ВОСЬМАЯ ГЛАВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Накануне создания нового исчисления

За пятьдесят лет после выхода в свет трудов Непера и Кеплера инфинитезимальная математика сделала значительные успехи. В интеграционных задачах на первое место выдвинулось суммирование бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, были найдены приемы замены переменных, проинтегрированы, не считая степенной функции, некоторые иррациональные и трансцендентные функции,— мы далеко не полностью перечислили эти интеграции, иногда очень остроумные. Понятие квадратуры до некоторой степени исполняло роль определенного и неопределенного интеграла.

В дифференциальных задачах было выявлено единство приемов их решения, которые сводились к разысканию бесконечно малых разностей величин и их отношений, было сформулировано несколько формальных правил, равносильных дифференцированиям. Операции предельного перехода и действия с бесконечно малыми, необходимые в обоих случаях, были осознаны как новые виды действий, специфические для нового анализа. Становилась ясной взаимозависимость между обоими классами задач. Как основное средство аналитического выражения функций начинали употреблять бесконечные степенные ряды.

Однако, сколь ни значительны были блестящие открытия в инфинитезимальной математике, сделанные Кавальери и Торричелли, Декартом и Ферма, Робервалем и Паскалем, Валлисом и Барроу, Броункером и Меркатором, они не составляли ни каждое в отдельности, ни все взятые вместе исчисления бесконечно малых. В них не было единой системы отправных общих понятий, подчиненных определенным правилам оперирования, и единой символики, обеспечивающей механическое осуществление этих операций. Исчисление бесконечно малых, в котором отыскание экстремумов и касательных, нахождение радиусов кривизны, квадратуры, спрямления, кубатуры, вычисление скорости и пути, решение обратных задач на касательные и т. д. являются приложениями немногих вычислительных алгоритмов, действительных для весьма обширных подклассов или даже для всего класса аналитических функций, еще разработано не было.

Создание такого оперативного исчисления было заслугой двух величайших умов XVII в.— Ньютона и Лейбница.

Исаак Ньютон

Английский математик, механик и физик Исаак Ньютон (1643—1727) родился в фермерской семье в деревне Вулсторп, примерно в 75 *км* к северу от Кембриджа. После нескольких лет занятий в школе соседнего городка Грантема Ньютон летом 1661 г. поступил в колледж св. Троицы — Тринити колледж Кембриджского университета. В 1665 г. он окончил его со степенью бакалавра, в 1668 г. стал магистром, а год спустя по предложению Барроу занял его кафедру. В университете Ньютон читал лекции по физике и математике: о его курсе алгебры говорилось ранее. Он не женился; члены колледжа, следуя средневековой традиции, оставались холостяками.

1664 год и два или три последующих года оказались решающими в духовном развитии Ньютона. Изучая геометрию по Евклиду[1], алгебру с приложениями по Виету, Отреду и Декарту, инфинитезимальную математику по Валлису, Ньютон одновременно знакомился с современными ему достижениями в механике, астрономии и физике. В математике особенное влияние на него оказали труды Декарта и его последователей, включенные во второе латинское издание «Геометрии», а также валлисова «Арифметика бесконечных». Об этом со всей ясностью свидетельствуют недавно опубликованные черновые записи Ньютона, содержащие выписки из сочинений названных авторов, решения многочисленных задач, доказательства теорем, различные собственные замечания и дополнения, переходящие затем в изложение новых открытий самого Ньютона.

Судя по этим записям, в области математических наук Ньютон был преимущественно самоучкой. Во всяком случае, курс математики, который читал в 1664—1666 гг. в Кембридже Барроу, имел совершенно элементарный характер по сравнению с изучавшейся тогда Ньютоном литературой,— этот курс не следует смешивать с рассмотренными нами в предыдущей главе «Лекциями по геометрии»[2]. Вообще о влиянии Барроу на Ньютона мы не располагаем точными данными. В рукописях Ньютона, о которых идет речь, упоминаний о Барроу нет. Неизвестно, какие лекции Барроу посещал Ньютон, неизвестно, беседовали ли они в то время на научные темы. Вероятно все же, что Ньютон был обязан Барроу общей концепцией образования математических переменных величин и геометрических фигур посредством движения (см. стр. 204). Употребив здесь слово «вероятно», мы поступили, как сам Ньютон, в 1713 г. писавший: «В том же (1665.— *Ред.*) году я выяснил кое-что относительно метода моментов и флюксий. И вероятно, что лекции д-ра Барроу могли навести меня на рассмотрение образования фигур с помощью движения, хотя я теперь и не помню этого»[3]. Из черновых записей видно, что главное внимание Ньютона было тогда устремлено на разработку аналитической геометрии и анализа, включая теорию рядов, с применением декартовой алгебры. Эти направления математической мысли, синтез которых привел Ньютона к методу флюксий, остались во многом чуждыми Барроу.

---

[1] По изданию Барроу, в котором доказательства были сокращены и упрощены: Euclidis Elementorum libri XV breviter demonstrati, Opera Is. Barrow, Cantabrigiae, 1655.

[2] Читавшиеся Барроу в Кембридже лекции по математике были изданы посмертно (Lectiones Mathematicae XXIII, Londini, 1687).

[3] См. «The Mathematical Papers of Isaac Newton», v. I, p. 11; ср. там же, стр. 150.

Исаак Ньютон
(с портрета Г. Кнеллера 1689 г. Собственность графа Портсмутского)

Конечно, круг чтения Ньютона не ограничивался сказанным, и, например, он изучал, нередко из вторых рук, Аполлония. Рукописи показывают также, что он быстро овладел античными формами доказательства. Однако забота о точности определений, о полноте выводов, характерная для позднейших работ Ньютона, в заметках, составленных для самого себя, естественно, не проявляется. Зато здесь особенно отчетливо видно, что молодой Ньютон в полной мере оценил эвристические достоинства инфинитезимальных приемов и индуктивных поисков. Изучение чужих работ немедленно побудило Ньютона к собственным исследованиям.

Уже ранней осенью 1664 г. Ньютон начал прокладывать собственные пути в различных направлениях. Зимой 1664—1665 г. он открыл носящее теперь его имя общее разложение степени бинома. За несколько месяцев, с весны по осень 1665 г., он разработал принципы метода флюксий, отчетливо выразил взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования, регулярно записывая в параллельных столбцах интегралы и производные, и применил свое исчисление к целому ряду задач. В октябре 1666 г. он подготовил первое систематическое изложение этих результатов в черновом наброске, который стал известным отдельным ученым еще в ту пору, но напечатан был только триста лет спустя. Название этой рукописи гласит: «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (To resolve Problems by Motion these following Propositions are sufficient) [1]: черновики для своего употребления Ньютон писал по-английски, между тем как работы, предназначенные к печати,— по-латыни. В эти же годы созрели основные идеи механики Ньютона, в частности мысль о единстве силы тяготения, управляющей падением земных тел и движением тел небесных. Проверка гипотезы всемирного тяготения, обратно пропорционального квадрату расстояния, на движении Луны не дала в то время убедительных результатов, так как Ньютон не располагал достаточно близким к истинному значением земного радиуса, и к этой проблеме он вернулся позднее. Наконец, в те же годы, стремясь усовершенствовать зрительную трубу, Ньютон интенсивно занимался оптикой, открыл дисперсию света, сам усердно шлифовал линзы и в 1668 г. построил первый рефлектор. Все эти вопросы, как мы знаем, волновали и современников Ньютона. К мысли о законе всемирного тяготения независимо от него пришли Рен и Роберт Гук (1635—1703), не сумевшие, впрочем, построить небесную механику. Оптикой занимался Барроу, а о построении рефлектора размышлял Дж. Грегори. Мы называем лишь английских ученых, с которыми Ньютону пришлось в то время установить контакты либо лично, либо через Коллинса.

Летом 1669 г. Ньютон передал Барроу «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», содержавший сжатое изложение некоторых наиболее важных его открытий в исчислении бесконечно малых, учении о бесконечных рядах и решении с помощью рядов числовых и буквенных алгебраических уравнений. Барроу переслал это сочинение, написанное Ньютоном с несомненной целью закрепить права на свои открытия, в Лондон Коллинсу и благодаря последнему оно получило некоторую известность в Англии и за ее пределами. Возникшая было мысль издать «Анализ» в приложении к «Лекциям по оптике и геометрии» Барроу (1670) осуществлена не была: возможно, что этого не желал сам Ньютон. Вместо того Ньютон стал готовить к печати более полный труд, известный под назва-

[1] Напечатано в «The Mathematical Papers of Isaac Newton», т. I, стр. 400—448.

нием «Метода флюксий и бесконечных рядов», которое ему позднее дал его первый издатель Колсон (первая страница рукописи Ньютона до сих пор не обнаружена и мы не знаем, какое в точности заглавие намечал он сам). «Метод флюксий» Ньютон готовил в течение 1670—1671 гг.: в нем он дал подробное и систематическое изложение своего исчисления бесконечно малых, а также его приложений. Однако найти издателя «Метода» не удалось; математические книги, как правило, приносили убыток. В результате Ньютон не закончил книгу и, в частности, не написал предполагавшийся раздел об определении центров тяжести фигур. Рукопись осталась у Ньютона, который нередко пользовался ею сам, а также давал ее читать некоторым английским математикам. После неудачи с изданием «Метода флюксий» Ньютон надолго отказался от намерения публиковать свои математические работы — скорее всего, чтобы не втянуться в полемику, которую могли вызвать его инфинитезимальные приемы. Ньютон избегал, сколько мог, острых споров. Он был душевно легко ранимый человек, а между тем ему пришлось вступить в полемику при первом же его контакте с более широкими научными кругами. В конце 1671 г. Ньютон передал Королевскому обществу новый экземпляр зеркального телескопа и в январе 1672 г. был избран его членом; вскоре он представил еще работу по теории света и цветов. Гук выступил против нее с некоторыми возражениями, а за ними последовали другие печатные и письменные критические замечания, в том числе со стороны Гюйгенса и Пардиса. Все это крайне угнетающе подействовало на Ньютона, и в письмах 70-х годов он не раз заявлял о своем намерении впредь ничего не печатать, чтобы не потерять покой. В результате все математические сочинения Ньютона были изданы лишь после того, как имя его приобрело мировую славу, а сам он, бессменный президент Королевского общества с 1703 г., стал, по крайней мере у себя на родине, непререкаемым научным авторитетом. Из трудов по анализу первым было издано «Рассуждение о квадратуре кривых» (Tractatus de quadratura curvarum), опубликованное вместе с «Оптикой» и «Перечислением кривых третьего порядка» в Лондоне в 1704 г., но подготовленное в самом начале 90-х годов. «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (Analysis per aequationum numero terminorum infinitas) был напечатан более чем сорок лет спустя после его составления (Лондон, 1711), а «Метод флюксий и бесконечных рядов» (Methodus fluxionum et serierum infinitarum) ждал издания шестьдесят пять лет, причем сначала вышел в английском переводе Дж. Колсона (The method of fluxions and infinite series, London, 1736).

