г. Но этого было вполне достаточно, чтобы Валлис, воспитанный на алгебре Гарриота и Отреда, приступил к созданию арифметического варианта метода неделимых. Свои результаты он изложил в «Арифметике бесконечных» (1656), о которой уже говорилось ранее.

Валлисова концепция неделимого не была, с нашей точки зрения, ясной. Например, в случае плоских фигур он отправляется от рассмотрения все возрастающего числа вписанных и описанных параллелограммов, и говорит, что при бесконечной малости их оснований разность между площадью данной фигуры и площадями вписанной и описанной фигур становится бесконечно малой или нулевой. Параллелограмм с бесконечно малым основанием, по словам Валлиса, едва ли есть что-либо иное, чем линия. Но независимо от того, есть ли неделимый элемент площади линия или нет, Валлис не применял в своих квадратурах и кубатурах ни вписанных, ни описанных фигур. Следуя Кавальери и вместе с тем оправдывая терминологию метода неделимых выгодной краткостью выражения, он постоянно опирается на представление, что плоские фигуры состоят из бесконечных по числу параллельных прямых. Аналогично трактуются неделимые элементы тел. Однако, в отличие от Кавальери, сравнение «всех линий» и их степеней Валлис выражает с помощью сумм арифметических рядов. Это отличие или, лучше сказать, противопоставление отражено в названии его сочинения. На смену геометрии неделимых шла арифметика бесконечных величин.

Прежде всего Валлис находит отношения указанных арифметических сумм, причем использует неполную индукцию даже там, где вывод можно без особых трудностей провести полностью. Так, 21-е предложение, которое мы записали бы

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}k^2}{(m+1)\,m^2},$$

выводится из наблюдения, что отношение $\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}k^2}{(m+1)\,m^2}$ при m, равном последовательно 1, 2, ..., 6, равно 1/3, сложенной соответственно с 1/6, 1/12, ..., 1/36, так что второе слагаемое вообще имеет вид $1/6m$. Собственная формулировка теоремы Валлиса гласит: «Пусть предложен бесконечный ряд количеств, арифметически-пропорциональных в двойном отношении (или так, как в ряде квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0; ряд этот относится к ряду стольких же количеств, равных наибольшему из предложенных, как 1 к 3» [1]. Отсюда в предложении XXII немедленно получаются выражения объемов конуса и пирамиды через объемы равновысоких цилиндра и призмы с теми же основаниями, ибо конус и пирамида состоят из бесконечного числа плоских фигур, «подобных и параллельных, составляющих ряд количеств, арифметически пропорциональных в двойном отношении, наименьшее из которых — точка, наибольшее же — основание» [2]. В следующем предложении XXIII точно так же производится квадратура параболы, а затем даются многие другие примеры. Проведя еще вычисление для $n = 3$, Валлис делает общий вывод, что

$$\int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

для всех целых $n > 0$. Доказательство общего случая он обещает дать в дальнейшем; фактически, изучая ряды фигурных чисел, он вычислил суммы первых семи степеней ряда натуральных чисел.

Результат Валлиса можно, положив $y = x^n$, записать в виде

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{xy}{n+1}.$$

Здесь xy выражает площадь прямоугольника между осями координат и координатными отрезками точки (x, y) кривой $y = x^n$. Эта площадь делится кривой на две части: прилегающую к оси абсцисс и прилегающую к оси ординат, причем они находятся в отношении 1 к n. Это дало Валлису интеграл степенной функции при дробном положительном показателе $1/n$:

$$\int_0^y y^{\frac{1}{n}}\,dy = \frac{nxy}{n+1} = \frac{n}{n+1}\,y^{\frac{n+1}{n}}.$$

Интеграл для показателя вида m/n Валлис получил с помощью интерполяции, проверенной на нескольких примерах, в которых $1/n > 0$. Если

---

[1] Цит. по переводу И. Ю. Тимченко в книге *Ф. Кэджори*. История элементарной математики, стр. 331.

[2] Там же.

положить для простоты верхний предел равным единице, то интерполяцию можно пояснить таким примером самого Валлиса. Известно, что

$$\int_0^1 x^0 dx = \frac{1}{1} \text{ и } \int_0^1 x^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Обозначим здесь знаменатели $1 = i_0$ и $2 = i_1$ и вычислим

$$\int_0^1 x^{1/3}\, dx = \frac{1}{i_{1/3}}$$

посредством следующей интерполяции между i_0 и i_1. Если вставить между $x^0 = 1$ и x две средние геометрические x^0: $x^{1/3}$: $x^{2/3}$, x, то их показатели образуют арифметическую прогрессию $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Вставим между знаменателями i_0 и i_1 также две средние арифметические $4/3$ и $5/3$ и сравним обе возникшие арифметические прогрессии

$$\begin{array}{lcccc} \text{показатели} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \text{знаменатели} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{array}$$

Показателю $1/3$ верхней соответствует значение $i_{1/3} = 4/3$ во второй и для интеграла $\int_0^1 x^{1/3}\, dx$ получается значение $3/4$, как и должно быть. Заодно находится $i_{2/3} = 5/3$ и $\int_0^1 x^{2/3} dx = \frac{3}{5}$. Проверив таким образом свой интерполяционный прием, Валлис получил значение интеграла степенной функции для любого положительного показателя. Мы не будем останавливаться на случае отрицательных показателей, упомянем только, что при его рассмотрении он ввел символ бесконечности ∞. О гораздо более сложных интерполяциях, давших Валлису бесконечное произведение для π, мы рассказали ранее (см. стр. 152).

Аналитические интеграции Ферма

Совершенно вне связи с исследованиями итальянских ученых собственные пути прокладывали П. Ферма и профессор Французского коллежа, впоследствии один из основателей Парижской академии наук, Жиль Персон Роберваль (1602—1675).

Ферма произвел квадратуру любых кривых $y = x^n$ (n — целое, большее нуля) еще около 1629 г. О своем открытии он рассказал в письме от 22 сентября 1636 г. Робервалю, не раскрыв, правда, свой метод. Роберваль 11 октября ответил, что и он пришел к тем же результатам, используя неравенства

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^{m} k^n.$$

4 ноября Ферма разъяснил, что его прием опирается на такие же неравенства. Точно так же квадрировал Ферма спирали высших порядков.

Однако Ферма не был удовлетворен своим первым методом, требовавшим громоздкого последовательного вычисления сумм $\sum_{k=1}^{m} k^n$ для возрастающих показателей n и неподходящим при дробных или отрицательных значениях n [1]. Около 1642 г. он разработал новый вычислительный прием, пригодный в равной мере для целых и дробных, положительных и отрицательных значений показателя, кроме $n = -1$. При этом он возродил метод интегральных сумм, которым, вероятно, пользовался и для квадратуры $y = x^n$ в случае натурального показателя. О своих результатах для $n > 0$, включавших также кубатуры и определения центров тяжести соответствующих тел вращения вокруг оси ординат, он письменно сообщил в 1644 г. Кавальери, оставив, впрочем, в секрете метод. Это, как мы знаем, было тогда распространенным явлением. Заметим, что и Декарт, излагая в письме от 13 июля 1638 г. к Мерсенну свое решение задачи о квадратуре парабол $y = x^n$, а также о кубатуре и центре тяжести их тел вращения вокруг оси, не разъяснил свой метод, так и оставшийся неизвестным [2].

Полное изложение своего нового метода Ферма дал в сочинении, окончательно оформленном после 1657 г., но изданном лишь посмертно в 1679 г., «О преобразовании уравнений мест... с приложением способа употребления геометрической пропорции к квадрированию бесчисленных парабол и гипербол» (De aequationum localium transmutatione... cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus). Метод, на который Ферма навело, вероятно, изучение Непера и который он сам назвал логарифмическим, фактически содержал двойной предельный переход и состоял в следующем. Допустим сначала, что квадрируется парабола $y = x^n$, $n = \frac{p}{q} > 0$. Отрезок оси абсцисс $(0, x)$ разбивается справа налево точками с абсциссами, образующими бесконечную убывающую геометрическую прогрессию $x, \alpha x, \alpha^2 x, \ldots, \alpha^m x, \ldots$, причем, поскольку $\alpha < 1$, то $\alpha^m x \to 0$ при $m \to \infty$. Ординаты y, проведенные в точках деления

$$x^{p/q}, \quad \alpha^{p/q} x^{p/q}, \quad \alpha^{2p/q} x^{p/q}, \quad \ldots, \quad \alpha^{mp/q} x^{p/q}, \quad \ldots,$$

разбивают квадрируемую площадь на бесконечное количество криволинейных четырехугольников с основаниями Δx, равными

$$(1-\alpha)x, \quad \alpha(1-\alpha)x, \quad \alpha^2(1-\alpha)x, \ldots, \alpha^m(1-\alpha)x, \ldots$$

---

[1] В этих вычислениях Ферма основывался на суммировании арифметических рядов высших порядков: $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, $3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = n(n+1)(n+2)$, $4\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, и т. д. (ср. стр. 85 и 153).

[2] Задачу о центрах тяжести Мерсенн поставил перед Декартом 28 апреля 1638 г. по предложению Ферма. Как видно, Декарт справился с ней очень быстро. Вот его результаты (для натуральных значений n): 1) площадь прямого сегмента параболы относится к площади вписанного треугольника с вершиной в вершине сегмента, как $2n : (n + 1)$; 2) центр тяжести в этом случае делит отрезок оси, считая от вершины, в отношении $(n + 1) : n$; 3) объем сегмента тела вращения относится к объему вписанного конуса, как $3n : (n + 2)$, и 4) центр тяжести делит в этом случае ось в отношении $(n + 2) : n$.

После того находится сумма площадей прямоугольников $y\Delta x$, также образующих бесконечную прогрессию

$$(1-\alpha)\,x^{\frac{p+q}{q}}+(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}+\ldots$$
$$\ldots+(1-\alpha)\,\alpha^{m\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}+\ldots=\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}\,x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Теперь знаменатель прогрессии абсцисс α берется столь близким к единице, чтобы можно было, как пишет Ферма, положить приближенно равными друг другу смешаннолинейные четырехугольники, на которые разбита квадрируемая площадь, и прямоугольники $y\Delta x$, имеющие с ними общие основания. Другими словами, производится второй предельный переход и искомая площадь определяется, как предел суммы $\sum y\Delta x$ при $\alpha\to 1$, причем наибольшее $\Delta x\to 0$. Для этого производится подстановка $\alpha=\beta^q$, так что

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}}=\frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}}=\frac{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{q-1}}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p+q-1}}$$

и при $\alpha\to 1$, $\beta\to 1$

$$\int_0^x x^{p/q}\,dx=\frac{q}{p+q}\,x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Сам Ферма провел выкладки при $n=1/2$ и $n=2/3$, но его рассуждения и окончательный вывод имели вполне общий характер. Он обогатил возрожденный им метод интегральных сумм новой техникой и впервые после Сабита ибн Корры (см. т. I, стр. 239) применил деление отрезка интегрирования на неравные части.