Столь позднее издание трудов Ньютона по исчислению бесконечно малых, естественно, ограничивало распространение его открытий, особенно за пределами Англии. Это особенно относится к «Методу флюксий». Все же немалое число ученых знакомилось с рукописями Ньютона у него дома, а многие открытия его распространялись посредством переписки. В 1676 г. по просьбе Лейбница он изложил в двух больших письмах, пересланных через Ольденбурга, свои главные результаты в учении о рядах; о методе флюксий, однако, он сообщил только в двух анаграммах, образованных из расположенных в порядке алфавита букв, принадлежащих следующим трем фразам: «По данному уравнению, содержащему сколько-либо флюент, найти флюксии и обратно» [1] и «Один метод состоит в нахождении флюенты из уравнения, заключающего вместе с ней и ее флюксию.

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 262.

Другой же заключается в употреблении вместо какой-либо неизвестной величины ряда, из которого можно удобно вывести остальные, и в сопоставлении однородных членов результирующего уравнения для определения членов взятого ряда»[1]. Например, первая анаграмма (письма были на латыни) имела вид: 6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx. Впрочем, из этих заявлений многого извлечь было бы нельзя, даже если бы Ньютон их высказал открыто. Лишь после того, как стали появляться статьи Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислению, Ньютон резюмировал свой метод в письмах к Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., а Валлис поместил выдержки из них в латинском издании своего «Трактата по алгебре» (De Algebra Tractatus; historicus of practicus, Oxoniae, 1693). Здесь были расшифрованы обе приведенные анаграммы. Еще ранее Ньютон включил целый ряд предложений теории пределов в «Математические начала натуральной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica, Londini, 1687). Впрочем, и этот труд Ньютон завершил и опубликовал только по настоянию своего друга Э. Галлея.

В 1696 г. Ньютон был назначен хранителем Лондонского монетного двора, а в 1699 г.— его директором и на этой работе проявил выдающиеся административные способности. В Англии тогда обращалось много неполновесных и фальшивых монет, хорошие же монеты припрятывались или переправлялись за границу. Финансовое хозяйство страны было в расстроенном состоянии. Ньютон организовал чеканку новых денег более совершенного образца и содействовал укреплению английской валюты. С 1696 г. Ньютон жил в Лондоне и пост директора Монетного двора сохранял до смерти. С 1703 г. он, как сказано, руководил также деятельностью Королевского общества. Научная активность Ньютона стала меньшей, но время от времени он обращался к решению отдельных трудных задач, а в 1709—1712 гг. отдал много сил подготовке нового, исправленного и дополненного издания «Математических начал» (Лондон, 1713), главную тяжесть которого взял на себя талантливый кембриджский профессор Роджер Коутс.

На старости лет, по иронии судьбы, Ньютону пришлось вступить в долгий спор с Лейбницем о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых. Начало спору в 1699 г. положили, правда, не сами Ньютон и Лейбниц, но вскоре они приняли в нем деятельное участие. Острая и пристрастная полемика, в которую вовлечено было много ученых, испортила немало крови Ньютону и Лейбницу и оба они далеко отошли от первоначальной высокой оценки взаимных заслуг. Печальным последствием этого спора, разросшегося до размеров международной распри, явились отказ английских математиков от применения алгоритма Лейбница и его учеников и невнимание многих математиков континента Европы к достижениям школы Ньютона. Так продолжалось более ста лет.

В последний период жизни Ньютон с особым увлечением занимался вопросами богословия и античной хронологии, включая библейские сказания. Подобно Неперу, Ньютон, бывший протестантом, решительно атаковал римскую церковь и папство. Но в вопросах религии Ньютон не придерживался ортодоксальных взглядов и принадлежал к деистам. За богом он признавал создание мира, как выразился Ф. Энгельс, «„первый толчок"», но запретил всякое дальнейшее вмешательство в свою сол-

---

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 259.

нечную систему» [1]. Самый протестантизм Ньютона носил весьма рационалистический характер, профессор колледжа св. Троицы отвергал — про себя — догмат о триединстве Бога и божественную природу Христа.

Ньютон скончался, окруженный почетом, на 85-м году жизни. Краткая эпитафия на памятнике в Вестминстерском аббатстве, где он похоронен, заканчивается словами: «Пусть радуются смертные, что существовало такое украшение рода человеческого». Соотечественник Ньютона поэт А. Поп выразил восхищение современников двустишием:

Nature and Nature's laws lay hid in night,
God said, let Newton be: and all was light.

(Природа и законы природы скрывались в ночной тьме. Бог сказал: да будет Ньютон! и наступил свет). Но сам Ньютон был очень скромным человеком. Как рассказывают, незадолго до кончины он говорил: «Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу и развлекающимся тем, что время от времени он находит более блестящий камешек или более красивую ракушку, чем обыкновенно, между тем как весь великий океан истины лежит передо мной неисследованным» [2]

Ньютон и математическая физика

В развитии науки Нового времени исключительную роль сыграли ньютоновы «Математические начала натуральной философии» (на фотографии (см. стр. 223) воспроизведен титульный лист первого издания этого сочинения). Мы можем сказать лишь несколько слов об этом сочинении, основоположном в развитии рациональной механики, математической физики и шире — всего математического естествознания. В предисловии к первому изданию труда Ньютон характеризовал не только главное его содержание, но и более далекие цели, которые ставил перед наукой. Он писал: «...сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предложений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и остава-

---

[1] *Ф. Энгельс.* Диалектика природы, стр. 171.
[2] *J. Spence.* Anecdotes, observations and characters of books and men. 2d ed. London, 1858, p. 40.

лись бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение» [1]. Таким образом, Ньютон надеялся на возможность механико-математического объяснения всех естественных явлений.

«Математические начала» явились отправным пунктом всего дальнейшего прогресса математического естествознания. В Англии они были приняты без возражений, но на материке Европы механика Ньютона восторжествовала только после нескольких десятилетий идейной борьбы. Особенно упорными противниками ее выступили картезианцы, которые не могли ни принять действия на расстоянии (Ньютон не дал физического объяснения механизма всемирного тяготения), ни примириться с разрушительной критикой, которой было подвергнуто декартово учение о потоках эфирных вихрей, в которых как бы плывут планеты, обращающиеся вокруг Солнца. Господствовавшие в Парижской академии наук картезианцы выбрали в 1699 г. Ньютона ее иностранным членом, но закрыли двери перед его идеями. Кроме того, некоторые расхождения видимого движения Луны с теоретически вычисленным еще долго вызывали сомнения в правильности самого закона всемирного тяготения. Только в середине XVIII в. система механики Ньютона восторжествовала окончательно. Этому особенно содействовали, как мы увидим, Л. Эйлер и принадлежавшие к новому поколению французских ученых Мопертюи, Клеро и Даламбер, а также блестяще популяризовавший идеи Ньютона Вольтер.

По своей структуре «Математические начала» замечательно синтезировали новые экспериментальные методы и аксиоматический метод древних. Первые примеры употребления аксиоматики вне геометрии — в статике дал еще Архимед, в XVI в. также поступил Стевин. Ньютон впервые аксиоматически построил обширную систему механики. Он подчеркивал при этом, что принятые исходные принципы подтверждаются многочисленными опытами. Начинает Ньютон с восьми определений — количества материи, количества движения, различного рода сил, а затем формулирует три аксиомы, или закона, движения. Первая из них есть закон инерции, третья — закон равенства действия и противодействия. Второй закон Ньютона гласит: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует» [2]. Это не что иное, как словесное выражение основного уравнения динамики материальной точки, которое в дифференциальной форме стали писать со времен Эйлера (1736) и которое теперь часто пишут в векторной форме

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}.$$

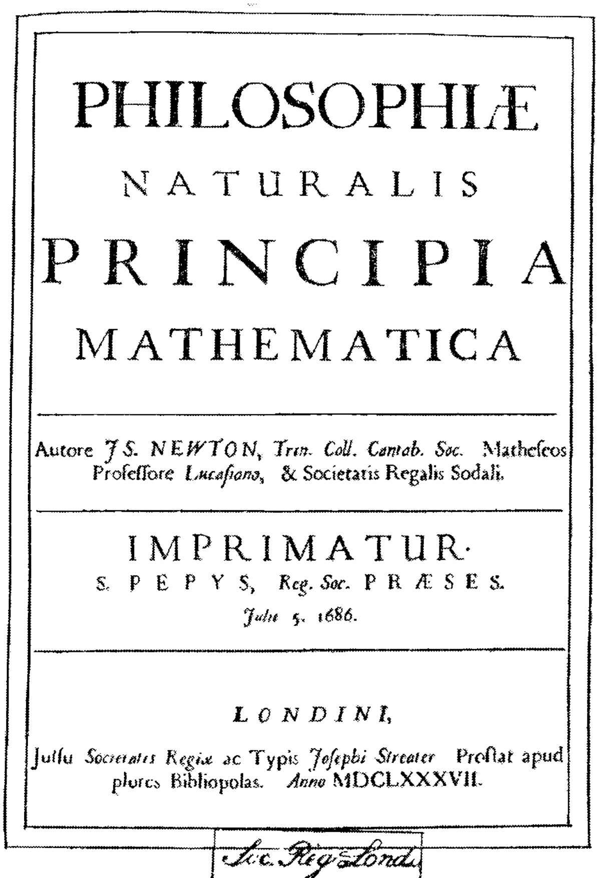
Из законов движения выводятся шесть следствий — о параллелограмме сложения сил, о движении центра тяжести системы точек и др., — и затем на этой основе последовательно развивается длинная цепь многочисленных предложений общей и небесной механики. Ньютон при этом не ограничился изучением движения точки в пустоте или сопротивляющейся среде, но и решил ряд задач теории притяжения твердых тел, а также механики жидкостей.

---

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 3.
[2] Там же, стр. 40.

Будучи в первую очередь трудом по механике, «Математические начала» богаты и собственно математическим содержанием. Нам приходилось уже говорить о некоторых включенных в них предложениях геометрии и теории конечных разностей. Помимо того, в книге в весьма широком объеме используются инфинитезимальные приемы, но не в форме метода флюксий, с помощью которого Ньютон предварительно получил многие, хотя далеко не все, результаты своей механики. Изложение механики на языке флюксий в 80-е годы XVII в. вряд ли было удобно. Еще не имелось книги, по которой можно было изучить новое исчисление, а предварительное его разъяснение в составе «Начал» воздвигло бы серьезные трудности. Перед изучением нелегких идей и теорем новой механики читатель должен был бы преодолеть тяжелый барьер новых и спорных математических понятий, новой символики, новых правил и т. д. Более того, метод флюксий не был тогда настолько развит, чтобы обойтись в механике только

Титульный лист первого издания «Математических начал» И. Ньютона (экземпляр библиотеки Лондонского Королевского общества)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR·
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

его средствами. Через некоторое время положение вещей радикально изменилось. Когда исчисление бесконечно малых укрепилось, стало возможным — и возникла настоятельная потребность — изложить систему механики на его языке, что и выполнил с блестящим успехом Л. Эйлер (1736).

В соответствии со сказанным, Ньютон применяет в «Математических началах» конкретные геометрические инфинитезимальные приемы, которым стремится придать возможно большую строгость и тем самым убедительность. Эти приемы основаны на нескольких доказанных в начале I книги леммах о пределах отношений интегральных сумм, аппроксимирующих площади геометрических фигур, и о пределах отношений неограниченно умаляющихся дуг и отрезков: во II книге добавляется еще правило дифференцирования произведения и степени (см. стр. 243). Теорию конических сечений Ньютон применяет в синтетической форме, по мере надобности дополняя античный запас теорем новыми, принадлежащими ему самому. Аналитико-геометрические методы не употребляются.

Инфинитезимальные конструкции и расчеты «Математических начал» содержат ростки важных понятий и методов, впоследствии широко обобщенных в рамках анализа бесконечно малых. В качестве одного из примеров укажем на теорию притяжения сферических тел в 12-м отделе I книги, где в предложениях 70—78 определяется притяжение внутренней или внешней точки однородным простым сферическим слоем или же однородной либо неоднородной сферой, а также взаимное притяжение двух неоднородных сфер[1]. Производимые при этом разбиение фигур на элементы и вычисление интегральных сумм равносильны вычислению двойных интегралов по поверхности и тройных — по объему. Между тем общее понятие о таких интегралах ввели только Эйлер и Лагранж.

Другим примером могут служить многочисленные задачи на определение движения под действием тех или иных сил в соответствии со вторым законом Ньютона. Мы приводим такие задачи к интегрированию дифференциальных уравнений. Укажем, в частности, на 8-е и 9-е предложения второго отдела II книги о прямолинейном подъеме или спуске тяжелой точки в однородной среде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости. Дифференциальное уравнение движения будет

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \pm \frac{1}{g}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g \pm \frac{1}{g} v^2,$$

где z — расстояние движущейся точки от начальной на вертикальной прямой, $v = \frac{dz}{dt}$ — скорость, t — время и g — ускорение силы тяжести, причем $z = 0$ соответствует точке, в которой $v = 0$. Ньютон представляет все геометрически в виде соотношений между отрезками, изображающими

[1] В неоднородном случае плотность рассматривается как функция расстояния от центра сферы, т. е. на каждой сферической поверхности с тем же центром она постоянна.

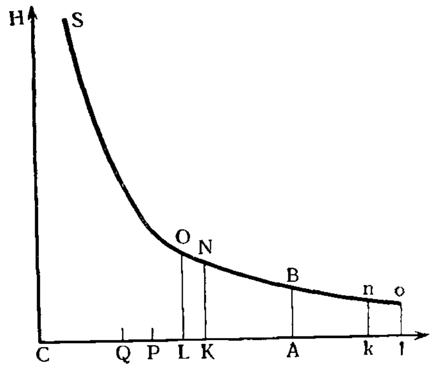


Рис. 38

силы, скорости и их приращения за весьма малые промежутки времени. Эти отрезки наносятся на горизонтальные оси: на рис. 38

$$AC = g, \quad Ak = \frac{v^2}{g}, \quad Ck = g + \frac{v^2}{g}{}^1,$$

$$AP = v, \quad PQ = dAP = dv \quad \text{и} \quad kl = dAk = \frac{2}{g} vdv.$$

Один из результатов Ньютона состоит в представлении пути z как функции скорости v. Переписав $\frac{dv}{dt}$ в виде

$$\frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{v\,dv}{dz},$$

так что переменные разделяются, мы, интегрируя, находим

$$z = \pm \frac{g}{2} \ln\left(1 \pm \frac{v^2}{g^2}\right).$$

Ньютон также сводит дело к квадратуре, но геометрической, изображая путь площадью $ABnK$ (или $ABNK$) равносторонней гиперболы с центром в точке C и асимптотами CA и CH, абсциссы которой суть $g + \frac{v^2}{g}$ (или $g - \frac{v^2}{g}$). Доказательство его заключается в проверке решения с помощью его дифференцирования, причем попутно применяется правило дифференцирования степени, доказанное непосредственно перед тем. Тут же устанавливается, что действующая сила выражается относительно z показательной функцией или, как пишет сам Ньютон, если взять все части пройденного пространства равными, то действующие силы составляют геометрическую прогрессию. Наконец, время подъема или падения выражается в функции скорости. Нашим интегралам

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g \pm \frac{1}{g} v^2},$$

[1] Это в случае подъема. В случае спуска $Ck = g - \frac{v^2}{g}$ и т. д.

т. е. арктангенсу и логарифмической функции, у Ньютона соответствуют квадратуры кругового и гиперболического секторов.

Конечно, дело не ограничивается задачами, которые мы записываем дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными и которые непосредственно приводятся к квадратурам. Так, задача о прямолинейном движении в случае притягивающей силы, пропорциональной расстоянию до центра притяжения, требует отыскания функции, являющейся решением линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -n^2z$$

(38-е предложение I книги) [1], а задача о движении тяжелой точки по циклоиде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости, выражается линейным относительно v^2 уравнением

$$\frac{vdv}{ds} + ns = \pm mv^2,$$

где s — длина дуги циклоиды, в функции которой и находится v^2 (29-е предложение шестого отдела II книги) [2]. Во многих этих случаях инфинитезимальные выводы в главной своей части облечены в геометрическую форму.

С аналитической записью дифференциальных уравнений и аналитическими приемами их решения мы встречаемся у Ньютона только в сочинении о методе флюксий (см. стр. 246).

Мы сказали, что Ньютон был математиком, механиком, физиком. Что же преобладало в его творчестве? Ответ на этот вопрос связан не столько с хронологией его занятий и объемом тех или иных работ, сколько с общей установкой изысканий, которая нашла выражение в первых же фразах предисловия к первому изданию «Математических начал»:

«Так как древние, по словам Паппа, придавали большое значение механике при изучении природы, то новейшие, отбросив субстанции и скрытые свойства, стараются подчинить явления природы законам математики.

В этом сочинении имеется в виду тщательное развитие приложений математики к физике» [3].

Как справедливо заметил переводчик цитируемого труда на русский язык академик А. Н. Крылов, по современной терминологии заглавие этой книги ближе всего передается словами «Математические основания физики». Разумеется, Ньютон был как математиком, притом аналистом, геометром и алгебраистом, так и физиком, притом экспериментатором и теоретиком, механиком и оптиком, а кроме того конструктором. Но непосредственной целью его как ученого было создание математи-

---

[1] Впрочем здесь нет ни приема решения этого уравнения, ни проверки ответа дифференцированием. Решение получается почти непосредственно из 10-го предложения (если тело обращается по эллипсу, то центростремительная сила, направленная к его центру, пропорциональна расстоянию точки от центра; отрезок рассматривается, как выродившийся эллипс).

[2] В этом случае решение, как сказали бы мы, есть сумма линейной и показательной функции.

[3] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 1.

ческой физики, и главным образом для этого он разрабатывал математический аппарат.

Характерно почти полное отсутствие интереса у Ньютона к задачам теории чисел, а также, что в его глазах «геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть *общей механики*, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения» [1]. Характерна, наконец, и его механическая трактовка понятий анализа, о которой уже упоминалось и будет еще сказано далее.

Исчисление бесконечно малых Ньютона

Уже в рукописях 1664—1666 гг. метод флюксий Ньютона выступил со всеми своими главными особенностями, а именно как алгоритм, основанный на:

1) дифференцировании (прежде всего степенной функции),

2) понимании интегрирования как действия, обратного дифференцированию, и

3) разложении функций в степенные ряды.