Такой же прием использовал Ферма для вычисления бесконечно простирающейся площади между какой-либо ординатой гиперболы $y=x^n$, где $n=-p/q$, причем $p>q$, самой кривой и асимптотой Ox; в этом случае он брал $\alpha>1$. Тем самым он вычислил значение сходящегося несобственного интеграла

$$\int_x^\infty x^{-p/q}\,dx=\frac{q}{p-q}\,x^{\frac{q-p}{p}}\qquad (p>q).$$

В случае $p<q$ площадь, прилегающая к Ox, бесконечна, но конечной оказывается площадь, примыкающая к асимптоте Oy, так что просто меняются ролями оси. Относительно случая $n=-1$, т. е. $y=1/x$, Ферма ограничивается замечанием, что при указанном делении оси абсцисс все части квадрируемой площади между собой равны. Но ему, без сомнения, было ясно, что площади простой гиперболы измеряются логарифмами,— факт, установленный ранее Григорием Сен Венсаном и Сарасой (см. стр. 133).

В том же сочинении Ферма применил и другие приемы интеграции: замену переменных и интегрирование по частям, позволявшие приводить новые квадратуры к уже известным. Его правило интегрирования по частям

$$\int_0^a y^n\,dx = n\int_0^b y^{n-1}x\,dy$$

имело еще частный характер; оно следует из того, что интегралы $\int_0^a z\,dx$ и $\int_0^b x\,dz$ выражают собой одну и ту же площадь между осями координат и монотонно убывающей кривой, пересекающей оси в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$. Зато этим правилом Ферма пользовался с замечательным искусством. Так, чтобы вычислить площадь между «локоном Аньези» $y = a^3/(a^2+x^2)$ (см. стр. 254), осью Oy и асимптотой Ox, подстановкой $ay = z^2$ интеграл $\int_0^\infty y\,dx$ преобразуется в $\frac{1}{a}\int_0^\infty z^2\,dx$, а этот интеграл сводится к $\frac{2}{a}\int_0^a xz\,dz$. Затем подстановка $xz = ta$ вместе с предыдущей и исходным уравнением кривой после исключения x, y дает $t^2 = a^2 - z^2$ и

$$\frac{2}{a}\int_0^a xz\,dz = 2\int_0^a t\,dz$$

выражается площадью полукруга радиуса a, так что несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{a^3dx}{a^2+x^2}$, который мы вычисляем теперь с помощью арктангенса, оказывается равным

$$\int_0^\infty \frac{a^3\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}a^2.$$

Ферма обнаружил еще целый класс интегралов, сводящихся к квадратуре круга, именно интегралов вида $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$, где n — нечетное число, и показал, как можно последовательно выражать данный интеграл через интегралы того же вида с заменой n на $(n-2)/2$ и низшие степени вплоть до $n = 1$ [1].

Свою технику интеграций Ферма применил также к декартову листу $x^3 + y^3 = axy$ (подстановка $a^2y = tx^2$), сведя дело к квадратуре двух гипербол: интеграл $\int y\,dx$ выражается через $\int tx^2\,dx$ и затем через $\int x^3\,dt$, где $x^3 = (a^5t - a^6)/t^3$.

[1] Так, в случае $n = 3$ Ферма полагает $a^2 - x^2 = y^2$ и интегрированием по частям и подстановкой $xy = at$ сводит $\int y^3\,dx$ к $\int xy^2\,dy$, $\int ty\,dy$ и $\int y^2\,dt$, а затем подстановкой $y^2 = az$ к $\int z\,dt$; так как $z^2 + t^2 = az$, то последний интеграл приводится к $\int\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2\right]^{1/2}dt$.

Если сравнить данный мемуар Ферма, в котором около двадцати страниц печатного текста, с огромным томом «Геометрии неделимых» Кавальери, то преимущество метода французского математика становится особенно разительным: более общие результаты он изложил в двадцать раз короче, ничего не теряя в удобопонятности. Правда, он полностью оставил в стороне проблему непрерывного и неделимых, но ее анализ не имел для математики XVII в. существенного значения.

Квадратуры Ферма свидетельствовали о решительных преимуществах вычислений с бесконечно малыми элементами фигур, имеющих с ними одну и ту же размерность, перед употреблением неделимых в той форме, какую он имел у Кавальери. Помимо тех безграничных возможностей, какие таило в себе применение алгебраической техники и вспомогательных средств вычислений, метод интегральных сумм был особенно удобен для различных аналитических преобразований, начиная с разбиения промежутка интегрирования и замены его аргумента. Кроме того, интегральные суммы были применимы к задачам, недоступным методу Кавальери, как спрямление кривых. Наконец, эти суммы сами по себе служили важным средством аппроксимации и связывали приближенные вычисления с интеграциями.

Циклоида и синусоида

Несмотря на преимущества метода интегральных сумм в общей математической стратегии и метод неделимых давал порой удивительные по изяществу решения задач, для которых в то время вычислительная техника оказалась бы недостаточной. Одним из наиболее показательных примеров может служить квадратура циклоиды.

Еще Николай Кузанский в середине XV в., наблюдая перемещение гвоздя, вбитого в колесо движущегося экипажа, задумался над природой описываемой им кривой. Галилей, назвавший кривую циклоидой (от греческого κύκλος — круг), пытался в конце XVI в. определить отношение площади одной ее арки к площади образующего круга путем взвешивания. Мерсенн поставил ту же задачу перед Робервалем, который дал в 1634 г. следующее ее решение. Допустим, что образующий круг радиуса r начинает катиться по прямой в момент, когда описывающая циклоиду точка находится в начале O этой прямой. Пусть в некоторый другой момент катящийся круг занимает положение, указанное на рис. 30, совершив оборот на угол φ, причем описывающая циклоиду OMB точка находится в M. Роберваль ввел в рассмотрение вспомогательную кривую, являющуюся местом проекции N точек M на вертикальный диаметр катящегося круга. Эту кривую ONB он назвал спутницей циклоиды. Спутница делит площадь прямоугольника, описанного около циклоиды, на две части, равные в силу симметрии спутницы относительно прямой, проведенной параллельно OB через центр круга. Циклоида и ее спутница ограничивают два равных лепестка, а площадь каждого из них равна площади полукруга, так как «все линии» лепестка MN представляют собой одновременно полухорды, составляющие полукруг. Поэтому площадь циклоиды равна половине площади описанного прямоугольника, сложенной с площадью образующего круга, т.е. $^1/_2\, 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2$, или утроенной площади образующего круга.

Вскоре затем, между 1635 и 1638 гг., Роберваль дал построение касательной к циклоиде (см. стр. 201) и между 1636 и 1647 гг. определил

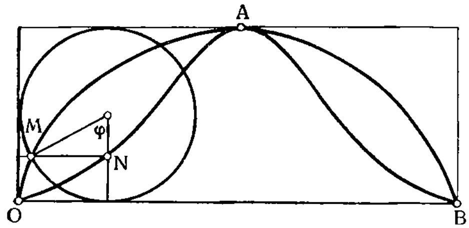


Рис. 30

объемы тел, порождаемых при вращении ее арки вокруг основания, вокруг касательной к вершине и вокруг перпендикуляра к основанию в его конце.

Благодаря Мерсенну часть этих результатов приобрела известность, и с конца 30-х годов XVII в. циклоида становится одной из наиболее популярных кривых, на которых математики особенно охотно испытывали силу своих методов. В соревновании друг с другом, но независимо квадратуру и построение касательной к кривой произвели в 1638 г. Декарт и Ферма; около 1640 г. к тем же результатам вновь пришел Торричелли, которого в проведении касательной несколько опередил его друг, ученик Галилея Винченцо Вивиани (1622—1703). Дело не обошлось и без споров о приоритете, которые мы полностью оставим в стороне. Позднее исследованием циклоиды успешно занимались Паскаль, Валлис и многие другие ученые, а Гюйгенс и И. Бернулли установили ее важные механические свойства. Ко всему этому нам придется еще вернуться. Пока мы отметим, что печатно впервые сообщил о квадратуре циклоиды и построении к ней касательной Торричелли в своих «Геометрических трудах» 1644 г., а до того вся информация распространялась лишь в форме переписки. Как и многие другие ученые, Роберваль совершенно не спешил с публикацией своих открытий, предпочитая поражать современников итоговыми результатами, чем давать им в руки средства решения трудных задач. Быть может, для такого поведения у него лично были особые основания. Согласно воле Петра Рамуса, основателя кафедры Французского коллежа, которую занимал Роберваль, ее профессор через каждые три года должен был сам объявлять конкурс на ее замещение, ставя публично несколько вопросов. Тот, кто побеждал в этом конкурсе, имел право занять кафедру. Именно в таком соревновании Роберваль занял этот пост впервые в 1634 г., и можно понять, что он остерегался разглашать свои методы. Так или иначе его сочинения, в том числе основной «Трактат о неделимых» (Traité des indivisibles), были впервые напечатаны в сборнике «Divers ouvrages de Mathématique et de Physique», изданном Парижской академией наук в 1693 г.

Введенная Робервалем спутница циклоиды есть не что иное, как синусоида, в чем легко убедиться, выразив координаты точки M в функции угла φ, приняв за координатные оси левую и нижнюю стороны прямоугольника. Линией синусов назвал эту кривую живший в Риме французский иезуит Онорэ Фабри (1607—1688), автор не лишенного интереса «Геометрического труда о линии синусов и циклоиде» (Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide. Romae, 1659), а также «Обзора геометрии» (Synopsis geometrica. Lugduni, 1669). Мы упоминаем сочинения этого ученого, потому что он вновь, независимо от Роберваля, получил некоторые его результаты, например, проинтегрировал

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin x\, dx = \cos x_1 - \cos x_2,$$

а в исследовании циклоиды пошел самостоятельным путем, отправляясь от другого ее определения: если представить себе образующий круг в центральном положении и от вертикального диаметра проводить отрезки параллельно основанию, то циклоида есть место концов таких отрезков, по длине равных сумме лежащей на них полухорды круга и верхней отсекаемой на окружности дуги (см. стр. 201). Это определение можно записать уравнением $x = r\psi + r \sin \psi$, где ψ — угол между вертикальным диаметром и радиусом, проведенным к другому концу названной дуги. С работой Фабри был знаком Лейбниц, впервые записавший уравнение циклоиды в виде

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int dx : \sqrt{2x - x^2}$$

в одной статье, опубликованной в 1686 г. (см. стр. 262).

Интеграции Б. Паскаля

Метод интегральных сумм получил дальнейшее развитие в трудах Б. Паскаля, написанных во второй половине 50-х годов. Хорошо знакомый с воззрениями и трудами как сторонников метода неделимых, так и его критиков — Кавальери, Роберваля, Гульдина, Таке и других, Паскаль не отказывался от терминов вроде «сумма линий», или «сумма ординат», или «сумма несконченого множества (une multitude indéfinie) линий»[1], но всегда понимал под ними интегральные суммы. С его точки зрения, метод неделимых по существу тождествен методу древних, отличаясь лишь манерой выражаться; поэтому, говорил он, можно без опасения пользоваться «языком неделимых». В сборнике работ «Письма А. Деттонвиля о некоторых его геометрических открытиях» (Lettres de A. Dettonville sur quelques-unes de ses inventions en géométrie. Paris, 1659)[2] последовательно проводится эта концепция, причем подчеркивается необходимость явно указывать, на какие равные и неограниченно малые (indéfinies) «части» прямой или кривой умножаются линии, если только выбор «частей» не является в данной задаче «естественным». При неограниченно большом (indéfini) числе членов такая сумма отличается от искомой величины — площади, объема, статического момента и т. д. — «лишь на величину, меньшую любой данной»[3], т. е. оказывается ей равной.