Именно применение степенных рядов и твердая уверенность в том, что любая функция может быть представлена таким рядом, сообщали в глазах Ньютона (так же как Лейбница) его методу характер универсального оперативного исчисления, наподобие алгебраического. Аналогию с алгеброй Ньютон особенно подчеркивал и ею оправдывал употребление самого слова «анализ», которое Виет ранее применил к алгебре. «Все, чего обычный анализ достигает (когда это возможно) при помощи уравнений с конечным числом членов, здесь всегда достигается при помощи бесконечных уравнений. И я не колеблюсь употреблять и здесь термин: *анализ*. Действительно, рассуждения в нем не менее достоверны, чем в первом, и уравнения не менее точны, хотя мы, люди конечного ума, и не в состоянии ни обозначить, ни воспринять все их члены так, чтобы точно узнать из них искомые величины» [2]. В другом месте он сравнивал степенные ряды и их роль в инфинитезимальном анализе с десятичными дробями и их ролью в арифметике и алгебре: «И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т. д.) можно с их помощью привести к роду простых количеств; именно... к бесконечному ряду дробей, у которых числители и знаменатели суть простые члены, и, таким образом, с небольшой затратой сил удается преодолеть трудности, в другом виде представляющиеся почти неодолимыми» [3]. Не удивительно, что в своих трудах по анализу Ньютон уделял столь важное место приближенному решению уравнений, особенно методу параллелограмма (ср. стр.232).

---

[1] *И. Ньютон*. Математические начала натуральной философии, стр. 2.
[2] *И. Ньютон*. Математические работы, стр. 21.
[3] Там же, стр. 25—26.

Разложения в бесконечные ряды

Одним из первых открытий Ньютона в учении о рядах явилось разложение степени бинома, найденное зимой 1664/65 г. О нем Ньютон довольно подробно рассказал во втором письме к Ольденбургу для Лейбница от 24 октября 1676 г. Изучая «Арифметику бесконечных» Валлиса, Ньютон также занялся интерполированием площадей кривых

$$y = (1 - x^2)^{n/2},$$

но только, в отличие от своего предшественника, который рассматривал последовательности, соответствующие интегралам с постоянными пределами 0 и 1, он проинтерполировал последовательность интегралов $\int\limits_0^x (1 - x^2)^{n/2}\,dx$ с переменным верхним пределом x для $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$, т. е. последовательность

$$x,\quad x - \frac{1}{3}x^3,\quad x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,\quad x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \ldots$$

Обнаружив здесь, что коэффициенты вторых членов $\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$ следуют в арифметической прогрессии, а также общий закон образования коэффициентов [1], он распространил его на нечетные значения $n=1, 3, 5, \ldots$,[2] а от этого перешел к интерполированию самой функции

$$y = (1 - x^2)^{n/2}$$

и затем

$$y = (1 - x^2)^m$$

при любом m. Так был установлен общий мультипликативный закон коэффициентов биномиального разложения для любого действительного показателя

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

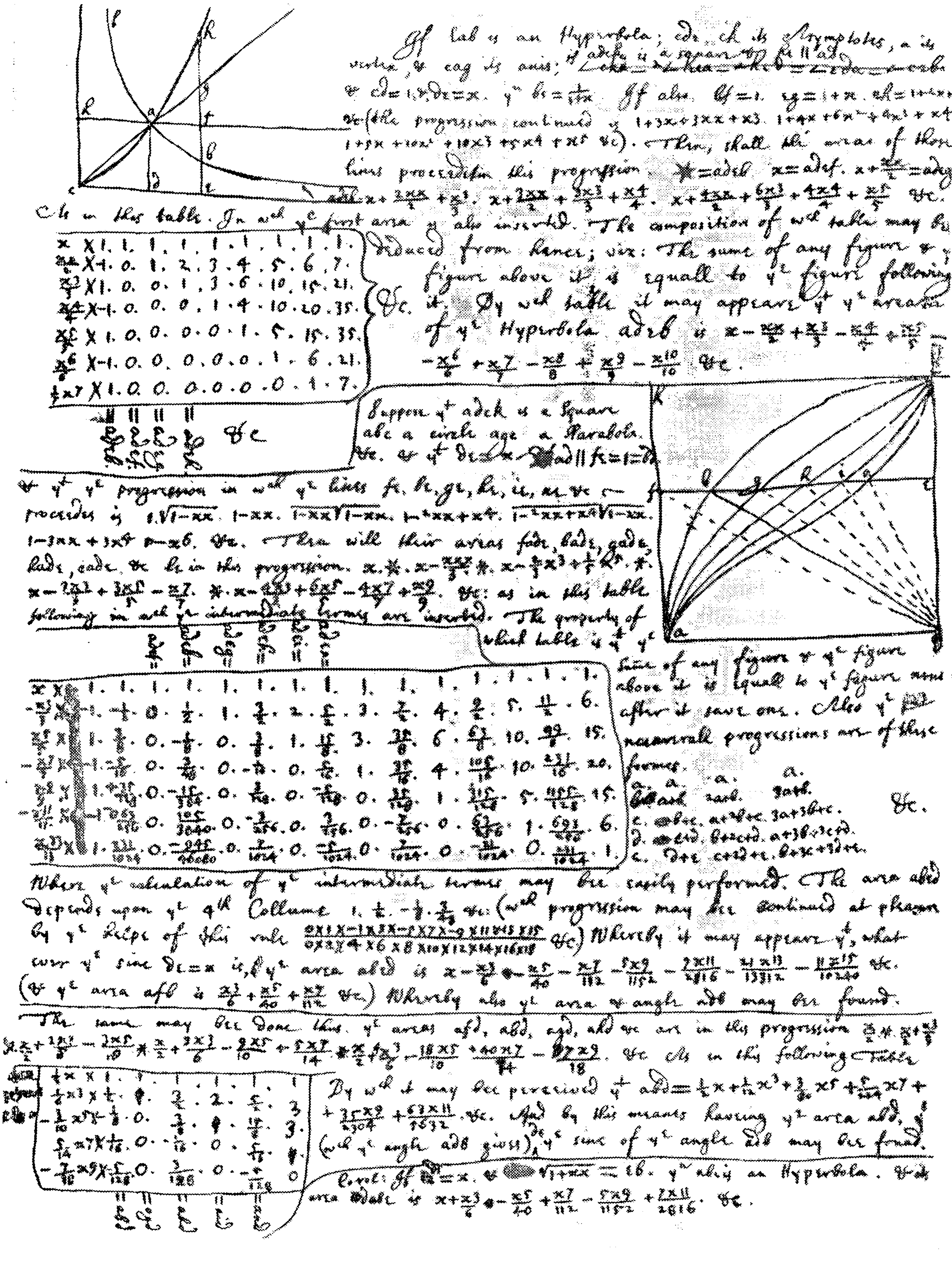
На фотографии (стр. 229) воспроизведена страница из черновых записей Ньютона, относящихся, вероятно, к осени 1665 г., т. е. из самых ранних по данному вопросу [3]. Наверху выведено разложение в степенной ряд площади $adeb$ ($cd = 1$, $de = x$) гиперболы lab с уравнением $y = 1/(1 + x)$, иными словами $\ln(1 + x)$, в виде $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ Этот результат

[1] Именно, знаменатели следуют в арифметической прогрессии 1, 3, 5, 7, ..., а числители получаются при последовательном перемножении чисел последовательности $\frac{m-0}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \ldots$ где m — числитель второго коэффициента.

[2] Например, при $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$ соответствующая площадь кругового сегмента есть

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \ldots$$

[3] Фотография этой страницы помещена перед титульным листом в «The Mathematical Papers of Isaac Newton», v. I; там же на стр. 122—126 напечатан ее текст.



Интерполяция и разложения в бесконечные ряды в черновых записях Ньютона, сделанных, вероятно, осенью 1665 г.

получен интерполированием. Квадратуры кривых $y=(1+x)^n$ при $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ представлены в верхней таблице; для этого величины в первом столбце, т. е. x, $x^2/2$, $x^3/3$ и т. д., умножаются на соответствующие числа в параллельных столбцах таблицы биномиальных коэффициентов, и произведения складываются. Второй столбец множителей, соответствующий $n=-1$, таков, что сохраняется аддитивное свойство элементов таблицы: сумма какого-либо элемента и стоящего под ним дает элемент справа от последнего. Напомним, что Меркатор получил разложение $\ln(1+x)$ по-другому и опубликовал его в 1668 г. (см. стр. 161). Далее следуют квадратуры площадей $fade$, $babe$, $gade$ кривых $y=(1-x^2)^{n/2}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, причем $ad=ak=dc=1$, $af=de=x$; они сведены в таблице в середине страницы. Значению $n=1$, т. е. площади кругового сектора, соответствует пятый столбец множителей, на которые надлежит умножать величины из первого столбца. Наконец, внизу выведено разложение в ряд площади кругового сектора adb как разности площадей кругового сегмента $adeb$ и треугольника deb, иными словами, разложение арксинуса

$$\frac{\arcsin x}{2}=\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{80}x^5+\frac{5}{224}x^7+\ldots$$

Сам Ньютон в первом письме к Ольденбургу для Лейбница от 13 июня 1676 г. записал биномиальное разложение в виде

$$\overline{P+PQ}\,|^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+$$
$$+\frac{m-3n}{4n}DQ+ \text{ и т. д.}$$

«Здесь $P+PQ$ обозначает величину, для которой следует найти корень, или степень, или корень из ее степени: P — первый член этой величины, Q — совокупность остальных членов, деленных на первый. Далее $\frac{m}{n}$ есть числовой показатель степени $P+PQ$, причем либо целой, либо (как я буду говорить) дробной, либо положительной, либо отрицательной. Именно, совершенно так же, как аналитики обычно вместо aa, aaa и т. д. пишут a^2, a^3 и т. д., и я вместо $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ пишу $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{5}}$ и т. д., а вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}»[1].

Не имея средств доказать справедливость найденного разложения в общем виде, Ньютон проверил его (с нашей точки зрения, чисто формально) на отдельных примерах; с помощью возведения в квадрат ряда для $(1-x^2)^{1/2}$, извлечения квадратного корня $\sqrt{1-x^2}$ по правилам алгебры и возведения в куб ряда для $(1-x^2)^{1/3}$. В XVIII в. было предложено немало доказательств формулы бинома Ньютона, иногда весьма интересных по идее, но неполноценных, так как оставлялась в стороне проблема сходимости. Полное исследование условий сходимости биномиального ряда в комплексной области дал Н. Г. Абель (1826).