Быть может, наибольшее значение для последующего развития анализа получила одна лемма в «Трактате о синусах четверти круга» (Traité des sinus du quart de cercle), вошедшем в упомянутый сборник. Для произвольной точки D на окружности радиуса r строится треугольник EKE,

[1] *B. Pascal.* Oeuvres complètes, v. II. Paris, 1858, p. 544.
[2] А. Деттонвиль — один из псевдонимов Паскаля.
[3] *B. Pascal.* Oeuvres complètes, v. II, p. 544.

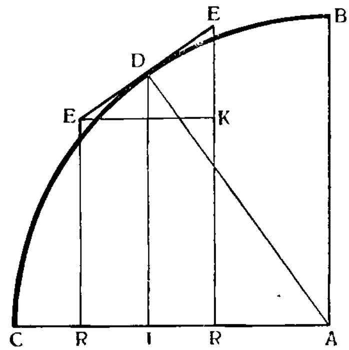


Рис. 31

где EE — отрезок касательной и DI — линия синуса (рис. 31). Этот треугольник подобен треугольнику ADI, и стороны его остаются в постоянном отношении, сколь бы малыми их ни брать. Поэтому $DI \cdot EE = AD \cdot KE = AD \cdot RR$. Если теперь какую-либо дугу окружности разделить на равные сколь угодно малые части DD и просуммировать обе части предыдущего равенства, заменяя отрезки касательных EE «равными» им дугами DD, то получается теорема: сумма синусов DI, умноженных на дугу DD, равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус.

В наших символах $BD = s$, $DI = y$, $AI = x$ результаты Паскаля можно записать следующим образом:

$$y\,ds = r\,dx \text{ и } \int_0^s y\,ds = \int_0^x r\,dx,$$

что дает сразу два интеграла:

$$\int_0^\varphi \sin\varphi\,d\varphi = 1 - \cos\varphi \text{ и } \int_0^\psi \cos\psi\,d\psi = \sin\psi,$$

где φ — угол DAI, и ψ — угол DAB. Заметим, что yds представляет собой момент дуги окружности относительно оси AC и это позволяет найти центр тяжести дуги. Далее, при вращении окружности вокруг оси AC на $90°$ отрезок ds описывает элемент $^1/_2\,\pi y\,ds$ поверхности $^1/_8$ шара, которая сразу получается равной $^1/_2\,\pi r^2$. Впрочем, такие выводы не были бы в то время новыми и Паскаль на них не останавливается.

Мы не можем задерживаться на других специальных результатах Паскаля, бóльшая часть которых относится к квадратуре, кубатуре и отысканию центров тяжести фигур, связанных с циклоидой, а также цилиндрических копыт. Средствами служат интегрирование или преобразование интегралов степеней синуса и некоторых частных случаев функций вида $(1-x^2)^{m/2}x^n$; в этих целях употребляются замена переменных и интегрирование по частям, (в более общем виде, чем у Ферма). Выдвижение на первый план общих приемов и ясность языка принадлежали к важным достоинствам небольших по объему работ Паскаля. Однако Паскаль совершенно не пользовался символикой новой алгебры. Здесь, быть может, играли роль и чисто личные соображения: его друзья Роберваль и Ферма были в плохих отношениях с Декартом.

«Трактат о синусах четверти круга» оказал значительное влияние на творчество Лейбница, который познакомился с ним по совету Гюйгенса в 1673 г. Бесконечно малый треугольник *EKE* со сторонами dx, dy, ds привлек особое внимание Лейбница, назвавшего его «характеристическим». Здесь, по словам Лейбница, он усмотрел идею, которой не было у автора. Прежде всего он увидел, что с помощью такого треугольника, взятого для произвольной плоской кривой. можно вычислять площади любых поверхностей вращения, используя его подобие с треугольником, образованным ординатой, поднормалью и нормалью, т. е. выражая $2\pi\int y\,ds$ интегралом $2\pi\int n\,dx$, где n — отрезок нормали. Когда Лейбниц сообщил о своем наблюдении Гюйгенсу, тот ответил, что и сам некогда произвел таким образом компланацию параболоида, эллипсоида и гиперболоида вращения, а заодно дал ему второй совет: использовать в этих целях алгебраические уравнения конических сечений. Так Лейбниц смог впервые оценить пользу синтеза декартова алгебраического метода с интеграционными приемами, мимо чего прошел Паскаль (ср. стр. 253).

Характеристическим треугольником математики пользовались иногда и ранее как в дифференциальных, так и в интеграционных задачах; но у Паскаля его применение выступило особенно отчетливо, к тому же в печатном труде. Подобие этого треугольника с конечными (кроме названного, особенно с треугольником, образуемым подкасательной, ординатой и отрезком касательной) стало с середины XVII в. распространенным средством многих ученых. Здесь мы хотели оттенить историческую роль, которая пришлась на долю характеристического треугольника Паскаля.

Спрямления и компланации

Метод интегральных сумм принес богатые плоды и в задачах на спрямление кривых и компланацию поверхностей. Декарт в «Геометрии» высказал мнение, что алгебраическое спрямление алгебраических линий невозможно. Это утверждение было опровергнуто лишь через двадцать лет. Но уже через год он сам спрямил, правда не алгебраическую, а трансцендентную, кривую — логарифмическую спираль, длина дуги которой, считая от полюса, пропорциональна радиус-вектору конца дуги — свойство, которое знал и Торричелли (см. стр. 179).

Несколько спустя проблема спрямления кривых встала в порядок дня. Так как общего понятия об интеграле еще не было, ее сводили к квадратурам, а кроме того, занимались поисками зависимостей между длинами дуг различных кривых. В сущности здесь пользовались характеристическим треугольником, заменяя бесконечно малую дугу кривой ее хордой или отрезком касательной, что давало $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ в декартовых координатах и $ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi}$ в полярных. Из первых по времени результатов упомянем, что в 1643 г. Роберваль доказал равенство длин дуг (при подходящем выборе параметров) спирали Архимеда и параболы, а Ферма и Торричелли сделали то же самое для спиралей $\rho^n = k\varphi^m$ и соответствующих парабол высших порядков. Напомним, что такая же взаимосвязь была обнаружена между квадратурами этих кривых — для простейшего случая спирали Архимеда и обычной параболы — Кавальери. Помимо того, Ферма представил дугу параболы $y^2 = 2px$ площадью между гиперболой $x^2 - y^2 = p^2$, осью ординат и двумя абсциссами. В самом деле, эти дуга и площадь могут быть выражены одним интегралом $\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y^2 + p^2}\,dy$. Такое сведение спрямления к квадратуре известной кривой было равносильно нашему выражению искомой величины в логарифмической и иррациональной функциях. Это же спрямление произвел и Гюйгенс.

В печати на возможность сколь угодно точного приближения дуги кривой при помощи вписанных и описанных ломаных указал Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656). Длины кривых и прямых линий, согласно Валлису, могут оказаться соизмеримыми или просто равными. Однако ни одного конкретного спрямления с помощью намеченного им приема он не произвел.

Возможность алгебраического спрямления алгебраических кривых была доказана независимо друг от друга четырьмя математиками на примере полукубической параболы $ay^2 = x^3$, дуга которой выражается квадратурой обыкновенной параболы

$$y = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2 + 9ax}.$$

В 1657 г. это удалось оксфордскому студенту Вильяму Нейлю (1637—1670), а вскоре — ученику Схоотена Хендрику Хёйрату (1633—1660), небольшая статья которого была в 1659 г. напечатана во втором латинском издании декартовой «Геометрии». Затем задача была решена Ферма и Гюйгенсом. Почти одновременно было произведено спрямление циклоиды — прежде всего (1658) Кристофером Реном (1632—1723), который, подобно Нейлю, был воспитанником Оксфордского университета, затем ряд лет состоял профессором астрономии в Лондоне и Оксфорде, участвовал в организации Королевского общества, но особенно прославился, как выдающийся архитектор и один из строителей лондонского собора св. Петра. Открытия Нейля и Рена опубликованы в «Двух трактатах о циклоиде и циссоиде» (Tractatus duo de cycloide et de cissoide. Oxoniae, 1659) Валлиса.

После того как был найден прием спрямления кривых, сведены были к квадратурам и вычисления площадей поверхностей для случая тел вращения. Мы уже упоминали о компланациях поверхностей второго порядка, произведенных Гюйгенсом, который в 1657 г. установил, например, что площадь поверхности параболоида вращения выражается алгебраической квадратурой, а эллипсоида — квадратурой круга и гиперболы, т. е. круговой и логарифмической функциями. Эти открытия Гюйгенса быстро распространились благодаря переписке, но опубликованы были, притом без доказательства, лишь в «Маятниковых часах», изданных в 1673 г. В этом же сочинении Гюйгенс указал один частный способ спрямления, вытекающий из свойств эволют (см. стр. 209).

Задача о касательных

Развитие механики и астрономии в XVI—XVII вв. выдвинуло на передний план прежде всего задачи интегрального исчисления, такие, как определение центров тяжести, вычисление пути и траектории по данному закону скорости, определение давления на стену плотины и т. п. Задачи на касательные и экстремумы вначале привлекали меньшее внимание. В античном наследии также можно было найти большее разнообразие интеграционных задач и приемов, чем дифференциальных, хотя еще Виет, изучая спираль Архимеда, рассматривал и свойства ее касательной. Лишь отдельные задачи такого рода всплывали то у одного, то у другого автора, например у Тартальи (вопрос об угле наклона, обеспечивающем наибольшую дальность полета снаряда) и Кеплера (задача о наибольшем по объему параллелепипеде, вписанном в данный шар). Такое положение дел быстро изменяется уже во второй четверти XVII в. С этого времени проблемы дифференциального исчисления разрабатываются с таким же усердием и успехом, как и интеграционные. В их исследовании сочетались приемы алгебраические и инфинитезимальные, чисто математические и механические.

Кинематический подход немало способствовал установлению взаимосвязи между проведением касательных, нахождением скоростей и операцией дифференцирования. Отметим один особенно характерный момент: при таком подходе, естественно, возникло представление, что движение точки, описывающей кривую линию, в каждый момент направлено по касательной к ней. На этом основывалось принципиально новое толкование касательной. Для древних касательная была прямой, встречающейся с данной кривой в одной точке. Теперь касательная выступает в сущности как предельное положение секущей, проходящей через две бесконечно большие точки описываемой траектории. Такая кинематическая трактовка позволяла рассматривать касательную как диагональ подвижного параллелограмма, вершина которого лежит в точке касания, а стороны суть подходящим образом выбранные составляющие мгновенной скорости движения или же действующей на движущуюся точку силы. Кинематическая концепция касательной, выросшая на почве новой механики и особенно учения о движении Галилея, получила в XVII в. чрезвычайно широкое распространение. В тех или иных вариантах, отличающихся лишь в форме выражения, мы находим ее у Декарта, Роберваля, Торричелли, Дж. Грегори, Барроу и Ньютона, а Роберваль и Торричелли подробно разработали метод построения касательной с помощью параллелограмма скоростей или сил (см. стр. 200). Следует добавить, что в ходе исследований было заодно раскрыто общее содержание задач на построение касательной и на нахождение наибольших и наименьших значений. Впрочем, связь между двумя последними проблемами была установлена еще Архимедом (см. т. I, стр. 128), и некоторые ученые XVII в., как Торричелли и его ученик Микеланджело Риччи (1619—1682), возродили метод великого грека.

Алгебраический метод нормалей Декарта

Первым по времени опубликования приемом проведения касательных и нормалей явился метод Декарта, которым он владел уже в 1629 г. Задаче построения нормалей и, следовательно, касательных Декарт придавал исключительно важное значение; приступая к ней в «Геометрии» (1637), он писал: «Для разыскания всех свойств кривых достаточно знать отношение всех их точек к точкам прямых и способ проведения других линий, пересекающих кривые во всех этих точках под прямыми углами» [1].

[1] *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 49.

К проблеме нормалей Декарта привели поиски оптических линз, преломляющих или отражающих все лучи, выходящие из одной данной точки в другую данную точку. Дело сводилось к отысканию кривой, для которой синусы углов, образуемых нормалью с радиус-векторами, соединяющими точки кривой с источником света и с точкой схода преломленных лучей, имеют данное отношение. Получив решение этой обратной задачи на касательные, по-видимому, с помощью инфинитезимальных рассуждений, Декарт затем доказал свойство найденных им при этом овалов (которые являются кривыми четвертого порядка) алгебраически с помощью изобретенного им алгебраического же метода построения нормалей и касательных. Его метод, предполагающий понятие о кратных корнях уравнений и опирающийся на другое капитальное открытие Декарта — метод неопределенных коэффициентов, таков. Чтобы построить нормаль в точке $M(a, b)$ алгебраической кривой $f(x, y) = 0$,— Декарта интересовало именно построение нормали, а не вывод ее уравнения,— ищется точка пересечения $N(c, 0)$ нормали с осью абсцисс. Если NM есть нормаль, то окружность с центром в точке N и радиусом NM касается данной кривой в точке M; если же центр окружности будет хоть несколько смещен из N в другую точку оси абсцисс N', то окружность радиуса $N'M$ встретится с данной кривой в соседстве с M по крайней мере еще в одной точке. Таким образом, искомая окружность должна иметь с данной кривой две или более общих точки, слившихся в одну. Координаты точек пересечения кривой $f(x, y) = 0$ и окружности $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ находятся совместным решением их уравнений, для чего исключается одна из координат. При совпадении точек пересечения в M корень $x = a$ (или $y = b$) результирующего уравнения должен быть по крайней мере двойным, а это накладывает на искомую величину c определяющее ее условие.

Для нахождения значения c Декарт применяет метод неопределенных коэффициентов, основанный на том, что при тождестве двух целых алгебраических многочленов тождественны их коэффициенты в членах одинаковой степени.

Примем для определенности, что исключается y и что результирующее уравнение $F(x) = 0$ имеет степень n. Поскольку корень $x = a$ двойной или высшей кратности, левая часть $F(x)$ содержит множитель $(x - a)^2$. Декарт представляет ту же левую часть в виде произведения $(x - a)^2$ на многочлен $(n - 2)$-й степени с неопределенными коэффициентами α_i и, приравнивая в тождестве

$$F(x) \equiv (x - a)^2 \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i x^i$$

коэффициенты членов одинаковой степени, получает уравнения для вычисления коэффициентов α_i и искомого значения c. Отметим еще раз, как полезна была регулярная запись алгебраических уравнений, которой постоянно придерживался Декарт.

Свой алгебраический метод Декарт пояснил в «Геометрии» на нескольких примерах — эллипса, заданного уравнением относительно вершины, трезубца Ньютона, овалов и, наконец, конхоиды. В последнем случае он не привел расчетов, и этот пробел восполнил в комментариях к латинскому изданию «Геометрии» Схоотен. Мы приведем для иллюстрации чрезвычайно простой пример, также рассмотренный Схоотеном. Требуется построить нормаль к параболе $y^2 = kx$ в точке $M(a, b)$. Исключая из уравнений параболы и окружности $(x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + b^2$ координату y, имеем

$$(x - c)^2 + kx - (a - c)^2 - b^2 = 0,$$

и, поскольку левая часть уравнения должна быть тождественной с $(x - a)^2$,

$$c = a + \frac{k}{2}, \quad \text{или} \quad c - a = \frac{k}{2}.$$

Последнее равенство выражает известное свойство параболы $y^2 = kx$: ее поднормаль постоянна.

Метод неопределенных коэффициентов Декарта впоследствии приобрел бóльшую ценность, чем алгебраический метод нормалей, применение которого в системе прямолинейных координат ограничивалось алгебраическими кривыми и, кроме того, требовало громоздких вычислений [1]. Впрочем, одно упрощение почти бросалось в глаза: прием Декарта удобнее применять не к нормалям, а к касательным, находя условие совпадения двух точек пересечения данной кривой и прямой, уравнение которой только первой степени. Это указал сам Декарт в одном из писем 1638 г., и это же подробно разъяснил в комментариях к латинскому изданию «Геометрии» Схоотен, применивший такой упрощенный прием к построению касательной в точке перегиба конхоиды. Решение этой задачи опубликовал без доказательства в 1654 г. Гюйгенс. Схоотен обосновал построение Гюйгенса, основываясь на том, что в точке перегиба сливаются в одну три точки пересечения кривой и секущей прямой, так что соответствующее результирующее уравнение должно иметь тройной корень. Заметим, что алгебраический способ отыскания касательных иногда излагается и в современных учебниках, например, когда хотят вывести уравнения касательных к коническим сечениям без средств дифференциального исчисления.

Выше, во второй главе, говорилось, что И. Гудде, побуждаемый исследованиями Декарта, разработал метод отыскания кратных корней алгебраического уравнения. Этот метод чисто алгебраического характера, и его приложения изложены в «Двух письмах, из которых в одном идет речь о приведении уравнений, а в другом о максимумах и минимумах» (Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit), адресованных Гудде Схоотену в 1657—1658 гг. и помещенных во втором латинском издании «Геометрии». По существу кратные корни уравнения $f(x) = 0$ находятся как общие корни уравнений $f(x) = 0$ и $f'(x) = 0$; очевидно, что, исходя из этого, можно находить корни любой кратности. Впрочем Гудде пришел к своему результату из алгебраических соображений и не производил дифференцирования функции $f(x)$, а кроме того, высказал свое правило в несколько иной и более общей форме. Именно, согласно Гудде, кратный корень уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

[1] Декарт хорошо понимал широкое значение метода неопределенных коэффициентов и ожидал от него важных новых приложений. Заканчивая решение задач на нормали, он обращается к читателю: «Мне все же хочется попутно сообщить вам, что идея введения двух одинакового вида уравнений с целью сравнить все члены одного с соответствующими членами другого и таким образом породить несколько уравнений из одного ... может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и является не из последних в применяемом мною методе» (*Р. Декарт.* Геометрия, стр. 58).

является также корнем уравнения

$$ax^n + (a + b)\, a_1 x^{n-1} + (a + 2b)\, a_2 x^{n-2} + \ldots + (a + nb)\, a_n = 0,$$

где a и b можно брать произвольно, сообразуясь с удобством вычислений. В частности, Гудде брал и $a = n$, $b = -1$, тогда второе уравнение после сокращения на x совпадает с $f'(x) = 0$. Что прием Гудде по существу совпадает с общепринятым теперь, легко увидеть, записав его второе уравнение в виде

$$af(x) + b\,[nf(x) - xf'(x)] = 0.$$

Доказательство Гудде провел на примере уравнения пятой степени. Свой метод отыскания кратных корней Гудде применил к построению касательных и нормалей, показав на примерах Декарта, что при этом величина, несколько выше обозначенная c, находится проще, чем по способу неопределенных коэффициентов, а также к определению экстремумов. В последнем случае формальный прием Гудде, приводимый им без объяснений, фактически состоит в применении уравнения $f'(x) = 0$.

Метод экстремумов и касательных Ферма

Около 1629 г., примерно в одно время с тем, как Декарт открыл алгебраический метод нормалей, Ферма изобрел другой прием, пригодный для нахождения как экстремумов, так и нормалей. Вскоре после выхода «Геометрии» Ферма прислал через Мерсенна Декарту и Робервалю небольшое сочинение «Метод отыскания максимумов и минимумов» (Methodus ad disquirendam maximam et minimam), где изложил этот прием, которому предстояло войти важной составной частью в анализ бесконечно малых [1].

Сначала Ферма формулирует общее правило экстремумов для целого алгебраического многочлена $f(x)$, которое мы передадим в современных обозначениях, ни в чем не отступая от Ферма по существу. Составляется выражение $f(x + h)$, и оно приближенно приравнивается $f(x)$. Здесь и в других аналогичных случаях, например при квадратуре парабол и гипербол (см. стр. 185), Ферма применял слово «приравнивание» (adaequatio) со ссылкой на Диофанта, у которого соответствующий греческий термин означал именно приближенное равенство. Затем в приближенном равенстве $f(x + h) \approx f(x)$ сокращаются равные члены, производится сокращение на возможно высшую степень h и, наконец, опускаются члены, еще содержащие после сокращения множитель h. Решение возникшего уравнения дает значения x, которые могут сообщить $f(x)$ максимальное или минимальное значение.

Правило Ферма, очевидно, совпадает с нашим необходимым условием экстремума дифференцируемой функции $f(x)$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = 0.$$

---

[1] Этот мемуар был напечатан только в собрании сочинений Ферма 1679 г. По предложению Мерсенна краткие сведения о методе Ферма включил Эригон (1644) во второе издание своего «Курса математики», а Схоотен дал с помощью этого метода еще одно построение нормали к конхоиде (ср. стр. 194).

Многие преемники Ферма полагали, что он трактовал величину h как бесконечно малую в том не вполне определенном смысле, какой этому слову нередко придавали в XVII в. На самом деле и здесь, и в других случаях Ферма оперировал бесконечно малыми, не употребляя этого термина, точно так, как это делалось в доказательствах по методу исчерпывания и как поступаем мы. Другими словами, он оперировал конечными переменными величинами, значения которых могут быть взяты меньшими любой данной величины. Он только не производил ε, δ-оценок. Это видно из обоснования метода экстремумов, предложенного Ферма в одном письме 1643 г.,— в рассматриваемом сочинении правило дано было без доказательства [1]. Мысль Ферма, поясняемая на примере целого многочлена $f(x)$, заключалась в следующем. Если $f(x)$ имеет значение максимума при $x = a$, то для всех достаточно малых $h > 0$ одновременно $f(a+h) < f(a)$ и $f(a-h) < f(a)$, или, что то же,

$$f(a+h) - f(a) = f_1(a)\,h + f_2(a)\,h^2 + f_3(a)\,h^3 + \ldots < 0,$$

$$f(a-h) - f(a) = -f_1(a)\,h + f_2(a)\,h^2 - f_3(a)\,h^3 + \ldots < 0.$$

Так как при достаточно малом h и $f_1(a) \neq 0$ знак левой части совпадает со знаком первого члена, то для одновременного выполнения обоих неравенств необходимо выполнение равенства $f_1(a) = 0$. В предположении $f_2(a) \neq 0$ из аналогичных соображений следует, что при $f_2(a) < 0$ максимум действительно имеет место. Точно так же выясняется, что при $f_1(a) = 0$ и $f_2(a) > 0$ имеет место минимум. Как видно, Ферма располагал и простейшим дифференциальным достаточным условием максимума и минимума, хотя в сочинениях своих его не опубликовал. Остается добавить, что изложенный вывод Ферма в главных чертах совпадает с тем, который был предложен Эйлером (1755) для любых аналитических функций с помощью разложения в ряд Тейлора. Этот же вывод употребляется в наших руководствах с тем усовершенствованием, что в формуле Тейлора учитывается остаточный член.