В «Анализе с помощью уравнений» обобщенной формулой бинома Ньютон не воспользовался и здесь производил разложения в ряды при помощи формально-алгебраических операций: неограниченного деления

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 218.

многочлена на многочлен, в частности ряда на ряд, и извлечения корней. Например, спрямление дуги эллипса, приведенное к интегрированию функции $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$, он произвел, разложив сначала в ряды оба квадратных корня, затем поделив числитель на знаменатель и, наконец, почленно проинтегрировав частное [1]. Так в форме бесконечного ряда был впервые выражен эллиптический интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}\,dx = x + \left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{6}a\right)x^3 + \left(\frac{3}{40}b^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{40}a^2\right)x^5 + \dots$$

Располагая разложением величины y в ряд по степеням x, Ньютон умел обратить ряд, т. е. найти разложение x по степеням y. Комбинирование этих и некоторых других приемов доставляло новые разложения. Мы ограничимся одним примером из того же «Анализа с помощью уравнений». Прежде всего из характеристического треугольника для окружности $y^2 = 1 - x^2$ длина дуги $s = \arcsin x$ выражается интегралом $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, так что

$$s = \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

Обращение ряда, т. е. разложение $x = \sin s$, производится на основе метода неопределенных коэффициентов в соединении с методом последовательных приближений. Берется такое же число членов данного ряда, сколько хотят найти в обращенном, скажем три:

$$s = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5,$$

и полагается

$$x = As^\alpha + p,$$

причем p предполагается выраженным через высшие степени s. Тогда показатель α подбирается так, чтобы после подстановки x в первое уравнение получились по крайней мере два члена одинаковой степени, низшей, чем остальные, а коэффициент A так, чтобы эти члены взаимно уничтожились. В данном случае, очевидно, $\alpha = 1$ и $A = 1$, и при подстановке получим

$$0 = p + \frac{1}{6}(s^3 + 3s^2p + \dots) + \frac{3}{40}(s^5 + \dots).$$

Если теперь положить

$$p = Bs^\beta + q,$$

[1] Для упрощения выкладок Ньютон рекомендует еще сначала избавиться от радикала в знаменателе. О постоянной интегрирования см. стр. 235—236.

то из тех же соображений определяется $\beta = 3$ и $B = -{}^1/_6$ и второе уравнение перейдет в такое:

$$0 = q + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}s^5 + \ldots\right) + \frac{3}{40}(s^5 + \ldots).$$

Далее можно аналогично взять $q = Cs^\gamma + r$ и т. д. и в конце концов возникает степенной ряд для синуса:

$$x = \sin s = s - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{120}s^5 - \frac{1}{720}s^7 + \ldots$$

или

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Это тот же процесс, который привел Ньютона к методу параллелограмма и который был обобщением его приема численного решения алгебраических уравнений.

После этого по формуле

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Ньютон получил ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Обращая ряд для

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Ньютон выразил показательную функцию

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

впрочем, он не употреблял еще символа e^x.

Во втором письме к Ольденбургу для Лейбница Ньютон привел формулы обращения рядов с буквенными коэффициентами. Если

$$y = ax + bx^2 + cx^2 + dx^4 + \ldots,$$

то

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}y^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}y^4 + \ldots$$

Если же

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \ldots,$$

то

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^4}y^3 - \frac{3b^2 - ac}{a^7}y^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}y^7 + \ldots$$

Ньютон проявляет заботу о сходимости получаемых разложений. Он даже пытается доказать, что при достаточно малом x разность между корнем уравнения (в том числе с бесконечным числом членов) и его последовательными приближениями, т. е. величина, которую он обозначает последовательно p, q, r, ..., всегда становится меньше всякой данной величины и, как он выражается, совершенно исчезает при бесконечном продолжении действия. Приводимые им соображения недостаточны. Сначала он рассматривает бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $x \leqslant 1/2$, затем указывает, что в других случаях числовые коэффициенты рядов по большей части непрестанно убывают, а к этому добавляет: «В случае же, если бы они начали возрастать, достаточно предположить x еще в несколько раз меньше» [1].

Как упоминалось, Ньютон применял также разложения в ряды по дробным и отрицательным степеням аргумента. К вопросу об употреблении рядов при решении дифференциальных уравнений мы обратимся далее.

Флюенты, флюксии и моменты

Простая в своих принципах структура исчисления бесконечно малых Ньютона отчетливо выражена в «Анализе с помощью уравнений», часть содержания которого мы только что рассмотрели. В этом труде приведены всего три правила. Первое правило имеет предметом квадратуру простых кривых: если $y = ax^{m/n}$, где m, n—целые числа, то площадь есть $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. При $m/n > 0$ имеется в виду квадратура площади от начала координат до ординаты точки (x, y), т. е. наш интеграл $\int\limits_0^x y dx$ с переменным верхним пределом. При $m/n < -1$ (примеры $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3/2}$) имеется в виду квадратура пространства между кривой и осью абсцисс (асимптотой) справа от ординаты точки (x, y), т. е. наш несобственный интеграл $\int\limits_x^\infty y\, dx$; однако, так как Ньютон вычисляет в действительности только первообразную функцию (в его примерах $-x^{-1}$ и $-2x^{-1/2}$), то площадь при вычислении получается отрицательной. Наконец, в случае $m/n = -1$ имеется в виду любая неограниченная часть площади между гиперболой и асимптотой, и этим объясняется результат $\frac{1}{0} x^{0/1} = \infty$. Примеров, в которых $-1 < m/n < 0$, здесь нет.

Второе правило относится к квадратуре «сложных кривых с помощью простых» и выражает аддитивное свойство интеграла в конкретном случае суммы нескольких степенных функций. Специально указано, что площади, лежащие под осью абсцисс, выражаются отрицательными числами.

Последнее, третье, правило служит для квадратуры всех остальных алгебраических кривых, для чего их ординаты выражаются суммами бесконечных степенных рядов, «причем действовать над буквами следует совершенно таким же образом, как действуют в арифметике, когда делят, извлекают корни или решают уравнения, пользуясь десятичными дробями» [2]. Примеры таких разложений рациональных, иррациональных и неявных алгебраических функций уже приводились.

Метод квадратур, разработанный для алгебраических кривых, переносится и на трансцендентные,— Ньютон вслед за Декартом говорит

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 23.
[2] Там же, стр. 5.

о геометрических и механических линиях. Это поясняется прежде всего на квадратуре циклоиды, для чего используется уже упоминавшееся ее свойство (см. рис. 36 на стр. 207), записываемое уравнением $LN = LM + \overset{\smile}{AM}$. Если принять $AB = 1$, $AL = x$, $LN = y$, то

$$LM = \sqrt{x - x^2} = x^{1/2} - \frac{1}{2} x^{3/2} - \frac{1}{8} x^{5/2} - \frac{1}{16} x^{7/2} - \ldots$$

а дифференциал дуги AM есть $\dfrac{dx}{2\sqrt{x - x^2}}$, так что

$$\overset{\smile}{AM} = x^{1/2} + \frac{1}{6} x^{3/2} + \frac{3}{40} x^{5/2} + \frac{5}{112} x^{7/2} + \ldots$$

Поэтому

$$y = 2x^{1/2} - \frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{20} x^{5/2} - \frac{1}{56} x^{7/2} - \ldots$$

и, следовательно,

$$\text{пл. } ANL = \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{2}{15} x^{5/2} - \frac{1}{70} x^{7/2} - \frac{1}{252} x^{9/2} - \ldots$$

Ньютон еще производит спрямление дуги квадратрисы и заключает: «И я не знаю случаев такого рода, на которые не распространяется этот метод в его различных выражениях»[1].

Доказательство первого правила, как и некоторых других изложенных в «Анализе с помощью уравнений» приемов,— скажем, спрямления кривых,— имеет чисто инфинитезимальный характер. Оно опирается на понятие «момента» величины, как ее бесконечно малого приращения, причем подчеркивается, что по моменту можно определить и саму величину. Доказательство ведется параллельно в аналитическом и геометрическом плане. Именно, устанавливается, что ордината $BD = y$ кривой $AD\delta$ (рис. 39) с площадью

$$ABD = z = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$$

есть $y = ax^{m/n}$ (напомним, что m/n—рациональная дробь). Пусть x возрастана бесконечно убывающий или исчезающий момент $B\beta = o$ (этим знаком Ньютон пользовался еще осенью 1664 г.[2]), тогда площадь увеличивается на величину $BD\delta\beta$ или на прямоугольник $BKH\beta = ov$, где v — некоторая промежуточная ордината кривой. Обозначив $na/(m+n) = c$ и $m + n = p$, Ньютон переписывает выражение для площади в виде $z^n = c^n x^p$ и подставляет в него $z + ov$, $x + o$. Затем он опускает в равенстве $z^n + novz^{n-1} + \ldots = c^n (x^p + pox^{p-1} + \ldots)$ члены, обозначенные многоточием, «которые

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 21.

[2] Этот же знак и в том же смысле применил в «Общей части геометрии» (1668) Дж. Грегори и много раньше, около 1638 г., в своем изложении метода касательных Ферма французский любитель математики Жан де Богран (ум. 1640). Возможно, что употребление знака o для выражения исчезающей величины, обращающейся в ничто, было связано с тем, что она походит на маленький нуль.

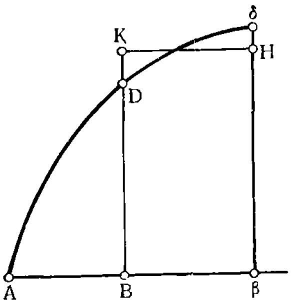


Рис. 39

в конце концов исчезают»[1], отбрасывает равные z^n и $c^n x^p$, делит на o и, заменив v равным ему (при исчезании o) y, получает $y = ax^{m/n}$. «Поэтому и обратно,— заключает он,— если $ax^{\frac{m}{n}} = y$, то $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Что и требовалось доказать»[2]. Так впервые был предложен читателям аналитический вывод значения интеграла $\int\limits_a^x x^k dx$ при $k \neq -1$ посредством дифференцирования степенной функции. Параллельное геометрическое рассуждение, не связанное с частным видом уравнения кривой $AD\delta$, содержит доказательство с помощью дифференцирования общей теоремы: площадь криволинейной трапеции есть интеграл функции, выражающей ординату кривой, по абсциссе.