Для целых неявных многочленов $f(x, y) = 0$ Ферма находил экстремумы, присоединяя к данному уравнению еще уравнение

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

В случае иррациональных функций ему приходилось предварительно приводить уравнение к рациональному виду.

Приведя простой пример задачи на максимум, Ферма далее писал: «Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу» [2]. Здесь он не дает общего правила, но только пример построения касательной TM в точке M параболы $x : y^2 = \mathrm{const}$ путем отыскания отрезка подкасательной TX (рис. 32). Явного определения понятия касательной здесь нет; фактически имеется в виду, что дуга кривой в некоторой окрестности ее общей точки с касательной лежит по одну ее сторону. Если слева от ординаты точки M провести ординату другой точки параболы M', то свойство параболы, по-

[1] Это письмо было опубликовано только в XX в. См. Oeuvres de Fermat, supplément aux t. I—IV publié par C. de Waard. Paris, 1922, p. 123—125.
[2] См. *Р. Декарт*. Геометрия, стр. 155.

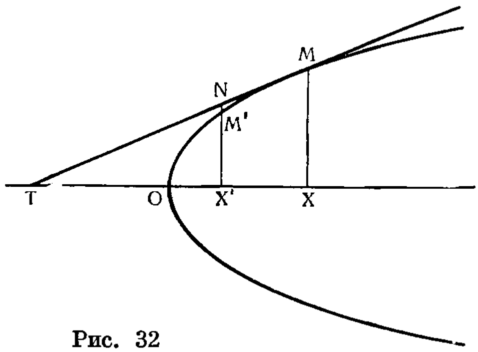


Рис. 32

добие треугольников TXM и $TX'N$, а также неравенство $X'M' < X'N$ дают

$$\frac{OX}{OX'} = \frac{XM^2}{X'M'^2} > \frac{XM^2}{X'N^2} = \frac{TX^2}{TX'^2}.$$

Отсюда при обозначениях $OX = x$, $OX' = x - h$, $TX = t$, $TX' = t - h$ следует $\frac{x}{x-h} > \frac{t^2}{(t-h)^2}$ или $t^2h + xh^2 > 2txh$. Теперь Ферма производит приравнивание, т. е. заменяет неравенство равенством, сокращает на h и затем опускает член xh. В итоге он получает, что подкасательная

$$t = 2x,$$

добавляя: «Как оно и есть на самом деле» [1].

Объяснения своего приема Ферма не привел, а его слова о том, что касательные находятся по тому же методу, что и максимумы или минимумы, были слишком буквально и потому не вполне точно поняты Декартом. Это повлекло за собой продолжавшуюся около полугода переписку, в которую были вовлечены также Роберваль и другие математики,— переписку, полную резких и часто несправедливых обвинений, но вместе с тем важных новых мыслей. Из писем Ферма ясно, как он обосновывал метод приравнивания, равносильный дифференцированию и в данном случае. По идее это обоснование, так же как в задаче об экстремумах, опирается на оценку величины подкасательной с помощью точных неравенств. Сам Ферма в письме от июня 1638 г. писал, что его доказательство «имеет своим главным основанием то, что $A + E$ (наше $x + h$.— *Ред.*) дает то же, что $A - E$ (наше $x - h$.— *Ред.*)» [2]. Действительно, если взять точку M' справа от M, то к неравенству $t^2h + xh^2 > 2txh$ добавится неравенство $t^2h < 2txh + xh^2$, так что

$$2x - \frac{xh}{t} < t < 2x + \frac{xh}{t},$$

откуда и следует в виду произвольной малости h, что $t = 2x$.

В приложении к цитированному письму Ферма дал и общее правило касательных, заключающееся в «приравнивании» ординаты касательной

[1] *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 157.
[2] Там же, стр. 171.

$X'N$ и ординаты кривой $X'M'$ в соседстве с точкой касания. Если обозначить $XM = y$, $X'M' = y - \Delta y$ и $h = \Delta x$, то приближенное равенство

$$X'N = XM \frac{TX'}{TX} \approx X'M' \quad \text{или} \quad y \frac{t - \Delta x}{t} \approx y - \Delta y$$

в результате приравнивания перейдет в точное:

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{y}, \quad \text{или} \quad t = y : \frac{dy}{dx}.$$

Здесь же на примере декартова листа $x^3 + y^3 = axy$ Ферма показал, как находить касательные в случае неявного уравнения кривой $f(x, y) = 0$; в этом случае его вычисления, равносильные составлению уравнения

$$t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0,$$

не требовали предварительного решения уравнения. При наличии в уравнении иррациональностей требовалось, как и в задаче на экстремумы, сначала избавиться от них.

Декарт, со своей стороны, в ходе переписки подошел к пониманию касательной как предельного положения секущей, проходящей через две точки кривой с ординатами $X'M'$ и XM (см. рис. 32), которые относятся, как $m : n$, когда XM становится равной $X'M'$, а отношение $m : n$ — отношением равенства $m : n = 1$.

Однако такая трактовка не легла у Декарта в основу нового определения касательной, а служила только для объяснения применяемого в методе Ферма отбрасывания членов: ведь при $m = n$ величина, обозначенная выше h, «равна ничему» [1]. Придерживаясь прежнего понимания касательной, Декарт считал, что не может существовать касательная прямая к кривой в точке перегиба. Ферма, внимание которого к этому вопросу привлек в 1636 г. Роберваль в связи с изучением конхоиды, встал на более широкую точку зрения (хотя и не сформулировал нового определения касательной), а главное дал общий аналитический прием отыскания точек перегиба. Рассматривая положение касательной относительно кривой, он установил, что в этих точках угол касательной с осью абсцисс принимает экстремальное значение. Поскольку тангенс этого угла α есть отношение ординаты к подкасательной $\operatorname{tg} \alpha = y/t = y'$, он выражается в функции абсциссы, и соответствующие выкладки равносильны образованию уравнения $y'' = 0$. Выше было сказано, что Схоотен в комментариях к «Геометрии» находил точки перегиба как такие, в которых сливаются три точки пересечения кривой с некоторой прямой. Отысканием точек перегиба занимались и другие ученые, например Хёйрат, Гудде и Гюйгенс.

---

[1] См. письмо Декарта от июня 1638 г., адресованное французскому судебному чиновнику и любителю математики Клоду Арди (ум. 1678) в книге: *Р. Декарт.* Геометрия, стр. 181.

Кинематический метод касательных

Мы упоминали, что одновременно разрабатывались и кинематические приемы построения касательных. Правда, эти приемы не могли долго конкурировать с несравненно более единообразными аналитическими методами и требовали более индивидуального подхода к отдельным кривым; кроме того, их недостаточно осторожное применение легко могло привести к ошибочным результатам. Но, с другой стороны, эти приемы иногда вели к чрезвычайно простым и изящным конструкциям и содержали в начальной форме идеи интересных теорий. Роберваль и Торричелли придали этим приемам некоторую общность, причем в печати первым выступил Торричелли, пришедший к своему методу несколько позднее, чем Роберваль, хотя и совершенно независимо. В сочинении «О движении естественно падающих и брошенных тел» (De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum), подготовленном в 1641 г. и опубликованном в собрании его трудов 1644[1], Торричелли построил таким образом касательную к параболе $x^2 = 2py$. Касательная выступает как диагональ параллелограмма, вершина которого находится в точке касания, а стороны пропорциональны вертикальной и горизонтальной скоростям брошенного тяжелого тела, движущегося по параболе. Отношение названных скоростей или импульсов Торричелли заимствовал из «Бесед» Галилея. Если записать уравнение движения в параметрической форме $x = v_0 t$, $y = gt^2/2$, так что $y = gx^2/2v_0^2$, то отношение $v_y : v_x = gt : v_0 = gx : v_0^2 = 2y/x$ и, следовательно, отрезок подкасательной на оси ординат равен $2y$. Здесь же поясняется, как доказать, что касательная к коническому сечению есть биссектриса угла между направлениями радиус-векторов; для этого рассматриваются компоненты скорости по радиус-векторам (в случае параболы вместо одного из них следует взять прямую, проходящую через точку касания параллельно оси). О построении касательных к высшим параболам, гиперболам и спиралям (1646—1647) мы уже упоминали.

Заметим, что в той же работе Торричелли нашел огибающую семейства параболических траекторий тел, бросаемых под различными углами из данной точки с данной начальной скоростью,— так называемую параболу безопасности. Точнее говоря, он нашел соответствующий параболоид вращения, имеющий фокус в точке бросания. Все точки пространства между поверхностью параболоида и плоскостью горизонта доступны попаданию при данной начальной скорости, точки же вне параболоида недоступны. Это был первый пример огибающей семейства кривых. Общая теория огибающих восходит, однако, лишь к Лейбницу.

Метод касательных Роберваля в принципе сходен с только что указанным. Французский математик с его помощью решил эту задачу для конических сечений, конхоиды, квадратрисы, циклоиды и т. д. Этими результатами он располагал еще в конце 30-х годов, но в письменном виде он их представил Парижской академии только в 1668 г. в сочинении «Замечания о сложении движений и о способах находить касательные кривых линий» (Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes). Этот мемуар был опубликован с дру-

---

[1] Именно в этом сочинении изложены открытые Торричелли законы истечения жидкости из отверстия в боковой стене сосуда — параболическая форма струи вытекающей жидкости и др.

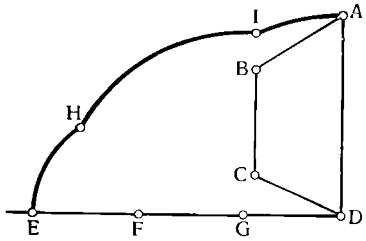


Рис. 33

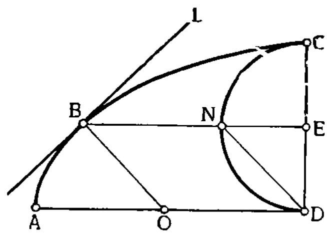


Рис. 34

гими его сочинениями в 1693 г. В случае циклоиды рассуждение Роберваля было таково. Точка M, описывающая циклоиду, участвует в двух движениях (см. рис. 30). Одно направлено по касательной к образующему кругу, проходящему через M, а другое по прямой MN, параллельной основанию циклоиды. Так как скорости обоих движений одинаковы, ибо основание циклоиды равно длине окружности образующего круга, то касательная в M является биссектрисой угла между касательной к кругу в M и прямой MN.

Столь же красиво построение нормали к циклоиде, данное вскоре после Роберваля, но совершенно независимо Декартом в письме к Мерсенну от 23 августа 1638 г. Если по прямой ED катится многоугольник $ABCD$, то его точка A описывает дуги окружностей EH, HI, IA с центрами соответственно в F, G, D (рис. 33), а нормали к этим дугам проходят всякий раз через центры F, G, D. Рассматривая образующий круг как многоугольник с бесконечным количеством сторон, Декарт заключает, что нормаль к циклоиде BO в точке B всегда проходит через нижнюю точку O образующего круга в положении, соответствующем B (рис. 34). Таким образом, нормаль BO параллельна отрезку ND, проходящему через нижнюю точку образующего круга в его центральном положении, а прямая BL, перпендикулярная к BO, есть касательная. Такое решение, как указал Декарт, можно распространить и на другие «рулетты», т. е. кривые качения. Сам он это сделал для укороченной и удлиненной циклоиды, а для первой нашел еще точку перегиба. В зародыше решение Декарта содержало учение о мгновенных центрах вращения.

Ферма нашел подкасательную циклоиды с помощью своего общего приема, используя в качестве «уравнения» циклоиды соотношение $BE = \smile{NE} + NB$, о котором говорилось ранее в связи с работами Фабри (см. стр. 189). Касательные ко всем трем видам циклоид построил и Торричелли.

Формализация метода Ферма

В конце 50-х годов был сделан новый шаг вперед в подготовке исчисления бесконечно малых: аналитические правила касательных и экстремумов были высказаны в более формализованном виде. Конечно, общие словесные указания Ферма и его выкладки в отдельных задачах были равносильны дифференцированиям, но теперь идет речь о механических процедурах, равносильных правилам дифференцирования, только высказанных без специфической терминологии и символики дифференциального исчисления. Такие алгоритмы нам уже встречались; к ним относится, скажем, прием отыскания кратных корней алгебраических уравнений Гудде путем составления производного уравнения [1].

С аналогичной формализацией мы встречаемся у бельгийского любителя математики Рене Франсуа де Слюза (1622—1685), который в молодости провел несколько лет в Италии, где сдружился с Риччи, а затем состоял священником в Льеже. Слюз сообщил правило, как вычислять выражение подкасательной для любой кривой с уравнением

$$\sum a_{mn}x^m y^n = 0,$$

— нужно, именно, записать уравнение

$$t\sum m a_{mn}x^{m-1}y^n + y\sum n a_{mn}x^m y^{n-1} = 0$$

(это частный случай равенства

$$t\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

см. стр. 199), после чего t находится делением. Если учесть,— Слюз рассуждал, по-видимому, сходным образом,— что

$$\lim_{x_1\to x}\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{t}{y},$$

то правило получается, если для двух точек кривой (x, y), (x_1, y_1) составить разность

$$\sum a_{mn}x_1^m y_1^n - \sum a_{mn}x^m y^n = \sum a_{mn}x^m (y_1^n - y^n) + \sum a_{mn}y_1^n (x_1^m - x^m) = 0$$

и, поделив на $y_1 - y$, перейти к пределу при $x_1 \to x$, $y_1 \to y$. Экстремум такой функции де Слюз находил, исходя из того, что касательная в нем параллельна оси абсцисс, так что $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Два письма де Слюза Ольденбургу были напечатаны в «Philosophical Transactions» за 1672—1673 гг., и в 1674 г. он был избран членом Королевского общества. Правила де Слюза, найденные им около 1655 г., с 1673 г. применял Лейбниц. Грегори и Ньютон пришли к тому же результату самостоятельно, последний не позднее 1665 г.

Отправляясь от метода Ферма, к сходным формальным процедурам пришел также Гюйгенс, с 1657 г. состоявший в оживленной переписке с де Слюзом. Укажем для примера только общие правила Гюйгенса для определения экстремума целого многочлена $f(x) = 0$ и рациональной функции $f_1(x)/f_2(x)$, которые мы можем записать соответственно в виде

$$f'(x) = 0 \text{ и } f_1'(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2'(x) = 0.$$

---

[1] Ферма по существу подходил уже к этому, предлагая в упомянутом приложении к письму от июня 1638 г. всегда употреблять для одних и тех же отрезков, служащих при отыскании касательных, одни и те же обозначения, «какова бы ни была природа кривой» (*Р. Декарт*. Геометрия, стр. 172). Применяя для приращения абсциссы специальный знак E, он не ввел, однако, символа приращения ординаты; это сделал Барроу (см. стр. 204).

Впрочем небольшое сочинение Гюйгенса, содержащее эти предложения, было напечатано только в 1693 г.

В переписке Слюза с Гюйгенсом были, в частности, рассмотрены примеры кривых, которые Слюз называл эллиптоидами, а Б. Паскаль — жемчужинами. Уравнения их имеют вид $y^m = x^n (a \pm x)^p$ и представляют собой обобщения уравнений эллипса и гиперболы относительно вершины. Слюз занялся построением касательных к такого рода линиям, Гюйгенс квадрировал некоторые из них, т. е. проинтегрировал отдельные случаи биномиального дифференциала (ср. стр. 246). Характерно для этой ранней стадии аналитической геометрии и инфинитезимальных вычислений, что чертежи обоих ученых содержат ошибки, например: рисуются лишние дуги, симметричные относительно оси абсцисс, и остаются вне поля зрения бесконечные ветви. Десять лет спустя задачи на жемчужины Слюз включил во второе издание своего «Мезолабия» (Mesolabum, Liège, 1659 и 1668). Несомненно, что к изучению жемчужин Слюз пришел под влиянием Риччи, который дал построение касательных к кривым $x^m y^n = (ax + by + c)^{m+n}$, опубликованное им в «Геометрическом опыте о максимумах и минимумах» (Exercitatio geometrica de maximis et minimis, Romae, 1666), но найденное уже примерно в середине 40-х годов. Одна из жемчужин $ky^3 = x^2 (a + x)$ послужила примером построения подкасательной во «Всеобщей части геометрии» Дж. Грегори (1668), применившего для этого, подобно (и, вероятно, вслед за) Ферма, пропорцию $\frac{y}{t} \approx \frac{y - \Delta y}{t - \Delta x}$, в которой затем приращение абсциссы, обозначенное Грегори o (ср. стр. 234), полагается после преобразований и деления на o бесконечно малым или, как он говорил, ничем — *nihil*, причем приближенное равенство переходит в точное.

Исаак Барроу

Остановимся на методе касательных, изложенном в «Лекциях по оптике и геометрии» (Lectiones opticae et geometricae, Londini, 1669—1670) Исаака Барроу (1630—1677). Барроу, считавший своим главным призванием богословие, после обучения в Кембриджском университете несколько лет провел в странствиях по странам Европы и Востока, а вернувшись в Англию стал сначала профессором греческого языка в Оксфорде, затем — математики в Грешем Колледже в Лондоне и с 1663 г. в Кембридже. Здесь он познакомился с Ньютоном, поступившим в университет в 1661 г. Барроу высоко ценил гениальные способности Ньютона; знакомство оказалось полезным для обоих. В 1669 г. Барроу отказался от профессуры и был назначен придворным священником короля Карла II. Проповеди Барроу доставили ему громкую известность. Как математик, он продолжал заниматься изданием латинских обработок сочинений греческих классиков — делом, которое увлекало его и ранее. Так вышли в его изложении труды Евклида, Архимеда, Аполлония и Феодосия.

«Лекции» Барроу свидетельствуют об обширных познаниях, почерпнутых из всей доступной в то время литературы, а также из частных бесед. Несомненно, что он был многим обязан итальянской школе математиков, Декарту и Ферма, Валлису и Грегори. Менее ясно, в какой мере отразилась на «Лекциях» помощь, оказанная автору Ньютоном. В предисловии к первой части книги, содержащей оптические лекции, Барроу писал, что

Исаак Барроу
(с портрета И. Вуда, хранящегося в Ronan Picture Library)

его коллега Ньютон, муж замечательного дарования, просмотрел сочинение, рекомендовал некоторые улучшения и кое-что добавил сам. Действительно, Ньютон «кое-что» внес в оптические лекции. Что же касается математической части труда, участие Ньютона, вероятно, ограничилось одним советом, о котором говорится несколько далее. Инфинитезимальные методы еще в середине 60-х годов получили у Ньютона гораздо большее развитие, чем в книге Барроу, и это свидетельствует о независимости изложения в «Лекциях по геометрии» от влияния Ньютона.

В первых двух лекциях идет речь о понятии движения, являющемся для Барроу исходным. Движения сравниваются между собой по скорости, а для этого требуется еще понятие о времени. Время не зависит от движения, оно есть длительность (perseverantia) каждой вещи в ее бытии, но количество времени измеряется при помощи какого-либо движения. Вместе с тем время как одномерно протяженная величина, порождаемая непрерывным течением момента — мгновения, может быть представлено прямой линией; точно так же скорости во всякий момент движения могут быть изображены отрезками, перпендикулярными к прямой времени. Образованные совокупностями отрезков-скоростей, плоские фигуры представляют тогда соответствующие «движения» или «совокупные скорости» (т. е. пути и средние скорости). В третьей лекции рассмотрено образование кривых линий с помощью составных движений. Все эти мысли имеют большое сходство со взглядами на отправные понятия математики Ньютона, и здесь весьма вероятно влияние на него со стороны Барроу (ср. стр. 216). В то же время эта кинематическая концепция принадлежала долгой традиции, через Непера, с одной стороны, и Галилея,— с другой, восходящей к оксфордским калькуляциям и парижской теории широт форм (см. т. I, стр. 270 и след.).

Четвертая лекция посвящена проведению касательных, как диагоналей прямоугольника движений, одно из которых направлено по горизонтали, а другое — по вертикали, в манере Роберваля и Торричелли, с приемами которых Барроу мог познакомиться, будучи во Франции и Италии. Пропуская следующие лекции, мы остановимся еще на вычислении подкасательной, изложенном в десятой лекции по совету, как писал автор друга, которого он не называет, но которым, без сомнения, был Ньютон,— об этом впоследствии вспоминал сам Ньютон. Это вычисление есть не что иное, как метод Ферма, но приведенный к виду общего расчетного правила. Алгебраический по своему характеру прием Барроу, сформулированный в немногих словах, основывался на явном применении бесконечно малых величин, а также бесконечно малого характеристического треугольника.

Барроу рассматривает касательную TM к кривой AMN в точке M (рис. 35) и, принимая отрезок дуги MN безгранично малым (indefinite parvum), строит бесконечно малый треугольник NRM, подобный конечному треугольнику TPM. Он обозначает $MP = m$, $TP = t$, $NR = a$ и $MR = e$. В отличие от Ферма он дает обозначения приращениям обеих координат, а не только абсциссы: это и позволяет механизировать расчетный прием до конца,— правда, не в виде формулы, для чего еще недостает других символов. Правило Барроу таково: пишется уравнение кривой в приращенных координатах, в нем отбрасываются все члены выше первого измерения относительно a и e, а также члены, свободные от a, e, после чего в оставшемся уравнении a заменяется на m и e на t. Если положить $m = y$, то результат можно записать уже встретившимся нам уравнением

$$t\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Что касается обоснования, то Барроу, очевидно, принимал, опираясь на подобие треугольников TPM и MRN, конечные отрезки m, t соответственно пропорциональными бесконечно малым a, e, зависимость же между a и e ему давало уравнение

$$e\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Сам он разъяснял, что, когда в вычислении участвует безгранично малая частица кривой, ее можно заменить подходящим образом выбранной равносильной ей (aequipollens) частицей касательной, т. е. NM можно трактовать и как отрезочек кривой и как отрезочек касательной. Правило сопровож-

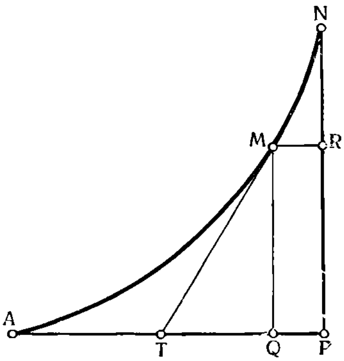


Рис. 35

дается рядом примеров на касательные: к кривой с уравнением $x^4 + x^2y^2 = r^2y^2$, введенной, согласно де Слюзу, учеником Декарта Гергардом ван Гутшофеном [1], к декартову листу, квадратрисе и еще двум линиям.