Все это было совершенно новым в то время, и значение вывода Ньютона не умаляется ни тем, что он ограничился степенной функцией с рациональным показателем, ни тем, что здесь еще не был поставлен вопрос об объеме класса первообразных функций данной функции, т. е. о постоянной интегрирования.

Заметим, что аналитической формулы, которую теперь называют по имени Ньютона и Лейбница, т. е. формулы, выражающей определенный интеграл через разность значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования, не было ни у того, ни у другого ученого. Она появляется только в XVIII в., причем в учебном руководстве лишь во втором томе «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» (Traité du calcul différentiel et intégral, Paris, 1798) профессора Политехнической школы в Париже С.-Ф. Лакруа. Но по существу правило, выражаемое формулой Ньютона — Лейбница, было хорошо известно им обоим. Ньютон его высказал в геометрической форме вполне отчетливо, хотя и мимоходом, в одном примере «Метода флюксий и бесконечных рядов».

«Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы,— писал он,— эту площадь всегда следует брать равной разности значений z, соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади»[3].

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 22.
[2] Там же, стр. 23. Случай $m/n=-1$ Ньютон здесь оставляет в стороне (см. стр. 233).
[3] *И. Ньютон.* Математические работы , стр. 121.

Из трех основных понятий исчисления бесконечно малых — интеграла, дифференциала и производной — в «Анализе с помощью уравнений» явно выделено только одно — соответствующий дифференциалу момент, понимаемый как бесконечно малая, исчезающая или же неделимая величина, например, как ордината, описывающая своим движением площадь.

В «Методе флюксий и бесконечных рядов» исчисление Ньютона получило гораздо более полное развитие, причем основные понятия и задачи формулируются в механических или квазимеханических терминах. Подобно тому как геометрия в глазах Ньютона была частью общей механики, имеющей дело с точными измерениями (см. стр. 227), так и новый анализ он трактовал, по сути дела, как часть общей механики, рассматривающую движение в его наиболее абстрактном выражении. Прежде всего в терминах механики формулируются две проблемы, к которым можно свести все задачи анализа:

«I. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

II. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути»[1].

Для такого сведéния все величины рассматриваются, подобно пути, как порождаемые в процессе непрерывного роста или убывания. Они называются флюентами, т. е. текущими величинами, причем их универсальным аргументом является время. Под «временем» здесь понимается, впрочем, не время как таковое, а любая величина, равномерное течение которой выражает и измеряет настоящее время. Флюенты тут же выступают не просто как функции «времени», но в своих взаимоотношениях со скоростями своего изменения, или флюксиями. Таким образом, двумя центральными понятиями анализа оказываются (в терминологии, которую мы применяем вслед за Лагранжем) взаимно обратные понятия первообразной и производной функции. Но и здесь ничего не говорится о многозначности операции нахождения флюенты по данной флюксии,—на это Ньютон в общей форме указал только в конце последнего своего труда по анализу — «Рассуждения о квадратуре кривых». «Всякую флюенту, получаемую по первой флюксии,— писал он здесь,— можно увеличить или уменьшить на любую не текущую величину»[2]; в случае же, если флюента находится по какой-либо данной n-й флюксии (производной), то к ней можно прибавить любую величину, у которой равна нулю n-я флюксия. В «Методе флюксий и бесконечных рядов» флюксии высших порядков еще не употреблялись.

Для исчисления флюксий Ньютон ввел специальную символику, обозначая их с помощью точек над буквами, выражающими флюенты, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

где t— «время», и т.п. Однако такие обозначения Ньютон начал употреблять лишь четверть века спустя после открытия самого метода флюксий и, например, в его собственной рукописи «Метода флюксий» скорости изменения величин v, x, y, z обозначаются новыми буквами l, m,n, r. Между тем еще в 1665—1666 гг. Ньютон применял пометку букв точками для обозначения произведений частных производных функции двух переменных на некото-

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 45.
[2] Там же, стр. 192.

рые степени переменных [1]. Впрочем, поскольку в «Методе флюксий» Ньютон явно оперировал только производными первого порядка, отсутствие специального знака дифференцирования не было особенно стеснительным. Применение символа флюксии $\dot{x}$ и ему подобных засвидетельствовано у Ньютона лишь с конца 1691 г., и, например, он объяснил его в письмах к Валлису от 27 августа и 17 сентября 1692 г., где употреблены также знаки флюксий высших порядков, как $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$. Как говорилось, Валлис напечатал эти письма в 1693 г.

Две главные проблемы анализа в терминах метода флюксий гласят: «1. По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями». Это задача дифференцирования функции нескольких переменных, зависящих от «времени».

«2. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами» [2]. Это задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.

В «Методе флюксий и бесконечных рядов» находят применение и уже встречавшиеся нам неограниченно малые моменты текущих величин, которые, как указывает Ньютон, пропорциональны их флюксиям, так что моменты величин x, y, z, ... будут соответственно $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, ..., где o — момент времени. Оперируя моментами точно так же, как в «Анализе с помощью уравнений», Ньютон на примерах учит дифференцированию целых многочленов от двух или большего числа переменных $f(x, y, z, \ldots)=0$, получая при этом для флюксий соотношения, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\ldots=0.$$

Это уравнение формально полностью соответствует уравнению в дифференциалах

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\ldots=0.$$

Поскольку Ньютон ограничивается правилами дифференцирования степенной функции и суммы или разности (последнее в силу очевидности даже не высказано), он при наличии рациональных и иррациональных функций справляется с возникающей трудностью, приравнивая их вспомогательным флюентам. Избавляясь от дробей и радикалов, он находит соотношения для флюксий всех переменных, а затем получает уравнение между флюксиями исходных флюент, исключая флюксии введенных величин. Это позволяло обойтись без особых правил для флюксий частного и функции от функции, но придавало алгоритму Ньютона в сравнении с дифференциальным исчислением значительную громозд-

[1] В черновых записях 1665 г., посвященных общей задаче проведения касательных и исследованию кривизны плоских кривых, Ньютон при дифференцировании уравнений ввел знак $\breve{a}$ для $x\frac{da}{dx}$, где a есть функция x, а также в случае уравнения $\mathfrak{X}\equiv f(x, y)=0$ знаки $\mathfrak{X}=x\frac{\partial f}{\partial x}$, $\mathfrak{X}=y\frac{\partial f}{\partial y}$, $\mathfrak{X}=xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\mathfrak{X}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\mathfrak{X}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. См. «The Mathematical Papers of Isaac Newton», том. I, стр. 151, прим. 20, стр. 274 и 290. В дальнейшем этой символикой Ньютон не пользовался.

[2] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 46 и 51.

кость. Ньютон не сформулировал в своем главном труде по теории флюксий даже правила дифференцирования произведения (ср. стр. 243).

Следует заметить, что в одной рукописи, относящейся, вероятно, ко времени составления «Метода флюксий», Ньютон гораздо полнее изложил начала алгоритма дифференцирования. Этот небольшой фрагмент вообще весьма интересен [1]. Он начинается с формулировки ряда аксиом, в третьей из которых утверждается, что флюксия суммы или разности равна сумме или разности соответствующих флюксий. Затем выводятся несколько десятков теорем и королляриев о дифференцировании различных алгебраических выражений и геометрических величин. Теорема I гласит, что в случае пропорции

$$A : B = C : D$$

имеет место равенство

$$A \cdot flD + D \cdot flA = B \cdot flC + C \cdot flB$$

(сокращенное обозначение флюксий в виде $fl : A$ и т. п. имеется в самом фрагменте). Отсюда, как следствия, получаются правила дифференцирования произведения, частного, степени и корня,— например, в случае частного, исходя из пропорции $A : 1 = B : (B/A)$. Ньютон вновь и совсем по-другому вывел эти правила в «Математических началах» (1687), где, однако, правило дифференцирования частного не выделено явным образом (см. стр. 243). Однако в публикации основных правил дифференцирования Ньютона на три года опередил Лейбниц (см. стр. 258).

Заслуживает упоминания, что I теорема доказана в рукописи дважды. В первом доказательстве, зачеркнутом автором, вывод основан на отбрасывании бесконечно малых членов, в другом же вычисление имеет характер предельного перехода, хотя термин «предел» и не употребляется.

Мы проследим теперь дальнейшее развитие основных понятий метода флюксий, оставляя пока в стороне его приложения.

Метод пределов Ньютона

Применение инфинитезимальных представлений было настолько эффективно, что Ньютон никогда от него не отказывался. Однако употребление бесконечно малых величин, будь то неделимые, или количества, меньшие всякого данного, или простого чрезвычайно малые, со временем начало представляться ему недостаточно строгим. По поводу постоянно употреблявшегося отбрасывания бесконечно малых слагаемых он писал: «В математических вопросах не следует пренебрегать и самыми малыми ошибками» [2]. Для обоснования инфинитезимальных приемов и их приложений Ньютон впервые разработал общую теорию предельных переходов, которую под именем метода первых и последних отношений изложил в первом отделе I книги и втором отделе II книги «Математических начал натуральной философии». Здесь вводится и самый термин «предел» (limes). Правда, понятию предела не дается какого-либо определения или предварительного описания его основных свойств, и это ослабляет зна-

[1] The Mathematical Papers of Isaac Newton, vol. III, Cambridge, 1970, p. 328—353.
[2] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 168. (В нашем переводе имеются небольшие отличия от перевода Д. Д. Мордухай-Болтовского.— *Ред.*)

чение доказательств теорем о предельных переходах. Но последующие разъяснения и примеры раскрывают содержание этого понятия, которое Ньютон считал интуитивно ясным и выражающим свойства реальных величин и процессов. Весьма существенно, что изучаемые в анализе величины Ньютон мыслил как непрерывные в области их определения (за исключением отдельных точек, в которых они могут быть бесконечными) и потому как достигающие своих предельных значений, если таковые существуют; эти предельные значения могут быть и односторонними пределами (в нашей терминологии)[1].