По сравнению с описанием метода касательных у Ферма и других упоминавшихся ученых его изложение у Барроу представляло еще один шаг вперед на пути алгебраизации инфинитезимальных процедур и оно было высказано в более общих терминах, чем правило Слюза. За полвека, прошедших после того как в эту область вступил Кеплер, еще далекий от самой мысли алгебраизировать свои манипуляции с бесконечно малыми, в этом направлении был пройден большой путь. Барроу стоял в самом преддверии исчисления бесконечно малых. Его обозначения были много удобнее, чем у Ферма, который, в частности, немало затруднял читателя, обозначая одинаковыми буквами концы одних отрезков и величины других. Но далее преддверия Барроу все же не пошел.

В «Лекциях» Барроу есть и другие вещи, заслуживающие упоминания, например важное неравенство ($x > 0$, целое $n > 1$)

$$(1 + x)^n > 1 + nx,$$

носящее теперь имя Я. Бернулли, который вновь опубликовал его в первой из своих работ по теории рядов (1689). Нам придется вернуться далее к содержащемуся в той же десятой лекции анализу взаимосвязи между задачами на касательные и на квадратуры.

Теория эволют Гюйгенса

Новый отдел инфинитезимальной геометрии плоских кривых разработал Хр. Гюйгенс. Мы говорили в начале первой главы о его многолетних занятиях часами с маятником — проблемой, которую поставил Галилей и на которую обратил внимание Гюйгенса, когда тот был еще шестнадцатилетним юношей, Мерсенн. Целью было добиться постоянного периода качания маятника независимо от начального отклонения, а этого не да-

[1] Эта линия, называемая теперь кривой каппа, определяется следующим свойством: радиус-векторы OM, проведенные к ее точкам M из начала координат, отсекают при их продолжении равные им отрезки на перпендикуляре к оси абсцисс в точке A $(r, 0)$.

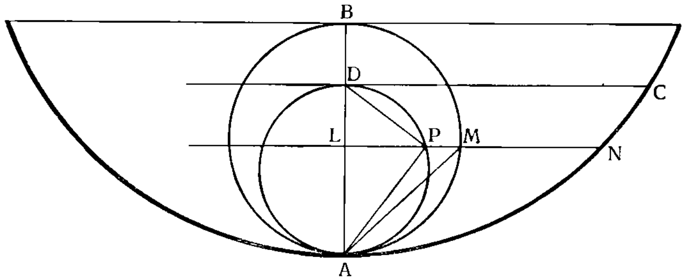


Рис. 36

вало движение по окружности. Изучая свойства циклоиды, Гюйгенс вскоре после 1658 г., когда он впервые дал краткое описание маятниковых часов в печати, обнаружил ее изохронность [1]. В поисках средств технической реализации этого открытия Гюйгенс пришел к теории эволют, а в области механики — к учению о центробежной силе, принципу движения центра тяжести, понятию о моменте инерции и теории физического маятника. Ранней зимой 1665 г. работа Гюйгенса над рукописью была закончена, но она увидела свет только восемь лет спустя. Полное заглавие труда гласило: «Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленному к часам» (Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, Parisii, 1673).

В XXIII — XXV предложениях второй книги этого сочинения доказывается, что тяжелая точка, падающая по циклоиде с вертикальной осью и выпуклостью, обращенной книзу, имеет постоянный период колебания, равный $4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, где r — радиус образующего круга, из какой бы точки ни начиналось ее движение. Теоремы эти доказаны по методу исчерпывания с большой подробностью. Сам Гюйгенс, у которого не было обозначений ни для постоянной ускорения силы тяжести g, ни для числа π, высказал XXV предложение с помощью пропорции: время падения из любой точки циклоиды до ее вершины относится ко времени свободного падения вдоль всей ее оси, как длина полуокружности к ее диаметру.

Мы коротко передадим ход рассуждений Гюйгенса, освободив их от античной формы метода исчерпывания. Допустим, что $AB = 2r$ есть ось циклоиды (рис. 36), ABM — образующий круг в центральном положении, C — начальная точка падения, N — положение падающей точки в произвольный момент времени. Пусть далее CD и NL, параллельные основанию циклоиды, встречают ее ось в точках D и L, причем $AD = h$. Наконец, строится вспомогательная окружность на диаметре AD. Идея Гюйгенса состоит в сравнении движения точки N по дуге циклоиды CNA с движением точки P, находящейся в пересечении окружности APD и прямой NL, т. е. всегда на одной высоте с N, по полуокружности DPA. В положении N падающая точка имеет, как известно, скорость

$$\sqrt{2g\cdot DL} = \sqrt{\frac{2g}{h}}\,DP.$$

[1] Гюйгенс говорил о таутохронности циклоиды (ταὐτά — одно и то же, χρόνος — время). Термин «изохронизм» (ἴσος — одинаковый, равный) принадлежит французскому математику Игнасу Гастону Пардису (1636—1673).

Поскольку касательная к циклоиде в точке N параллельна AM (см. стр. 201), вертикальная компонента скорости точки N есть

$$\sqrt{\frac{2g}{h}}\, DP\, \frac{AL}{AM}$$

или же

$$\sqrt{\frac{g}{r}}\, LP,$$

в чем нетрудно убедиться, используя свойства вписанных в круг прямоугольных треугольников. С другой стороны, касательная к окружности DPA в точке P образует с диаметром DA угол, косинус которого есть $LP : \frac{h}{2}$, и поэтому точка, движущаяся по этой окружности с равномерной скоростью $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$, в положении P имеет скорость, вертикальная компонента которой есть $\sqrt{\frac{g}{r}}\, LP$, т. е. такая же, как у точки N на циклоиде. Таким образом, точка N спустится по дуге циклоиды CA одновременно с тем, как точка P спустится по полуокружности DPA. Но время спуска точки P равно $\pi \frac{h}{2} : \left(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}\right)$, т. е. $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, а время свободного падения вдоль оси циклоиды BA равно $2\sqrt{\frac{r}{g}}$, откуда и следует теорема Гюйгенса.

Чтобы применить изохронность циклоиды к часам, нужно было заставить маятник совершать циклоидальное движение. Изучая свойства этой кривой, Гюйгенс обнаружил, что нормали к данной циклоиде касаются другой, конгруэнтной циклоиды, параллельно смещенной по отношению к первой. Поэтому нерастяжимая гибкая нить определенной длины (именно $4r$), намотанная на вторую циклоиду и закрепленная в ее точке возврата, при сматывании в натянутом состоянии описывает свободным концом первую циклоиду. На этом и основано устройство циклоидального маятника: две половины арки циклоиды, имеющие общее горизонтальное основание и соединенные в точках возврата, располагаются в вертикальной плоскости выпуклостями книзу; тогда маятник, подвешенный в их общей точке и имеющий длину $4r$, будет изохронно колебаться вдоль точно такой циклоиды, точки возврата которых находятся в вершинах верхних полуарок. Таков был отправной пункт общей теории эволют, развитой в третьей части «Маятниковых часов» и далеко выходящей за пределы того, что было необходимо Гюйгенсу для решения первоначальной задачи [1].

Гюйгенс исходит из определения эвольвент (этого термина, означающего «развертывающая», он не употреблял), как линий, описываемых при развертывании нитей, натянутых на данную кривую, которую он назвал эволютой, т. е. развернутой. При этом он предполагает, что рассматриваемая эволюта изогнута в одну сторону; правда, в отдельных примерах затем встречаются и кривые с точкой перегиба, и на чертеже эвольвенты соответственно показана точка возврата, характер которой, впрочем, под-

[1] На практике часы с циклоидальным маятником себя не оправдали. При малых колебаниях период кругового маятника почти не зависит от их амплитуды.

робнее не исследуется (ср. стр. 275). Прежде всего Гюйгенс доказывает, что касательная к эволюте нормальна к эвольвенте и несколько далее, что любая ортогональная траектория касательных к данной кривой является эвольвентой последней. Далее доказаны упомянутые теоремы о циклоиде и дается новый способ ее спрямления, основанный на том очевидном обстоятельстве, что длина дуги эволюты равна длине смотанной с нее части нити (или же разности длин отрезков касательных в концах дуги, проведенных до встречи с эвольвентой). Так как согласно предыдущим построениям смотанная с полуарки циклоиды нить вытягивается на длину, равную удвоенному диаметру образующего круга, то длина всей арки равна $8r$. Такой же прием позволяет по-новому произвести спрямление полукубической параболы, которая, как показывает Гюйгенс, есть эволюта обыкновенной параболы. Затем определяются и спрямляются эволюты эллипса и гиперболы, относящиеся к кривым шестого порядка. Добавим, что в мемуаре «О центробежной силе» (De vi centrifuga), написанном еще до издания «Маятниковых часов», но опубликованном лишь в «Посмертных сочинениях» (Opuscula postuma, Lugduni Batavorum, 1703), Гюйгенс для определения направления, в котором действует эта сила, применил эвольвенту окружности.

Эти частные результаты обобщаются в XI предложении третьей части, в котором фактически вводится радиус кривизны, а эволюта выступает как геометрическое место центров кривизны или же точек пересечения бесконечно близких нормалей. Показав общий прием нахождения эволюты данной кривой, Гюйгенс для примера выводит уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$ в тех обозначениях, в каких оно и теперь нередко приводится в учебниках, $\frac{27}{8}p\eta^3 = (\xi - p)^2$. Поскольку эволюты алгебраических кривых сами алгебраические, Гюйгенс может таким образом получить сколько угодно спрямляемых алгебраических кривых. В формулировке Гюйгенса XI предложение гласит: «Построить эволюту данной кривой и показать, что каждая геометрически определенная (т. е. алгебраическая.— *Ред.*) кривая имеет также геометрически определенную эволюту, которую можно выпрямить» [1]. Здесь выводы Гюйгенса основаны на явном оперировании бесконечно малыми: отрезок дуги между двумя бесконечно близкими точками данной кривой, т. е. эвольвенты, отождествляется с касательной к ней в одной из этих точек, которые можно считать «слившимися в одну», а точка, в которой пересекаются две бесконечно близкие нормали в концах этой дуги, отождествляется с точкой, в которой нормаль касается эволюты. Сама эволюта выступает при этом как место пересечений таких нормалей. Выражение, которое при этом получает Гюйгенс для отрезка нормали эвольвенты между нею и эволютой, т. е. для ее радиуса кривизны, содержит значения отрезков подкасательной t, поднормали n, отрезка нормали N и довольно громоздкое:

$$R = N\frac{(t+n):t}{(t+n):t-\left(1+\frac{dn}{dx}\right)}.$$

Оно переходит в принятое теперь, если положить

$$N = y\sqrt{1+y'^2},\quad t = y:y',\quad n = yy'.$$

[1] *X. Гюйгенс.* Три мемуара по механике, стр. 106.

Выражение радиуса кривизны в виде $ds^3 : (dx \cdot ddy)$ увидело свет в одной статье Я. Бернулли 1694 г. (см. стр. 275), а в дифференциалах абсциссы и ординаты — в «Анализе бесконечно малых» (1696) Лопиталя, который был этим обязан И. Бернулли. Братья Бернулли записали R в символах дифференциального исчисления, каждый независимо, отправляясь от результата Гюйгенса, в 1691 г. Примерно тогда же Ньютон представил R с помощью своего знака флюксии, т. е. первой производной (см. стр. 236), именно в виде

$$\frac{\overline{1+zz} \cdot \sqrt{1+zz}}{\dot{z}},$$

где $z = \dot{y} : \dot{x}$ и $\dot{x}$ принята за единицу; Ньютону принадлежат и сами термины «центр» и «радиус кривизны» (centrum, radius curvaturae). Но «Метод флюксий» Ньютона, где это изложено, был издан только в 1736 г.

Напомним, что в «Маятниковых часах» приведены — без доказательства — компланации некоторых поверхностей вращения конических сечений.

Эволюты являются огибающими нормалей эвольвенты. Другой важный в приложениях и интересный класс огибающих встретился в оптике. Это огибающие семейств отраженных или преломленных данной плоской кривой лучей, исходящих из одной точки, либо параллельных. Братья Бернулли в 1692 г. назвали первый род огибающих катакаустиками, а второй — диакаустиками: их именуют также фокальными кривыми [1]. Каустиками занимался в 1682 г. и следующие годы Чирнгауз, который произвел простое и изящное спрямление катакаустики в случае параллельных лучей (доказательство тут же сообщил Лейбниц). Гюйгенс в «Трактате о свете» (1690) решил ту же задачу для диакаустик, исходя из того, что они суть эволюты ортогональных траекторий семейства преломленных лучей. Это сочинение было написано в 1678 г., и возможно, что беседы, которые вел Чирнгауз с Гюйгенсом в следующем году, сообщили толчок его занятиям фокальными кривыми.

Весь описанный цикл работ по инфинитезимальной геометрии — определение касательных и точек перегиба, исследование кривизны линий, учение об эволютах, первые примеры огибающих — вошел составной частью в дифференциальную геометрию, как только были заложены первые начала дифференциального исчисления.

Связь между проблемами квадратур и касательных

Для нас взаимно обратный характер операций дифференцирования и (неопределенного) интегрирования непосредственно вытекает из их определения, так же как взаимно обратный характер сложения и вычитания или возведения в степень и извлечения корня. Если определенный интеграл вводится как предел интегральной суммы, то его связь с понятием

[1] Каустика, собственно, и значит фокальная кривая (καυστικός — сжигающий, жгучий; κατά и διά — соответствующие предлоги).

дифференциала устанавливается теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу. Пока не были созданы такие общие понятия и операции исчисления бесконечно малых, зависимость между двумя основными типами инфинитезимальных задач отнюдь не была столь прозрачно ясной. Математики подходили к ее установлению разными путями, отправляясь от частных задач, и различные выражения, которые получала у них эта зависимость, были вначале весьма далеки от привычных нам аналитических формулировок.

Конечно, даже в простейших задачах на квадратуры и касательные парабол высшего порядка взаимно обратный характер соответствующих результатов и вычислений должен был бросаться в глаза.

Квадратура парабол ставила в соответствие функции x^m (ординате) функцию $x^{m+1}/(m+1)$ (площадь), а определение касательных к ним ставило в соответствие функции $x^{m+1}/(m+1)$ (ординате) функцию x^m (отношение ординаты к подкасательной). В решении первой задачи основной операцией, до предельного перехода, было суммирование, во второй — вычитание. Однако обстоятельства, очевидные для того, кто знаком с исчислением бесконечно малых, не были столь очевидными в годы, когда исчисление лишь подготовлялось: во всяком случае не сразу стало ясным их значение.

Другим примером, в котором выступала связь того же рода, служили обратные задачи на касательные. Занимаясь задачей Дебона о кривой, удовлетворяющей — в наших обозначениях — уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$, Декарт встретился с вопросом о методе, обратном методу касательных. Как уже говорилось, он не верил в существование общего приема, обратного его правилу касательных или же приему Ферма (см. стр. 163). Но два момента его рассуждений весьма примечательны. Во-первых, сначала он попробовал решить задачу, выясняя, удовлетворяют ли условию задачи функции (кривые) $y^n = ax^2 + bx + c$. Это было равносильно проверке дифференцированием, имеются ли решения в классе функций указанного вида. Во-вторых, заменой переменных он свел дело к уравнению $\frac{dy'}{dx'} = \frac{-y'}{b\sqrt{2}}$, т. е. к квадратуре. Правда, сам Декарт не отметил последнего факта и построил свое приближенное решение на других соображениях. Но он вообще не углублялся далеко в область инфинитезимальной математики, лишь при случае доказывая силу своего гения на решении предлагаемых ему друзьями и недругами вопросов. Те же ученые, которые систематически работали в этой области, естественно, стремились привести обратные задачи на касательные к квадратурам, получавшим все более широкое применение. И достаточно было Лейбницу в письме от 27 августа 1676 г., направленном Ньютону через Ольденбурга, упомянуть, что он решил задачу о кривой с постоянной подкасательной, как Ньютон в ответе от 24 октября откликнулся замечанием, что определение этой кривой зависит от квадратуры гиперболы.

К механическому или геометрическому представлению зависимости между дифференцированием и интегрированием подходили Торричелли, Менголи, Дж. Грегори и Барроу. В «Общей части геометрии» (1668) Грегори выразил эту зависимость, сопоставляя спрямление произвольной кривой с построением подкасательной к некоторой другой подходящей линии. В более удобном виде это же вскоре сделал Барроу в XI предложении десятой из своих геометрических лекций (1670).

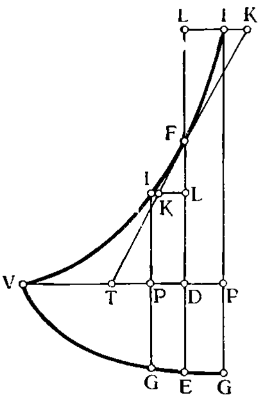


Рис. 37

Две кривые $VGEG$ и $VIFI$ отнесены к общей оси VP (рис. 37). Допустим, что ординаты DF верхней кривой, умноженные на данный отрезок R, всякий раз равны площади VDE между нижней кривой, осью и ординатой DE, являющейся продолжением DF. Тогда, утверждает Барроу, отрезок DT, определяемый пропорцией $DT : R = DF : DE$, есть подкасательная для касательной TF к верхней кривой в точке F. Обозначив $VD = x$, $DE = z$, $DF = y$ и положив для простоты $R = 1$, эту теорему можно выразить в терминах исчисления бесконечно малых: если

$$y = \int_0^x z\, dx,$$

то подкасательная $DT = t$ кривой VIF есть $t = y : z$ и, поскольку $t = y : \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = z.$$

Таким образом, интегрирование нижней кривой дает дифференцирование верхней (и наоборот).

Барроу приводит два доказательства теоремы. Первое, кинематическое, примыкает, по его собственным словам, к исследованиям Торричелли. Пользуясь рис. 37 (Барроу дает специальные чертежи), его можно коротко передать следующим образом, принимая по-прежнему $R = 1$. Верхняя кривая рассматривается как траектория точки F, горизонтальная проекция скорости которой, т.е. $\frac{dx}{dt} = 1$, а вертикальная проекция $\frac{dy}{dt} = z$ (здесь t — время!), так что согласно методу параллелограмма движений подкасательная $DT = y : z$. Вместе с тем квадратура нижней кривой, т. е. $y = \int_0^x z\, dx$, дает путь, проходимый при движении по прямой со скоростью z[1]. Барроу

[1] Здесь содержится и предложение: скорость изменения площади криволинейной трапеции (по абсциссе) равна текущей ординате.

иллюстрирует это примером равномерно ускоренного движения, в котором верхней кривой оказывается парабола $y = gx^2/2$, а соответственной нижней — прямая $z = gx$.

Второе доказательство, геометрическое, мы приведем, близко следуя Барроу. Примем, что ординаты DE нижней кривой возрастают. Из точки I, которая берется сначала слева, а затем справа от точки F, проводятся отрезки IL параллельно оси и IPG перпендикулярно к ней. Обозначим K точку пересечения прямых TF и IL. Так как $LF : LK = DF : DT$ и по условию $DF : DT = DE : R$, то $LF \cdot R = LK \cdot DE$. Вместе с тем $LF \cdot R =$ $=$ пл. $PDEG$, так что $LK \cdot DE =$ пл. $PDEG$. Смотря по тому, находится ли точка I слева или справа от L, пл. $PDEG$ оказывается меньше или соответственно больше, чем $IL \cdot DE$, а значит, KL меньше IL или соответственно KL больше IL. Поэтому верхняя кривая $VIFI$ лежит вся по одну сторону от прямой TF, причем обращена выпуклостью к оси. Значит прямая TF есть касательная к кривой VIF в точке F. В случае убывания ординат нижней кривой доказательство аналогично, только верхняя кривая обращена тогда к оси своей вогнутостью. Все это можно распространить на кусочно монотонные кривые $VGEG$, причем у кривой $VIFI$ появляются точки перегиба. Сам Барроу исходил из традиционного понимания касательной.

Доказанную теорему можно выразить (полагая $R = 1$) и следующим образом: из уравнения $y = \int\limits_0^x z\,dx$ следует дифференциальное равенство $dy = z\,dx$. Этот результат по существу содержится в ходе рассуждений Барроу. Ведь приращение площади нижней кривой, т. е. пл. $PDEG$, равно приращению ординаты верхней кривой, т. е. LF. Если мыслить точку I неограниченно близкой к точке F, характеристический треугольник KLF — бесконечно малым и криволинейную трапецию $PDEG$ — прямоугольной, то равенство $LF =$ пл. $PDEG$ заменяется на $dy = z\,dx$. Мы видели, что инфинитезимальные соображения были руководящими для Барроу в задаче о построении касательной с помощью характеристического треугольника. Так же обстояло дело и в данном выводе, которому Барроу лишь в заключительном изложении придал форму точных неравенств. Доказывая в XIX предложении одиннадцатой лекции ту же теорему в обратном порядке, т. е. переходя от дифференциального равенства $dy = z\,dx$ к интегральному $y = \int\limits_0^x z\,dx$, Барроу ограничился выводом с помощью бесконечно малых: и в этом случае, как он писал, утверждение является достаточно ясным.

Упомянем, что замечания Барроу о направлении вогнутости кривой в скрытом виде содержат известные дифференциальные признаки, основанные на увеличении или уменьшении значения первой производной $y' = z$.

В переводе на язык нового анализа теорема Барроу и родственные ей теоремы его предшественников выражали взаимно обратный характер вычисления интеграла с переменным верхним пределом и дифференцирования. Однако это стало ясным ученым того времени лишь после того, как Ньютон и Лейбниц аналитически определили операции интегрирования и дифференцирования, причем само определение уже показывало существующую между ними связь. Вообще «Лекции по геометрии», несмотря на достигнутую Барроу общность в трактовке ряда основных предложений и приемов анализа и многие интересные примеры, не оказали широкого влияния. Одной из причин была громоздкая форма изложения, решительно устарелая символика и недостаточное применение алгебраических средств, быть может воспринятое у итальянских математиков. К тому же еще до появления книги Барроу в Англии началось распространение гораздо более мощного и удобного метода флюксий Ньютона, а вскоре после ее выхода Лейбниц приступил к разработке дифференциального и интегрального исчислений. В обоих случаях «Лекции по геометрии» были далеко превзойдены и в идейном, и в формальном отношении. Это позволяет нам пройти мимо отдельных оригинальных приложений, которые получила у Барроу его теорема в нескольких частных задачах, как для определения касательных с помощью известных квадратур, так и для решения обратных задач на касательные путем сведения их к квадратурам.