Метод пределов в «Математических началах» изложен в двенадцати леммах, из которых одиннадцать помещены в первом отделе I книги, а одна — в первом отделе II книги.

Приведем текст 1-й леммы и ее доказательства:

«Величины, а также отношения величин, которые постоянно стремятся к равенству в продолжение любого конечного времени и которые приближаются друг к другу ближе, чем на любую данную разность, ранее конца этого времени, напоследок становятся равными.

Если ты отрицаешь это, пусть они будут в конце концов не равны и пусть их последняя разность будет D. Следовательно, они не могут подойти к равенству ближе, чем на данную разность D, в противность предположенному»[2].

Следующие леммы служат для применения метода пределов к измерению величин, дифференциально-геометрическим вопросам и механике. В 3-й лемме доказано равенство единице последних отношений между площадями криволинейной фигуры $AabcdE$ и вписанной и описанной около нее фигур, составленных из прямоугольников с неравными основаниями, наибольшее из которых безгранично уменьшается (во 2-й лемме разобран частный случай равных оснований). Для этого устанавливается (рис. 40, стр. 240), что разность площадей описанной и вписанной фигур меньше, чем площадь прямоугольника с основанием AF, равным наибольшему из оснований, и с высотой Aa; эта же площадь может быть сделана меньше любой данной площади (простоты ради Ньютон ограничивается монотонной убывающей кривой). Таким образом, сумма площадей этих исчезающих (evanescentium) прямоугольников совпадает в пределе с площадью криволинейной фигуры.

В следствии из 4-й леммы доказано, что «если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, т. е. первой к первой, второй ко второй и т. д., остается постоянным, то и самые величины будут находиться в этом же отношении»[3].

Доказательство приводится к рассмотренному в самой 4-й лемме частному случаю, именно к криволинейным фигурам и вписанным в них прямоугольникам, пропорциональным частям величин. 4-я лемма непосредственно вытекает из ей предшествующей.

---

[1] Ньютон различал первые отношения, primae rationes величин, процесс изменения которых начинается, и последние отношения, ultimae rationes величин, процесс изменения которых завершается. Мы будем иногда пользоваться этой терминологией.

[2] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 57. (Здесь и далее перевод нами несколько изменен.— *Ред.*)

[3] Там же, стр. 59.

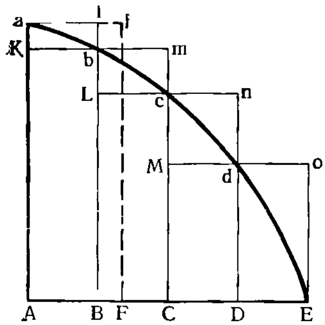


Рис. 40

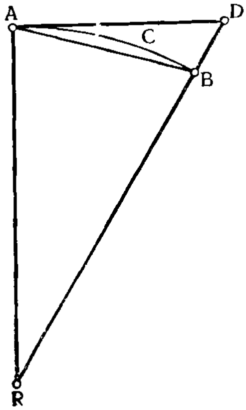


Рис. 41

В 6-й лемме устанавливается, что угол между касательной и проходящей через точку касания исчезающей хордой (угол BAD на рис. 41) напоследок исчезает, причем предполагается, что точка касания лежит в области непрерывной кривизны[1]. Согласно 7-й лемме, в том же предположении, последнее отношение исчезающих дуги $\smile{ACB}$, ее хорды AB и отрезка касательной AD равно единице. В одном из следствий сказано, что ввиду этого при всяком рассуждении о пределах отношений эти длины могут быть взяты одна вместо другой. В «Методе флюксий» важный принцип, позволяющий заменять в предельных отношениях одни бесконечно малые другими, им равносильными, высказан общим образом: «в такого рода вычислениях я принимаю равными величины, отношение которых... лишь бесконечно мало отличается от отношения равенства»[2]. Наконец, в 11-й лемме (мы опускаем 10-ю лемму чисто механического характера) доказано, что расстояние от точки кривой, бесконечно близкой к точке касания, до касательной пропорционально квадрату соединяющей обе точки хорды, причем кривизна предполагается в точке касания не бесконечно малой и не бесконечно большой. При выводе используется фактически радиус кривизны. Несколько далее Ньютон подробнее останавливается на проблеме угла касания между кривой и касательной к ней в исключенных перед тем из рассмотрения точках и различает классы углов касания, друг относительно друга бесконечно малых, в зависимости от порядка малости расстояния от касательной точки, бесконечно близкой к точке касания. В этих рассуждениях содержались ростки теории соприкосновения кривых, начало которой тогда же положил Лейбниц (см. стр. 274).

Общий характер и огромное значение этих лемм очевидны. Однако Ньютон не приводит теорем о единственности предела и его основных арифметических свойствах, о пределе суммы, произведения и т. п. И он не устанавливает связи между понятием предела и переменной бесконечно малой, хотя последнее и не было ему чуждым.

---

[1] Кривизна кривой в точке принимается равной кривизне круга кривизны, касающегося в этой точке кривой так, что между ним и кривой нельзя провести другого касающегося круга. Об этом говорится в «Методе флюксий».

[2] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 101.

В «Поучении», примыкающем к леммам, метод первых и последних отношений сравнивается с другими и подчеркиваются его преимущества. «Предыдущие леммы,— пишет Ньютон,— я предпослал, чтобы избежать скучного изложения долгих доказательств приведением к нелепости по образцу древних»[1]. Правда, доказательства сокращаются и по методу неделимых, но так как «допущение неделимых несколько грубо (durior — так выразился сам Кавальери.— *Ред.*) и потому метод этот почитается менее геометрическим, я предпочел сводить доказательства последующих предложений к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих величин, т. е. к пределам сумм и отношений»[2].

Метод пределов дает такие же результаты, как метод неделимых, и Ньютон предупреждает, что если в дальнейшем он станет рассматривать величины, как составленные из постоянных частиц или принимать маленькие отрезки кривых за прямые, то на деле будет иметь в виду только исчезающие делимые величины и не суммы и отношения определенных частей, но всегда пределы сумм и отношений.

Вслед за тем Ньютон обращается к вопросу, который стал предметом дискуссий более чем на сто лет,— вопросу о том, как надлежит понимать отношение исчезающих величин. Эта проблема имела капитальное значение: ведь флюксии вычислялись именно как такие отношения. «Возражают,— говорит Ньютон,— что не существует последнее отношение исчезающих величин, ибо отношение величин, до того как они исчезли, не есть последнее, а если они исчезли, то нет отношения. Но на основании такого же аргумента можно утверждать, что нет последней скорости у тела, прибывающего в какое-нибудь место и перестающего двигаться, ибо до прибытия тела в это место это не последняя скорость; а когда оно уже прибыло, скорости нет. Ответ простой: ибо под последней скоростью следует разуметь ту, с которой движется тело не до прибытия в свое последнее место, когда движение прекращается, и не после, но в самый момент его достижения, т. е. именно ту скорость, с которой тело достигает своего последнего места, когда движение прекращается. Аналогично под последним отношением исчезающих величин нужно понимать отношение величин не до и не после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают. Подобным же образом первое отношение зарождающихся величин есть то, с которым они начинают существовать, а первая или последняя сумма есть та, с которой они начинают или перестают существовать, или же увеличиваться, или уменьшаться»[3].

Таким образом, основным аргументом Ньютона была апелляция к реальности мгновенной скорости, в частности к определенной и, вообще говоря, не равной нулю скорости в момент остановки движения. Такие аналогии утратили силу в глазах ближайших поколений. Понятия анализа нуждались в обосновании, свободном от апелляций к геометрической или механической наглядности. В глазах математиков XVIII в. сама идея мгновенной переменной скорости утрачивает характер очевидного реального свойства движения тел и становится абстрактным понятием, подлежащим определению средствами анализа, между тем как ранее анализ служил только для вычисления значения скорости.

---

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 68.
[2] Там же, стр. 69.
[3] Там же.

Защита метода пределов у Ньютона не ограничивается сказанным. Могут еще возразить: если имеются последние отношения исчезающих величин, то имеются и сами последние величины и неделимые. На это Ньютон отвечает, что последние отношения, с которыми исчезают величины, суть отношения не последних величин, но только пределы, «к которым все время приближаются отношения беспредельно (sine limite) убывающих величин и к которым они могут подойти ближе, чем на любую данную разность, хотя и не могут ни превзойти их, ни достигнуть их ранее, чем величины уменьшатся бесконечно»[1]. Он поясняет свою мысль на бесконечно возрастающих величинах с данной постоянной разностью: их последнее отношение существует и равно единице, хотя нет самих последних или наибольших величин, имеющих такое отношение. Оставался все же вопрос, особенно беспокоивший математиков того и позднейшего времени: что же происходит с отношением, когда величины уменьшатся бесконечно? Ведь в концепции Ньютона переменные достигают своих пределов и, значит, исчезающие величины достигают нуля.

Вероятно, наиболее соответствует взглядам Ньютона такое понимание дела (которое, впрочем, у него самого не высказано со всей полнотой). Пусть для примера ищется флюксия величины x^2, т. е. предел отношения $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ при $h \to 0$. Функция

$$f(h) = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h}$$

определяется написанной формулой, как непрерывная, для всех h, кроме $h=0$, и имеет предельное значение $2x$ при $h \to 0$. Мы могли бы доопределить по непрерывности $f(h)$ при $h=0$ и построить новую всюду определенную функцию $F(h)$, совпадающую с $f(h)$ для всех $h \neq 0$ и с ее предельным значением $2x$ при $h=0$. Ньютон с самого начала мыслит непрерывную функцию $F(h)$, значение которой при $h=0$ выступает, как «отношение, с которым исчезают» величины $2xh+h^2$ и h. Эйлер позднее решился перейти к открытой трактовке производных, как особого рода отношений двух нулей.

Что же такое исчезающие величины? Ньютон неоднократно подчеркивает, что их надо «мыслить, как все время беспредельно уменьшающиеся» (semper diminuendas sine limite)[2]. Казалось бы, что это наша бесконечно малая переменная величина, которую Ньютон лишь остерегается называть бесконечно малой, чтобы не смешали ее с бесконечно малыми в понимании других математиков того времени. Однако к такой трактовке исчезающей величины у Ньютона примешивается в тех же «Математических началах» и другой оттенок, когда он в первом отделе II книги вводит — в печати впервые — понятие момента величины. Указав, что он рассматривает здесь величины, как неопределенные и непостоянные (indeterminatae et instabiles) и как бы порождаемые постоянным движением или течением, он называет моментами их мгновенные (momentanea) приращения или уменьшения. «Но остерегайся,— продолжает Ньютон,— смотреть на них (т. е. на моменты.— *Ред.*), как на конечные частицы. Как только моменты становятся конечной величины, они перестают быть моментами... Их надо рассматривать как едва зарождающиеся начала

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 70.
[2] Там же, стр. 70.

конечных величин. И в этой лемме рассматривается не величина моментов, но первое отношение их, как зарождающихся. То же самое получится, если вместо моментов брать либо скорости приращений и уменьшений (которые можно также именовать движениями, изменениями или флюксиями величин), либо любые конечные величины, пропорциональные этим скоростям»[1].

В приведенной цитате, в которой Ньютон впервые употребил в печати слово «флюксия», он вводит некое особое состояние или категорию «едва зарождающихся начал» конечных величин. Моменты оказываются не синонимом нашей переменной, имеющей пределом нуль (т. е. некоторого множества конечных величин), а переменными, уже не нулевыми, но еще не конечными. Во втором и третьем изданиях «Математических начал» фраза «Как только моменты становятся конечной величины, они перестают быть моментами» (и еще одна, для нас несущественная и потому не приведенная) была заменена другой: «Конечные частицы не суть моменты, но сами величины, порожденные из моментов», но в чем состоит процесс порождения и какова природа моментов, объяснено не было.

Упоминаемая Ньютоном лемма — это предложение о моменте произведения величин A, B, C, ..., моменты которых обозначены соответственно a, b, c, ... Прежде всего лемма доказывается для двух множителей, причем, чтобы избежать отбрасывания бесконечно малых высших порядков, которым он пользовался в других сочинениях, Ньютон образует не разность $(A + a)(B + b) - AB$, но разность

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right),$$

которая немедленно дает момент произведения в виде $Ab + Ba$. Затем лемма распространяется на любое число множителей[2] и любую натуральную степень, на отрицательные степени (исходя из дифференцирования тождества $\frac{1}{A^n}A^n = 1$) и на рациональные степени (если $A^{m/n} = B$, то $A^m = B^n$, и т. д.). В лемме содержалось по существу и правило дифференцирования частного, но оно не было сформулировано отдельно.

Во «Введении» к «Рассуждению о квадратуре кривых» Ньютон вновь изложил свои взгляды на основания анализа. Флюксия x^n при любом действительном показателе выводится путем вычисления последнего отношения $\frac{(x+o)^n - x^n}{o}$, причем числитель раскладывается в ряд по правилу бинома. Здесь о моментах величин вовсе не говорится, Ньютон оперирует только конечными приращениями и пределами их отношений. «Подобное построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры. Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же, как и на фигурах, которые в методе *неделимых* обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать

---

[1] *И. Ньютон.* Математические начала натуральной философии, стр. 332.

[2] Точно так же, как делается теперь, когда при дифференцировании произведения ABC его пишут в виде $ABC = AD$, где $D = BC$, и т. д.

с должной осторожностью»[1]. Но «Введение» было написано около 1691 г., много после основного текста «Рассуждения», в котором Ньютон сохранил и «очень малую величину o» и «моменты, т. е. мгновенные одновременные приращения величин z, y, x, т. е. $o\dot{z}$, $o\dot{x}$, $o\dot{y}$».

Любопытно, что в заключительном «Поучении» рассматриваемого труда, добавленном, вероятно, вместе с «Введением», Ньютон приблизился к другой точке зрения на момент, сходной с современной. В современном изложении дифференциал dy функции $y(x)$, имеющей конечную производную, вводится обычно, как функция двух аргументов x, Δx, линейная относительно Δx и такая, что разность $\Delta y - dy$ бесконечно мала относительно Δx, если Δx взять бесконечно малым; говорят, что дифференциал функции есть главная линейная часть ее приращения. Из этого определения следует, что $dx = \Delta x$ и $dy = y'dx$. В XVII в., да и в XVIII в. связь и различие между понятиями приращения и дифференциала функции были далеки от ясности. Долгое время бесконечно малое приращение функции и дифференциал отождествляли и во всех предыдущих рассмотрениях момент Ньютона выступал именно как бесконечно малое изменение флюенты. Во «Введении» Ньютон пишет, что флюксии относятся «почти как приращения флюент, произведенные в равные и крайне малые частицы времени, и, точнее говоря, находятся в первом отношении зарождающихся приращений»[2]. В «Поучении» он входит в подробности, заслуживающие внимания.

Представляя себе флюенты разложенными в ряды по степеням приращения аргумента, Ньютон говорит, что их последовательные «флюксии находятся в том же отношении, что и члены (т. е. коэффициенты членов.— *Ред.*) бесконечных сходящихся рядов»[3]. Неизвестно, заметил ли Ньютон общую зависимость между коэффициентами разложения функции и ее производными, т. е. знал ли он ряд Тейлора. Это весьма вероятно. Однако Ньютон не сформулировал явно теорему Тейлора, как этого не сделал и Дж. Грегори (ср. стр.166), и свое утверждение поясняет только примером разложения $f(x) = x^n$:

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3x^{n-3} + \ldots$$

Член nox^{n-1} он называет первым приращением, или первой разностью флюенты, «которой при ее зарождении пропорциональна первая флюксия»[4]. А так как этот же член есть момент данной флюенты (правда, здесь Ньютон этот термин не употребляет), то первый дифференциал функции $df(x)$ выступает теперь как главная линейная часть ее полного — конечного или бесконечно малого — приращения $\Delta f(x) = f(x+o) - f(x)$. Впрочем эта идея не нашла у Ньютона дальнейшего развития. Последующие члены разложения Ньютон именует вторым, третьим и т. д.

[1] *И. Ньютон.* Математические работы, стр. 169. Необходимо сказать, однако, что и здесь (ср. стр. 240) нет теорем об общих свойствах первых и последних отношений. Не обоснован здесь и предельный переход от выражения $\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^2x^{n-3} + \ldots$, содержащего бесконечное число слагаемых, к флюксии nx^{n-1} при исчезании o.

[2] Там же, стр. 167.

[3] Там же, стр. 190.

[4] Там же.

приращениями, или разностями, флюенты, заявляя, что вторая флюксия пропорциональна второму приращению, третья — третьему (при их зарождении) и т. д. Если записать разложение $f(x + o)$ в виде

$$f(x + o) = f(x) + C_1 o + C_2 o^2 + C_3 o^3 + \dots,$$

то утверждение Ньютона, что флюксии второго и высших порядков пропорциональны соответствующим «приращениям», «верно в том смысле, что в равенствах

$$C_1 o = of'(x), \quad C_2 o^2 = \frac{o^2}{2} f''(x), \quad C_3 o^3 = \frac{o^3}{6} f'''(x), \dots$$

коэффициенты

$$o, \quad \frac{o^2}{2}, \quad \frac{o^3}{6}, \quad \frac{o^4}{24}, \quad \dots$$

не зависят от вида функции $f(x)$»[1]. Ньютоновы «приращения» выражаются через наши дифференциалы, если положить $o = dx$, равенствами

$$C_1 o = df, \quad C_2 o^2 = \frac{1}{2} d^2 f, \quad C_3 o^3 = \frac{1}{6} d^3 f, \dots$$

Было бы более естественно назвать вторым, третьим... приращениями сами дифференциалы $d^2 f$, $d^3 f$, ... Неясно, почему Ньютон выразился в данном случае столь неудачно [2].

Метод первых и последних отношений привлек к себе пристальное внимание всех, кто занимался затем обоснованием математического анализа. Плодотворность замысла Ньютона создать общую теорию предельных переходов, включающую операции над исчезающими величинами, на основании понятия предела была подтверждена последующим развитием анализа. Но выяснилось это далеко не сразу. Сам Ньютон сделал в этом направлении только первые шаги. Значение выдвинутых им общих идей, доказанных им общих теорем трудно переоценить, но он не достиг, да и не мог достигнуть при тогдашнем состоянии анализа, уровня строгости, ставшего необходимым условием дальнейшего прогресса полтора-два столетия спустя. Как мы видели, в его рассуждениях место математической аргументации нередко занимало обращение к механической «наглядности», не было определено понятие предела и остались без рассмотрения многие основные свойства пределов и действий с ними. Концепция бесконечно малых величин не была однозначной и ясной. Самое разнообразие формулировок, иногда в одном и том же труде, показывает, что Ньютон оставался ими не удовлетворен. В XVIII в. теория пределов Ньютона нашла и резких критиков, считавших ее логически несостоятельной, и комментаторов, споривших о смысле отдельных ее положений, и узких адептов, требовавших полного отказа от инфинитезимальных приемов, и таких сторонников, которые развивали теорию далее в подлинно ньютоновском духе. Обо всем этом говорится в следующем томе. Однако только в 20-х годах XIX в. Коши положил начало тому глубокому и плодотворному синтезу идей Ньютона и Лейбница, который до сих пор продолжает лежать в основании математического анализа.

---

[1] *А. Н. Колмогоров.* Ньютон и современное математическое мышление. В сборнике: Московский университет — памяти Ньютона. 1643—1943. М., 1946, стр. 41.

[2] Это место «Поучения» дало повод Иоганну Бернулли упрекнуть Ньютона в неясном понимании флюксий высших порядков. Ньютон обошел эту критику молчанием.